ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOLUME QUARANTESIMOQUARTO

1908-909

TORINO
VINCENZO BONA
Tipografo di S. M. e dei Reali Principi.
1909

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI STRANIERI E CORRISPONDENTI

AL 31 DICEMBRE 1908.

NB. — *La prima data è quella dell'elezione, la seconda quella del R. Decreto che approva l'elezione.*

PRESIDENTE

D'Ovidio (Enrico), Senatore del Regno, Dottore in Matematica, Professore ordinario di Algebra e Geometria analitica nella R. Università di Torino, incaricato di Geometria analitica e proiettiva e Direttore del R. Politecnico di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Napoli e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio dell'Accademia Pontaniana, delle Società matematiche di Parigi e Praga, Membro del Consiglio superiore della Pubblica Istruzione e della Giunta del Consiglio superiore medesimo, ecc., Uffiz. ✠, Comm. ✠. — *Torino, Corso Sommeiller, 16.*

Rieletto alla carica il 17 marzo 1907 — 19 aprile 1907.

VICE-PRESIDENTE

Boselli S. E. (Paolo), 1° Segretario di Stato dell'Ordine Mauriziano e Cancelliere dell'Ordine della Corona d'Italia, Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza della R. Università di Genova, già Professore nella R. Università di Roma, Professore Onorario della R. Università di Bologna, e Socio corrispondente della Classe di scienze morali della R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, Vice-Presidente della R. Deputazione di Storia Patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio Corrispondente dell'Accademia dei Georgofili, Presidente della Società di Storia Patria di Savona, Socio onorario della Società Ligure di Storia Patria, Socio onorario dell'Accademia di Massa, Socio della R. Accademia di Agricoltura, Corrispondente dell'Accademia Dafnica di Acireale, Presidente Onorario della Società di Storia Patria degli Abruzzi in Aquila, Membro del Consiglio e della Giunta degli archivi, Presidente del Comitato Centrale della Società “ Dante Alighieri „, Presidente del Consiglio di Amministrazione del R. Politecnico di Torino, Presidente del Consiglio Superiore della Marina Mer-

cantile, Membro del Consiglio del Contenzioso diplomatico, Deputato al Parlamento nazionale, Presidente del Consiglio provinciale di Torino, Gr. Cord. ✱ e ✠, Gr. Cord. dell'Aquila Rossa di Prussia, dell'Ordine di Alberto di Sassonia, dell'Ord. di Bertoldo I di Zähringen (Baden), e dell'Ordine del Sole Levante del Giappone, Gr. Uffiz. O. di Leopoldo del Belgio, Uffiz. della Cor. di Pr., della L. d'O. di Francia, e C. O. della Concezione del Portogallo. — *Torino, Piazza Maria Teresa*, 3.

Rieletto alla carica il 17 marzo 1907 — 19 aprile 1907.

TESORIERE

Parona (Carlo Fabrizio), Dottore in Scienze naturali, Professore e Direttore del Museo di Geologia e di Paleontologia della R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio residente della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, e Corrispondente dell'I. R. Istituto Geologico di Vienna, Membro del R. Comitato Geologico, ecc., Cav. ✠. — *Torino, Museo Geologico della R. Università, Palazzo Carignano.*

Eletto alla carica 9 giugno 1907 — 30 giugno 1907.

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Direttore

Naccari (Andrea), Dottore in Matematica, Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Torino, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania e dell'Accademia Pontaniana, Uffiz. ✱, Comm. ✠. — *Torino, Via Sant'Anselmo, 6.*

Eletto alla carica il 15 dicembre 1907.

Segretario

Camerano (Lorenzo), Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Professore di Anatomia comparata e di Zoologia e Direttore dei Musei relativi nella R. Università di Torino, Membro del Consiglio e della Giunta Superiore della Pubblica Istruzione, Rettore della R. Università di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro della Società Zoologica di Francia, Socio corrispondente del Museo Civico di Rovereto, della Società Scientifica del Cile, della Società Spagnuola di Storia naturale, Socio straniero della Società Zoologica di Londra, Socio onorario della Società scientifica del Messico, Socio onorario della Società zoologica italiana, ✱, Comm. ✠. — *Torino, Museo Zoologico della R. Università, Palazzo Carignano.*

Rieletto alla carica il 14 aprile 1907 — 25 aprile 1907.

ACCADEMICI RESIDENTI

Salvadori (Conte Tommaso), Dottore in Medicina e Chirurgia, Vice-Direttore del Museo Zoologico della R. Università di Torino, Professore di Storia naturale nel R. Liceo Cavour di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, della Società Italiana di Scienze naturali, dell'Accademia Gioenia di Catania, Membro della Società Zoologica di Londra, dell'Accademia delle Scienze di Nuova York, della Società dei Naturalisti in Modena, della Società Reale delle Scienze di Liegi, della Reale Società delle Scienze naturali delle Indie Neerlandesi e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro effettivo della Società Imperiale dei Naturalisti di Mosca, Socio straniero della *British Ornithological Union*, Socio Straniero onorario del *Nuttall Ornithological Club*, Socio Straniero dell'*American Ornithologist's Union*, e Membro onorario della Società Ornitologica di Vienna, Membro ordinario della Società Ornitologica tedesca, Uffiz. ✠, Cav. dell'O. di S. Giacomo del merito scientifico, letterario ed artistico (Portogallo). — *Torino, Via Principe Tommaso, 17.*

29 Gennaio 1871 - 9 febbraio 1871. — Pensionato 21 marzo 1878.

D'Ovidio (Enrico), *predetto.*

29 Dicembre 1878 - 16 gennaio 1879. — Pensionato 28 novembre 1889.

Naccari (Andrea), *predetto.*

5 Dicembre 1880 - 23 dicembre 1880. — Pensionato 8 giugno 1893.

Mosso (Angelo), Senatore del Regno, Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Fisiologia nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze), della R. Accademia di Medicina di Torino, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, L. L. D. dell'Università di Worcester, Socio onorario della R. Accademia medica Gioenia di Scienze naturali di Catania, della R. Accademia medica di Roma, dell'Accademia di Genova, Socio dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina Germanica Naturae Curiosorum*, Membro onorario della Società imperiale dei medici di Vienna, della Società Reale delle Scienze mediche di Bruxelles, della Società fisico-medica di Erlangen, Socio straordinario della R. Accademia di Scienze di Svezia, Socio corrispondente della Società Reale di Napoli, Socio corrispondente della Società di Biologia di Parigi, ecc., Socio onorario della *Boston Society of Natural History,* Corrispondente straniero dell'Accademia R. di Medicina del Belgio, Membro onorario dell'Accademia Imperiale di Medicina di Pietroburgo, Socio corrispondente dell'Accademia Reale di Medicina del Belgio, Socio straniero dell'Accademia medica di Parigi, Membro onorario della Società dei Naturalisti della Svizzera, ✻, Comm. ✠. — *Torino, Via Madama Cristina, 34.*

11 Dicembre 1881 - 25 dicembre 1881. — Pensionato 17 agosto 1894.

Spezia (Giorgio), Ingegnere, Professore di Mineralogia e Direttore del Museo mineralogico della R. Università di Torino, ♔. — *Torino, Via Accademia Albertina, 21.*

15 Giugno 1884 - 6 luglio 1884. — Pensionato 5 settembre 1895.

Camerano (Lorenzo), *predetto.*

10 Febbraio 1889 - 21 febbraio 1889. — Pensionato 8 ottobre 1898.

Segre (Corrado), Dottore in Matematica, Professore di Geometria superiore nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana delle Scienze (dei XL), Membro onorario della Società Filosofica di Cambridge, Socio straniero dell'Accademia delle Scienze del Belgio e di quella di Danimarca, Socio corrispondente della Società Fisico-Medica di Erlangen, dell'Accademia delle Scienze di Bologna, del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, ♔. — *Torino, Corso Vittorio Eman., 85.*

10 Gennaio 1889 - 21 febbraio 1889. — Pensionato 8 ottobre 1898.

Peano (Giuseppe), Dottore in Matematica, Professore di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino, Socio della " *Sociedad Cientifica* „ del Messico, Socio del Circolo Matematico di Palermo, della Società matematica di Kasan, della Società filosofica di Ginevra, corrispondente della R. Accademia dei Lincei, ♔. — *Torino, Via Barbaroux, 4.*

25 Gennaio 1891 - 5 febbraio 1891. — Pensionato 22 giugno 1899.

Jadanza (Nicodemo), Dottore in Matematica, Professore di Geodesia teoretica nella R. Università di Torino e di Geometria pratica nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri, Socio dell'Accademia Pontaniana di Napoli, del Circolo matematico di Palermo, dell'Accademia Dafnica di Acireale e della Società degli Ingegneri Civili di Lisbona, Membro effettivo della R. Commissione Geodetica italiana, Uff. ♔. — *Torino, Via Madama Cristina, 11.*

3 Febbraio 1895 - 17 febbraio 1895. — Pensionato 17 ottobre 1902.

Foà (Pio), Senatore del Regno, Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Anatomia Patologica nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto, ecc., ecc., ✱, Comm. ♔. — *Torino, Corso Valentino, 40.*

3 Febbraio 1895 - 17 febbraio 1895. — Pensionato 9 novembre 1902.

Guareschi (Icilio), Dottore in Scienze naturali, Professore e Direttore dell'Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologica nella R. Università di Torino, Direttore della Scuola di Farmacia, Socio della R. Accademia di Medicina di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena, Socio onorario della Società di Farmacia di Torino, Membro anziano del Consiglio Sanitario Provinciale, Cittadino Onorario di Crespellano (Bologna), Membro corrispondente dell'Accademia di Medicina di Parigi, Membro corrispondente della Società di Farmacia di Parigi, Socio della *Deutsche Gesellschaft b. Geschichte d. Medizin und Naturwissenschaften*, Membro della Società Chimica di Berlino, della *Berliner Gesellschaft f. Gesch. d. Naturwiss.*, ecc., Uff. ♔, ⚔. — *Torino, Corso Valentino, 11.*

12 Gennaio 1896 - 2 febbraio 1896. — Pensionato 28 maggio 1903.

Guidi (Camillo), Ingegnere, Professore ordinario di Statica grafica e scienza delle costruzioni e Direttore dell'annesso Laboratorio sperimentale nel R. Politecnico in Torino, Uff. ✠ e ⊜. — *Torino, Corso Valentino, 7.*

31 Maggio 1896 - 11 giugno 1896. — Pensionato 11 giugno 1903.

Fileti (Michele), Dottore in Chimica, Professore ordinario di Chimica generale, ⊜. — *Torino, Via Bidone, 36.*

31 Maggio 1896 - 11 giugno 1896. — Pensionato 10 marzo 1904.

Parona (Carlo Fabrizio), *predetto.*

15 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899.

Mattirolo (Oreste), Dottore in Medicina, Chirurgia e Scienze naturali, Professore ordinario di Botanica e Direttore dell'Istituto botanico della R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accademia di Medicina e della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, dell'Accademia delle Scienze del R. Istituto di Bologna, della Società Imperiale di Scienze naturali di Mosca, della *Royal Botanical Society* di Edinburgh, della Società Veneto-Trentina, ecc., ⊜. — *Torino, Orto Botanico della R. Università (al Valentino).*

10 Marzo 1901 - 16 marzo 1901.

Morera (Giacinto), Ingegnere, Dottore in Matematiche, Professore ordinario di Meccanica, incaricato di Meccanica razionale nel R. Politecnico di Torino, superiore e Preside della Facoltà di Scienze matematiche, fisiche e naturali nella R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Professore onorario della R. Università di Genova, ⊜. — *Torino, Via della Rocca, 22.*

9 Febbraio 1902 - 23 febbraio 1902.

Grassi (Guido), Professore ordinario di Elettrotecnica e Direttore della scuola Galileo Ferraris nel R. Politecnico di Torino, Socio ordinario della R. Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli, dell'Accademia Pontaniana e del R. Istituto d'incoraggiamento di Napoli, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Comm. ⊜. — *Torino, Via Cernaia, 40.*

9 Febbraio 1902 - 23 febbraio 1902.

Somigliana (nob. Carlo), Dottore in Matematiche, Professore ordinario di Fisica matematica nella R. Università di Torino, rappresentante dell'Accademia nel Consiglio amministrativo del R. Politecnico di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, e corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. — *Corso Vinzaglio, 10.*

5 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

Fusari (Romeo), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore ordinario di Anatomia umana, descrittiva e topografica e Direttore dell' Istituto anatomico della R. Università di Torino, Socio dell'Accademia di Medicina di Torino, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, fondatore della Società medico-chirurgica di Pavia, onorario dell'Accademia delle Scienze mediche e naturali di Ferrara, ⊜. — *Via Baretti, 45.*

5 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Cannizzaro (Stanislao), Senatore del Regno, Professore di Chimica generale nella R. Università di Roma, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei e della Società Reale di Napoli, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Corrispondente dell'Istituto di Francia, dell'Accademia delle Scienze di Berlino, di Vienna e di Pietroburgo, Associato dell'Accademia Reale delle Scienze del Belgio, Socio straniero della R. Accademia delle Scienze di Baviera, della Società Reale di Londra, della Società Reale di Edimburgo e della Società letteraria e filosofica di Manchester, Socio onorario della Società chimica tedesca, di Londra e Americana, Comm. ✠, Gr. Cr. ✠, ✠. — *Roma, Istituto chimico, Via Panisperna, 89 B.*
3 Luglio 1864 - 11 luglio 1864.

Schiaparelli (Giovanni), Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della R. Accademia dei Lincei, dell' Accademia Reale di Napoli e dell' Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze), delle Accademie di Monaco, di Vienna, di Berlino, di Pietroburgo, di Stoccolma, di Upsala, di Cracovia, della Società de' Naturalisti di Mosca, della Società Reale e della Società astronomica di Londra, delle Società filosofiche di Filadelfia e di Manchester, e di altre Società scientifiche nazionali e straniere, Gr. Cord. ✠, Comm. ✠, ✠. — *Milano, Via Fate Bene Fratelli, 7.*
16 Gennaio 1870 - 30 gennaio 1870.

Volterra (Vito), Senatore del Regno, Dottore in Fisica, Dottore onorario in Matematiche della Università Fridericiana di Christiania e Dottore onorario in scienze della Università di Cambridge, Professore di Fisica matematica, incaricato di Meccanica celeste e Preside della Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali nella R. Università di Roma, Presidente della Società italiana per il progresso delle Scienze, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Accademico corrispondente della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio onorario dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania, Membro nazionale della Società degli Spettroscopisti italiani, Socio corrispondente nella Sezione di Geometria dell'Accademia delle Scienze di Parigi, Membro straniero nella classe di matematica pura della Reale Accademia Svedese delle scienze, Socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Gottinga, Socio corrispondente della Società medico-fisica di Erlangen, Membro dell'Accademia Imperiale Leopoldina Carolina di Halle, Membro ono-

rario della Società Matematica di Londra e Membro onorario della Società di Scienze fisiche e naturali di Bordeaux, ✠, ♕. — *Roma, Via in Lucina, 17.*
3 Febbraio 1895 - 11 febbraio 1895.

Fergola (Emanuele), Senatore del Regno, Direttore del R. Osservatorio astronomico di Capodimonte, Professore emerito nella R. Università di Napoli, Socio ordinario residente della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, Membro della Società italiana dei XL, Socio della R. Accademia dei Lincei e dell'Accademia Pontaniana, Socio ordinario del R. Istituto d' incoraggiamento alle Scienze naturali, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto, Comm. ❈, Gr. Uffiz. ♕. — *Napoli, Regio Osservatorio di Capodimonte.*
12 Gennaio 1896 - 2 febbraio 1896.

Bianchi (Luigi), Professore di Geometria analitica nella R. Università di Pisa, Socio ordinario della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL; Socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere in Milano, ❈, ♕. — *Pisa, Via Manzoni, 3.*
13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Dini (Ulisse), Senatore del Regno, Professore di Analisi Superiore nella R. Università di Pisa, Direttore della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Socio della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana detta dei XL, Corrispondente dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Socio onorario della R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Modena, dell'Accademia di scienze naturali di Catania e della R. Accademia di scienze, lettere ed arti degli Zelanti di Acireale, Membro del Consiglio Direttivo del Circolo matematico di Palermo, Socio della Società italiana per il progresso delle scienze (Roma), della R. Società delle scienze di Gottinga, Membro straniero della *London mathemat. Society*, Dottore onorario dell'Università di Christiania e di Glasgow, Vice presidente del Consiglio Superiore e della Giunta di Pubblica Istruzione, Uff. ❈, Cav. ♕, ✠.
13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Golgi (Camillo), Senatore del Regno, Membro del Consiglio superiore di Sanità, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei di Roma, Dottore in Scienze *ad honorem* dell'Università di Cambridge, Membro onorario dell'Università Imperiale di Charkoff, uno dei XL della Società italiana delle Scienze, Membro della Società per la Medicina interna di Berlino, Membro onorario della Imp. Accademia Medica di Pietroburgo, della Società di Psichiatria e Neurologia di Vienna, Socio corrispondente onorario della *Neurological Society* di Londra, Membro corrispondente della *Société de Biologie* di Parigi, Membro dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina*, Socio della R. Società delle Scienze di Gottinga e delle Società Fisico-mediche di Würzburg, di Erlangen, di Gand, Membro della Società Anatomica, Socio nazionale della R. Accademia delle

Scienze di Bologna, Socio corrispondente dell'Accademia di Medicina di Torino, Socio onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, Socio corrispondente dell'Accademia Medico-fisica Fiorentina, della R. Accademia delle Scienze mediche di Palermo, della Società Medico-chirurgica di Bologna, Socio onorario della R. Accademia Medica di Roma, Socio onorario della R. Accademia Medico-chirurgica di Genova, Socio corrispondente dell'Accademia Fisiocritica di Siena, dell'Accademia Medico-chirurgica di Perugia, della *Societas medicorum Svecana* di Stoccolma, Membro onorario dell'*American Neurological Association* di New-York, Socio onorario della *Royal Microscopical Society* di Londra, Membro corrispondente della R. Accademia di Medicina del Belgio, Membro onorario della Società freniatrica italiana e dell'Associazione Medico-Lombarda, Socio onorario del Comizio Agrario di Pavia, Professore ordinario di Patologia generale e di Istologia nella R. Università di Pavia, Membro effettivo della Società Italiana d'Igiene e dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Membro onorario dell'Università di Dublino, Socio corrispondente della Società medica di Batavia, Membro straniero dell'Accademia di Medicina di Parigi, Membro onorario dell'Imperiale Società degli alienisti e neurologi di Kazan, Socio emerito della R. Accademia medico-chirurgica di Napoli, Socio corrispondente dell'Imp. Accademia delle Scienze di Vienna, Socio onorario della R. Società dei Medici in Vienna, Cav. ✠, ✠, Comm. ✠.
13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Lorenzoni (Giuseppe), Dottore negli Studi d'Ingegnere civile ed Architetto, Professore di Astronomia della R. Università e Direttore dell'Osservatorio astronomico di Padova, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, uno dei XL della Società italiana delle Scienze, Socio effettivo del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze ed Arti di Modena, Membro della Società Imperiale dei Naturalisti di Mosca, ✠, Comm. ✠. — *Padova, Osservatorio astronomico.*
5 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

ACCADEMICI STRANIERI

Klein (Felice), Professore nell'Università di Gottinga. — 10 Gennaio 1897 - 24 gennaio 1897.

Haeckel (Ernesto), Professore nella Università di Jena. — 13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Darboux (Giovanni Gastone), Membro dell'Istituto di Francia (Parigi). — 14 Giugno 1903 - 28 giugno 1903.

Poincaré (Giulio Enrico), Membro dell'Istituto di Francia (Parigi). — 14 Giugno 1903 - 28 giugno 1903.

Helmert (Federico Roberto), Direttore del R. Istituto Geodetico di Prussia, Potsdam. — 14 Giugno 1903 - 28 giugno 1903.

Hoff (Giacomo Enrico van 't), Professore nella Università di Berlino. — 5 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

CORRISPONDENTI

Sezione di Matematiche pure.

Tardy (Placido), Professore emerito della R. Università di Genova (Firenze). — 16 Luglio 1864.

Cantor (Maurizio), Professore nell'Università di Heidelberg. — 25 Giugno 1876.

Schwarz (Ermanno A.), Professore nella Università di Berlino. — 19 Dicembre 1880.

Bertini (Eugenio), Professore nella Regia Università di Pisa. — 9 Marzo 1890.

Noether (Massimiliano), Professore nell' Università di Erlangen. — 3 Dicembre 1893.

Jordan (Camillo), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto (Parigi). — 12 Gennaio 1896.

Mittag-Leffler (Gustavo), Professore a Stoccolma. — 12 Gennaio 1896.

Picard (Emilio), Professore alla Sorbonne, Membro dell'Istituto di Francia, Parigi. — 10 Gennaio 1897.

Castelnuovo (Guido), Prof. nella R. Università di Roma. — 17 Aprile 1898.

Veronese (Giuseppe), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Padova. — 17 Aprile 1898.

Zeuthen (Gerolamo Giorgio), Professore nella Università di Copenhagen. — 14 Giugno 1903.

Hilbert (Davide), Prof. nell'Università di Göttingen. — 14 Giugno 1903.

Sezione di Matematiche applicate, Astronomia e scienza dell'ingegnere civile e militare.

Zeuner (Gustavo), Professore nel Politecnico di Dresda. — 3 Dicembre 1893.

Ewing (Giovanni Alfredo), Professore nell' Università di Cambridge. — 27 Maggio 1894.

Celoria (Giovanni), Astronomo all'Osservatorio di Milano. — 12 Gennaio 1896.

Pizzetti (Paolo), Professore nella R. Università di Pisa. — 14 Giugno 1903.

Newcomb (Simone), Professore di Matematica e di Astronomia nell'Università di Baltimora. — 5 Marzo 1905.

Sezione di Fisica generale e sperimentale.

Blaserna (Pietro), Senatore del Regno, Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Roma. — 30 Novembre 1873.

Kohlrausch (Federico), Presidente dell'Istituto Fisico-Tecnico in Marburg (Bezirk Cassel). — 2 Gennaio 1881.

Roiti (Antonio), Professore nell'Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. — 12 Marzo 1882.

Righi (Augusto), Senatore del Regno, Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Bologna. — 14 Dicembre 1884.

Lippmann (Gabriele), dell'Istituto di Francia (Parigi). — 15 Maggio 1892.

Rayleigh (Lord Giovanni Guglielmo), Professore nella *Royal Institution* di Londra. — 3 Febbraio 1895.

Thomson (Giuseppe Giovanni), Professore nell'Università di Cambridge. — 12 Gennaio 1896.

Pacinotti (Antonio), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Pisa. — 17 Aprile 1898.

Röntgen (Guglielmo Corrado), Professore nell'Università di München. — 14 Giugno 1903.

Lorentz (Enrico), Professore nell'Università di Leiden. — 14 Giugno 1903.

Sezione di Chimica generale ed applicata.

Paternò (Emanuele), Senatore del Regno, Professore di Chimica applicata nella R. Università di Roma. — 2 Gennaio 1881.

Körner (Guglielmo), Professore di Chimica organica nella R. Scuola superiore d'Agricoltura in Milano. — 2 Gennaio 1881.

Baeyer (Adolfo von), Professore nell'Università di Monaco (Baviera). — 25 Gennaio 1885.

Thomsen (Giuseppe), Professore nell'Università di Copenhagen. — 25 Gennaio 1885.

Lieben (Adolfo), Professore nell'Università di Vienna. — 15 Maggio 1892.

Fischer (Emilio), Professore nell'Università di Berlino. — 24 Gennaio 1897.

Ramsay (Guglielmo), Professore nell'Università di Londra. — 24 Gennaio 1897.

Schiff (Ugo), Professore nel R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. — 28 Gennaio 1900.

Dewar (Giacomo), Professore nell'Università di Cambridge. — 14 Giugno 1903.

Ciamician (Giacomo), Professore nell'Università di Bologna. — 14 Giugno 1903.

Ostwald (Guglielmo), Professore di Chimica nell'Università di Lipsia. — 5 Marzo 1905.

Arrhenius (Ivante Augusto), Direttore e Professore dell'Istituto Fisico dell'Università di Stoccolma. — 5 Marzo 1905.

Nernst (Walter), Professore di Chimica fisica nell'Università di Gottinga. — 5 Marzo 1905.

Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia.

Strüver (Giovanni), Professore di Mineralogia nella R. Università di Roma. — 30 Novembre 1873.

Rosenbusch (Enrico), Professore nell'Univ. di Heidelberg. — 25 Giugno 1876.

Zirkel (Ferdinando), Professore nell'Università di Lipsia. — 16 Gennaio 1881.

Capellini (Giovanni), Professore nella R. Univ. di Bologna. — 12 Marzo 1882.

Tschermak (Gustavo), Professore nell'Università di Vienna. — 8 Febbraio 1885.

Geikie (Arcibaldo), Direttore del Museo di Geologia pratica (Londra). — 3 Dicembre 1893.

Groth (Paolo Enrico), Professore nell'Università di Monaco. — 13 Febbraio 1898.

Taramelli (Torquato), Professore nella R. Univ. di Pavia. — 28 Gennaio 1900.

Liebisch (Teodoro), Professore nell'Università di Gottinga. — 28 Gennaio 1900.

Bassani (Francesco), Professore nella R. Univ. di Napoli. — 14 Giugno 1903.

Issel (Arturo), Professore nella R. Università di Genova. — 14 Giugno 1903.

Levy (Michele), dell'Istituto di Francia, Professore di Mineralogia all'Università di Parigi. — 5 Marzo 1905.

Goldschmidt (Viktor), Professore di Mineralogia nell'Università di Heidelberga. — 5 Marzo 1905.

Suess (Francesco Edoardo), Professore di Geologia nell'Imperiale Università di Vienna. — 5 Marzo 1905.

Haug (Emilio), Prof. di Geologia nell'Università di Parigi. — 5 Marzo 1905.

Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale.

Ardissone (Francesco), Professore di Botanica nella R. Scuola superiore di Agricoltura in Milano. — 16 Gennaio 1881.

Saccardo (Andrea), Professore di Botanica nella R. Università di Padova. — 8 Febbraio 1885.

Hooker (Giuseppe **Dalton**), Direttore del Giardino Reale di Kew (Londra). — 8 Febbraio 1885.

Pirotta (Romualdo), Professore nella R. Univ. di Roma. — 15 Maggio 1892.

Strasburger (Edoardo), Professore nell'Univ. di Bonn. — 3 Dicembre 1893.

Goebel (Carlo), Professore nell'Università di Monaco. — 13 Febbraio 1898.

Penzig (Ottone), Professore nell'Università di Genova. — 13 Febbraio 1898.

Schwendener (Simone), Professore nell'Univ. di Berlino. — 13 Febbraio 1898.

Wiesner (Giulio), Professore nella I. R. Univ. di Vienna. — 14 Giugno 1903.

Klebs (Giorgio), Professore nell'Università di Halle. — 14 Giugno 1903.

Belli (Saverio), Professore nella R. Università di Cagliari. — 14 Giugno 1903.

Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata.

Sclater (Filippo **Lutley**), Segretario della Società Zoologica di Londra. — 25 Gennaio 1885.

Chauveau (G. B. Augusto), Membro dell'Istituto di Francia, Professore alla Scuola di Medicina di Parigi. — 1° Dicembre 1889.

Foster (Michele), Professore nell'Università di Cambridge. — 1° Dicembre 1889.

Waldeyer (Guglielmo), Professore nell'Univ. di Berlino. — 1° Dicembre 1889.

Guenther (Alberto), Londra. — 3 Dicembre 1893.

Roux (Guglielmo), Professore nell'Università di Halle. — 13 Febbraio 1898.

Minot (Carlo Sedgwick), Professore nell' " Harvard Medical School „ di Boston Mass. (S. U. A.). — 28 Gennaio 1900.

Boulenger (Giorgio Alberto), Assistente al Museo di Storia Naturale di Londra. — 28 Gennaio 1900.

Marchand (Felice), Professore nell'Università di Leipzig. — 14 Giugno 1903.

Weismann (Augusto), Professore di Zoologia nell'Università di Freiburg i. Br. (Baden). — 5 Marzo 1905.

Lankester (Edwin Ray), Direttore del *British Museum of Natural History.* — 5 Marzo 1905.

Engelmann (Teodoro Guglielmo), Professore di Fisiologia nell'Università di Berlino. — 5 Marzo 1905.

Dastre (A.), Profess. di Fisiologia nell'Università di Parigi. — 5 Marzo 1905.

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore.

Manno (Barone D. Antonio), Membro e Segretario della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Membro del Consiglio degli Archivi e dell'Istituto storico italiano, Commissario di S. M. presso la Consulta araldica, Dottore *honoris causa* della R. Università di Tübingen, Gr. Uffiz. ✻ e Gr. Cord. ⚭, Cav. d'on. e devoz. del S. M. O. di Malta, decorato di Ordini stranieri. — *Torino, Via Ospedale, 19.*

Eletto alla carica il 17 marzo 1907 - 19 aprile 1907.

Segretario.

De Sanctis (Gaetano), Dottore in Lettere, Professore di Storia antica nella R. Università di Torino, Socio ordinario della Società Archeologica italiana e della Pontificia Accademia romana di Archeologia, ⚭. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 44.*

Eletto alla carica il 17 marzo 1907 - 19 aprile 1907.

ACCADEMICI RESIDENTI

Rossi (Francesco), Dottore in Filosofia, Professore d'Egittologia nella R. Università di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei in Roma, ⚭. — *Torino, Via Gioberti, 30.*

10 Dicembre 1876 - 28 dicembre 1876. — Pensionato 1° agosto 1884.

Manno (Barone D. Antonio), *predetto.*

17 Giugno 1877 - 11 luglio 1877. — Pensionato 28 febbraio 1886.

Carle (Giuseppe), Senatore del Regno, Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza e Professore di Filosofia del Diritto nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Uff. ✻, Comm. ⚭. — *Torino, Piazza Statuto, 15.*

7 Dicembre 1879 - 1° gennaio 1880. — Pensionato 4 agosto 1892.

Graf (Arturo), Professore di Letteratura italiana nella R. Università di Torino, Membro della Società Romana di Storia patria, Socio onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, dell'Ateneo di Brescia, della R. Accad. dei Lincei, ecc., Comm. ✠ e ♔. — *Torino, Via Bricherasio, 11.*

15 Gennaio 1888 - 2 febbraio 1888. — Pensionato 20 maggio 1897.

Boselli (Paolo), *predetto.*

15 Gennaio 1888 - 2 febbraio 1888. — Pensionato 13 ottobre 1897.

Cipolla (Conte Carlo), Dottore in Filosofia, Professore emerito nella R. Università di Torino, Prof. di Storia moderna nel R. Istituto di Studi Superiori in Firenze, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio effettivo della R. Deputazione Veneta di Storia patria, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Monaco (Baviera), del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti e della R. Deputazione Storica toscana, Comm. ♔. — *Firenze, Via Lorenzo il Magnifico, 8.*

15 Febbraio 1891 - 15 marzo 1891. — Pensionato 4 marzo 1900.

Allievo (Giuseppe), Dottore aggregato in Filosofia, Professore di Pedagogia e Antropologia nella R. Università di Torino, Socio onorario della R. Accademia delle Scienze di Palermo, dell'Accademia di S. Anselmo di Aosta, dell'Accademia Dafnica di Acireale, della Regia Imperiale Accademia degli Agiati di Rovereto, dell'Arcadia, dell'Accademia degli Zelanti di Acireale e dell'Accademia cattolica panormitana, Gr. Uff. ✠, Comm. ♔. — *Torino, Piazza Statuto, 18.*

13 Gennaio 1895 - 3 febbraio 1895. — Pensionato 20 giugno 1901.

Carutti di Cantogno (Barone Domenico), Senatore del Regno, Bibliotecario di S. M. il Re d'Italia, Presidente della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e Lombardia, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Membro dell'Istituto Storico Italiano, Accademico corrispondente della Crusca, Socio Straniero della R. Accademia delle Scienze Neerlandese, e della Accademia di scienze e lettere della Savoia, Socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco in Baviera, ecc. ecc., Gr. Cord. ♔, Gr. Uffiz. ✠ e Cav. e Cons. ✠, Gr. Cord. dell'Ordine del Leone Neerlandese e dell'O. d'Is. la Catt. di Spagna, ecc. — *Torino, Via della Zecca, 7.*

4 Giugno 1857 - 12 giugno 1857. — Pensionato 10 dicembre 1905.

Renier (Rodolfo), Dottore in Lettere ed in Filosofia, Professore di Storia comparata delle Letterature neo-latine nella R. Università di Torino, Socio attivo della R. Commissione dei testi di lingua; Socio non residente dell'I. R. Accademia degli Agiati di Rovereto; Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Deputazione Veneta di Storia patria, di quella per le Marche, di quella per l'Umbria, di quella per l'Emilia e di quella per le Antiche Provincie e la Lombardia, della Società storica abruzzese e della Commissione di Storia patria e di Arti belle della Mirandola, della R. Accademia Virgiliana di Mantova, dell'Accademia di Verona, della R. Accademia di Padova,

dell'Ateneo Veneto e di quello di Brescia; Membro della Società storica lombarda e della Società Dantesca italiana; Socio onorario dell'Accademia Etrusca di Cortona, della R. Accademia di scienze e lettere di Palermo, dell'Accademia Cosentina e dell'Accademia Dafnica di Acireale, Uffiz. ✠, Comm. ♔. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 90.*
8 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 30 ottobre 1906.

Pizzi (Nobile Italo), Dottore in Lettere, Professore di Persiano e Sanscrito nella R. Università di Torino, Socio corrispondente della Società Colombaria di Firenze, Dottore onorario dell'Università di Lovanio, Socio corrispondente dell'Ateneo Veneto, dell'Accademia Petrarchesca di Arezzo, dell'Accademia Dafnica di Acireale, dell'Accademia dell'Arcadia di Roma, ✠, ♔. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 16.*
8 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 16 giugno 1907.

Chironi (Dott. Giampietro), Senatore del Regno, Professore ordinario di Diritto Civile nella R. Università di Torino, Direttore della R. Scuola superiore di studi applicati al Commercio in Torino, Dottore aggregato della Facoltà di Giurisprudenza nella R. Università di Cagliari, Membro del Consiglio superiore dell'Istruzione pubblica, del Consiglio superiore per l'Istruzione commerciale, agricola, industriale, della Commissione Reale per la riforma del Diritto privato, Socio corrispondente dell'Accademia di Legislazione di Tolosa (Francia), dell'Associazione internazionale di Berlino per lo studio del Diritto comparato, dell'Accademia Americana di Scienze sociali e politiche, ✠. Comm. ♔. — *Torino, Via Bonafous, 7.*
20 Maggio 1900 - 31 maggio 1900.

De Sanctis (Gaetano), *predetto.*
21 Giugno 1903 - 8 luglio 1903.

Ruffini (Francesco), Dottore in Leggi, Membro corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Professore di Storia del diritto italiano, ✠, Comm. ♔. — *Torino, Via Principe Amedeo, 22.*
21 Giugno 1903 - 8 luglio 1903.

Stampini (Ettore), Dottore in Lettere ed in Filosofia, Professore ordinario di Letteratura latina, Preside della Facoltà di Filosofia e Lettere nella R. Università di Torino, Direttore del corso di perfezionamento pei licenziati dalle scuole normali, Socio corrispondente della R. Accademia Peloritana e dell'Ateneo di Brescia, e della Reale Accademia Virgiliana di scienze, lettere ed arti di Mantova, Decorato della Medaglia del Merito Civile di 1ª Classe della Repubblica di S. Marino, ✠, Comm. ♔. — *Piazza Vittorio Emanuele I, 10.*
20 Maggio 1906 - 9 giugno 1906.

D'Ercole (Pasquale), Dottore in Filosofia, Professore di Filosofia teoretica nella R. Università di Torino, Membro della Società Filosofica di Berlino, Socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze morali e politiche di Napoli, Uff. ✠, Comm. ♔. — *Corso Siccardi, 26.*
17 Febbraio 1907 - 19 Aprile 1907.

Brondi (Vittorio), Dottore in Legge, Professore di Diritto amministrativo e Scienza dell'Amministrazione nella R. Università di Torino, Membro del Consiglio Superiore di assistenza e beneficenza pubblica, ✻, Uff. ☙. — *Torino, Via Montebello, 21.*
17 Febbraio 1907 - 19 Aprile 1907.

Sforza (Nob. Giovanni), Vice-Presidente della R. Deputazione di Storia patria di Modena, per la Sotto-Sezione di Massa e Carrara, Socio effettivo di quelle delle antiche Provincie e della Lombardia, della Toscana, e di Parma, Corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, e della Società Ligure di Storia patria, Socio ordinario non residente della R. Accademia Lucchese, Socio onorario della R. Accademia di Belle Arti di Carrara, Membro d'onore dell'*Académie Chablesienne* di Thonon-les-Bains, Membro aggregato dell'*Académie des Sciences, Belles Lettres et Arts de Savoie,* Socio della R. Commissione per i testi di lingua, Membro della Commissione Araldica Piemontese, della Società di Storia patria di Vignola, della Commissione municipale di Storia patria e belle arti della Mirandola, della Commissione senese di Storia patria e della Società storica di Carpi, Corrispondente della R. Accademia Valdarnese del Poggio in Montevarchi, della Società Georgica di Treia e della Colombaria di Firenze, ecc., ecc., Presidente onorario della R. Accademia dei Rinnovati di Massa, Direttore del R. Archivio di Stato di Torino, comm., con placca, dell'Ordine del Medjidiè di Turchia, ✻ e Uff. ☙. — *Via Giusti, 4.*
17 Febbraio 1907 - 19 aprile 1907,

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Villari (Pasquale), Senatore del Regno, Presidente dell'Istituto Storico di Roma, Professore di Storia moderna e Presidente della Sezione di Filosofia e Lettere nell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio residente della R. Accademia della Crusca, Presidente della R. Accademia dei Lincei, Socio nazionale della R. Accademia di Napoli, della R. Accademia dei Georgofili, della Pontaniana di Napoli, Presidente della R. Deputazione di Storia Patria per la Toscana, Socio di quella per le provincie di Romagna, Socio straordinario del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia di Baviera, Socio straniero dell'Accademia di Berlino, dell'Accademia di Scienze di Gottinga, della R. Accademia Ungherese, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Scienze morali e politiche), Dott. on. in Legge della Università di Edimburgo, di Halle, Dott. on. in Filosofia dell'Università di Budapest, Professore emerito della R. Univers. di Pisa, Gr. Uffiz. ✻ e Gr. Cord. ☙, Cav. ✠, Cav. del Merito di Prussia, ecc.
16 Marzo 1890 - 30 marzo 1890.

Comparetti (Domenico), Senatore del Regno, Professore emerito dell' Università di Pisa e dell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Socio corrispondente dell'Accademia della Crusca, del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto, Membro della Società Reale pei testi di lingua, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) e corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco, di Vienna, di Copenhagen, Dottore *ad honorem* dell' Università di Oxford e di Cracovia, Uff. ✻, Comm. ♔, Cav. ☩. — *Firenze, Via Lamarmora, 20.*
20 Marzo 1892 - 26 marzo 1892.

D'Ancona (Alessandro), Senatore del Regno, già Professore di Letteratura italiana nella R. Università e già Direttore della Scuola normale superiore in Pisa, Membro della Deputazione di Storia patria per la Toscana, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Académie des Inscriptions et Belles Lettres), della R. Accademia di Copenhagen, dell' Accademia della Crusca, del R. Istit. Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto, della R. Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti di Napoli e della R. Accademia di Lucca, Cav. della Legione d'Onore, Cav. ☩, Gr. Uff. ✻, Comm. ♔. — *Pisa, Lungarno Mediceo, Palazzo Mediceo.*
20 Febbraio 1898 - 3 marzo 1898.

Savio (Sacerdote Fedele), Professore di Storia ecclesiastica nella Pontificia Università Gregoriana, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio della Società Storica Lombarda. — *Roma, Via del Seminario, 120.*
20 Maggio 1900 - 31 maggio 1900.

Scialoja (Vittorio), Senatore del Regno, Dottore in Leggi, Professore ordinario di Diritto romano nella R. Università di Roma, Professore onorario della Università di Camerino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei e della R. Accademia di Napoli, di Bologna, di Modena e di Messina, Socio onorario della R. Accademia di Palermo, ecc., Comm. ✻ e ♔. — *Roma, Piazza Grazioli, 5.*
29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Rajna (Pio), Dottore in Lettere, Dottore " honoris causa „ dell'Università di Erlangen, Professore ordinario di lingue e letterature neo-latine nel R. Istituto di Studi superiori di Firenze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Accademico residente della Crusca, Socio Urbano della Società Colombaria, Socio onorario della R. Accademia di Padova, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della Società Reale di Napoli, di Padova, dell'Accademia R. Lucchese, della R. Deputazione di Storia Patria per la Toscana e della Società Reale di Scienze e Lettere di Göteborg, Uff. ✻, Comm. ♔. — *Firenze, Piazza d'Azeglio, 13.*
29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Kerbaker (Michele), Dottore in lettere, Professore di Storia comparata delle lingue classiche e incaricato di Sanscrito nella R. Università di Napoli, Socio ordinario della R. Accademia dei Lincei, Socio residente della Società Reale di Napoli, della R. Accademia Pontaniana, Membro della Società Asiatica italiana di Firenze, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Comm. ✻ e ♔. — *Napoli, Vomero, Via Scarlatti, 60.*
26 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

Guidi (Ignazio), Dottore, Professore di Ebraico e di Lingue semitiche nella R. Università di Roma, Socio e Segretario della Classe di scienze morali, storiche e filologiche della R. Accademia dei Lincei, ✠, Uff. ✻, ♔, C. O. St. P. di Svezia. — *Roma, Botteghe Oscure, 24.*
12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.

Tocco (Felice), Professore nel R. Istituto di Studi superiori e di perfezionamento ecc., Uff. ✻, Comm. ♔, Uff. O. Sch. di S. I. di Portogallo, C. O. St. P. di Svezia, C. O. Aq. R. di Prussia.
12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.

Pigorini (Luigi), Direttore dei Musei Preistorico e Kircheriano, Professore nella R. Università di Roma. — *Via del Collegio Romano, 26.*
12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.

ACCADEMICI STRANIERI

Meyer (Paolo), Professore nel Collegio di Francia, Direttore dell'*École des Chartes* (Parigi). — 4 Febbraio 1883 - 15 febbraio 1883.

Tobler (Adolfo), Professore nell'Università di Berlino. — 3 Maggio 1891 - 26 maggio 1891.

Maspero (Gastone), Professore nel Collegio di Francia (Parigi). — 26 Febbraio 1893 - 16 marzo 1893.

Brugmann (Carlo), Professore nell'Università di Lipsia. — 31 Gennaio 1897 - 14 febbraio 1897.

Bréal (Michele Giulio Alfredo), Membro dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) (Parigi). — 29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Wundt (Guglielmo), Professore nell'Università di Lipsia. — 29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Foerster (Wendelin), Professore nell'Università di Bonn, Comm. ✻. — 12 Aprile 1898 - 14 maggio 1908.

Duchesne (Luigi), Direttore della Scuola Francese in Roma, Membro dell'Istituto di Francia. — 12 Aprile 1898 - 14 maggio 1908.

Saleilles (Raimondo), Professore nell'Università di Parigi. — 12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.

Jellinek (Giorgio), Prof. nell'Università di Heidelberg. — 12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.

CORRISPONDENTI

Sezione di Scienze Filosofiche.

Bonatelli (Francesco), Professore nella R. Università di Padova. — 15 Febbraio 1882.
Pinloche (Augusto), Prof. nel Liceo Carlomagno di Parigi. — 15 Marzo 1896.
Chiappelli (Alessandro), Prof. nella R. Università di Napoli. — 15 Marzo 1896.
Masci (Filippo), Professore nella R. Università di Napoli. — 14 Giugno 1903.
Zuccante (Giuseppe), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 31 Maggio 1908.
Ardigò (Roberto), Professore nella R. Università di Padova. — Id. id.

Sezione di Scienze Giuridiche e Sociali.

Rodriguez de Berlanga (Manuel) (Malaga). — 17 Giugno 1883.
Schupfer (Francesco), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 14 Marzo 1886.
Gabba (Carlo Francesco), Prof. nella R. Univ. di Pisa. — 3 Marzo 1889.
Buonamici (Francesco), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Pisa. — 16 Marzo 1890.
Dareste (Rodolfo), dell'Istituto di Francia (Parigi). — 26 Febbraio 1893.
Bonfante (Pietro), Prof. nella R. Università di Pavia. — 21 Giugno 1903.
Toniolo (Giuseppe), Prof. nella R. Università di Pisa. — 10 Giugno 1906.
Brandileone (Francesco), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Brini (Giuseppe), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Fadda (Carlo), Prof. nella R. Università di Napoli. — Id. id.
Filomusi-Guelfi (Francesco), Prof. nella R. Università di Roma. — Id. id.
Polacco (Vittorio), Prof. nella R. Università di Padova. — Id. id.
Stoppato (Alessandro), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Simoncelli (Vincenzo), Prof. nella R. Università di Roma. — Id. id.

Sezione di Scienze storiche.

Birch (Walter de **Gray**), del Museo Britannico di Londra. — 14 Marzo 1886.
Chevalier (Canonico Ulisse), Romans. — 26 Febbraio 1893.
Bryce (Giacomo), Londra. — 15 Marzo 1896.
Patetta (Federico), Prof. nella R. Università di Modena. — 15 Marzo 1896.
Gloria (Andrea), Prof. nella R. Università di Padova. — 21 Giugno 1903.
Venturi (Adolfo), Professore nella R. Università di Roma. — 31 Maggio 1908.
Luzio (Alessandro), Direttore del R. Archivio di Stato in Mantova. — Id. id.
Monticolo (Giovanni), Professore nella R. Università di Roma. — Id. id.

Sezione di Archeologia.

Lattes (Elia), Membro del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano). — 14 Marzo 1886.
Poggi (Vittorio), Bibliotecario e Archivista civico a Savona. — 2 Gennaio 1887.

Palma di Cesnola (Cav. Alessandro), Membro della Società degli Antiquari di Londra (Firenze). — 3 Marzo 1889.

Mowat (Roberto), Membro della Società degli Antiquari di Francia (Parigi). — 16 Marzo 1890.

Barnabei (Felice), Roma. — 28 Aprile 1895.

Gatti (Giuseppe), Roma. — 15 Marzo 1896.

Orsi (Paolo), Professore, Direttore del Museo Archeologico di Siracusa. — 31 Maggio 1908.

Patroni (Giovanni), Professore nella R. Università di Pavia. — Id. id.

Sezione di Geografia ed Etnografia.

Dalla Vedova (Giuseppe), Professore nella R. Università di Roma. — 28 Aprile 1895.

Porena (Filippo), Professore nella R. Università di Napoli. — 21 Giugno 1903.

Bellio (Vittorio), Professore nella R. Università di Pavia. — 31 Maggio 1908.

Bertacchi (Cosimo), Professore nella R. Università di Palermo. — Id. id.

Sezione di Linguistica e Filologia orientale.

Sourindro Mohun Tagore (Calcutta). — 18 Gennaio 1880.

Marre (Aristide), Vaucresson (Francia). — 1° Febbraio 1885.

Amelineau (Emilio), Professore nella *École des Hautes Études* di Parigi. — 28 Aprile 1895.

Salvioni (Carlo), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 31 Maggio 1908.

Lasinio (Fausto), Professore nel R. Istituto di studi superiori e di perfezionamento in Firenze. — Id. id.

Parodi (Giacomo (Ernesto), Professore nel R. Istituto di studi superiori e di perfezionamento in Firenze. — Id. id.

Schiaparelli (Celestino), Professore nella R. Università di Roma. — Id. id.

Teza (Emilio), Professore nella R. Università di Padova. — Id. id.

Sezione di Filologia, Storia letteraria e Bibliografia.

Del Lungo (Isidoro), Socio residente della R. Accademia della Crusca (Firenze). — 16 Marzo 1890.

Novati (Francesco), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 21 Giugno 1903.

Rossi (Vittorio), Professore nella R. Università di Pavia. — id. id.

Boffito (Giuseppe), Professore nel Collegio delle Querce in Firenze. — id. id.

D'Ovidio (Francesco), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Napoli. — id. id.

Biadego (Giuseppe), Bibliotecario della Civica di Verona. — id. id.

Cian (Vittorio), Professore nella R. Università di Pisa. — id. id.

Vitelli (Gerolamo), Professore nel R. Istituto di studi superiori e di perfezionamento in Firenze. — 31 Maggio 1908.

Flamini (Francesco), Professore nella R. Università di Padova. — Id. id.

Gorra (Egidio), Professore nella R. Università di Padova. — Id. id.

MUTAZIONI

AVVENUTE

nel Corpo Accademico dal 31 Dicembre 1907 al 31 Dicembre 1908.

ELEZIONI

SOCI

Graf (Arturo) . . . **Renier** (Rodolfo) . . **Sforza** (Giovanni) . .	Eletti per comporre la Commissione del premio Gautieri per la Letteratura (triennio 1905-1907). Adunanza del 19 gennaio 1908 della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.
Naccari (Andrea) . . **Spezia** (Giorgio) . . **Camerano** (Lorenzo) . **Grassi** (Guido) . . . **Somigliana** (Carlo) .	Eletti per comporre la Commissione del premio Vallauri per le scienze fisiche (quadr. 1907-1910). Adunanza del 23 febbraio 1908 della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.
Naccari (Andrea) . . **Camerano** (Lorenzo) . **Guareschi** (Icilio) . **Morera** (Giacinto . . **Renier** (Rodolfo) . . **De Sanctis** (Gaetano) **Chironi** (Giampietro) **Ruffini** (Francesco) .	Eletti per comporre la 1ª Giunta del premio Bressa (quadriennio 1905-1908), al quale sono solo ammessi scienziati ed inventori italiani. Adunanza dell'8 marzo 1908 a Classi Unite.

Jadanza (Nicodemo), Eletto delegato della Classe presso il Consiglio di Amministrazione dell'Accademia. Adunanza del 22 marzo 1908 della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

Guidi (Ignazio), Professore nella R. Università di Roma, eletto Socio Nazionale non residente nell'adunanza del 12 aprile 1908 della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche e approvata l'elezione con R. Decreto del 14 maggio 1908.

Tocco (Felice), Professore nell'Istituto di Studi superiori in Firenze. Id. id.

Pigorini (Luigi), Professore nella R. Università di Roma. Id. Id.

Foerster (Wendelin), Professore nella Università di Bonn, eletto Socio Straniero nell'adunanza del 12 aprile 1908 della Classe di scienze morali, storiche e filologiche e approvata l'elezione con R. Decreto del 14 maggio 1908.

Duchesne (Luigi), Membro dell'Istituto di Francia. Id. id.

Saleilles (Raimondo), Professore dell'Università di Parigi. Id. id.

Jellinek (Giorgio), Professore nell'Università di Heidelberg. Id. id.

Zuccante (Giuseppe), Professore di Storia della Filosofia nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano, eletto Socio corrispondente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di scienze filosofiche), nell'adunanza del 31 maggio 1908.

Ardigò (Roberto), Professore di Storia della Filosofia nella R. Università di Padova. Id. id.

Venturi (Adolfo), Professore di Storia dell'Arte nella R. Università di Roma, eletto Socio corrispondente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di scienze storiche), nell'adunanza del 31 maggio 1908.

Luzio (Alessandro), Direttore del R. Archivio di Stato in Mantova. Id. id.

Monticolo (Giovanni), Professore di Storia Moderna nella R. Università di Roma. Id. id.

Orsi (Paolo), Professore, Direttore del Museo Archeologico di Siracusa, eletto Socio corrispondente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Archeologia), nell'adunanza del 31 maggio 1908.

Patroni (Giovanni), Professore di Archeologia nella R. Università di Pavia. Id. id.

Bellio (Vittore), Professore di Geografia nella R. Università di Pavia, eletto Socio corrispondente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Geografia ed Etnografia), nell'adunanza del 31 maggio 1908.

Bertacchi (Cosimo), Professore di Geografia nella R. Università di Palermo. Id. id.

Salvioni (Carlo), Professore di Storia comparata delle lingue classiche neolatine nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano, eletto Socio corrispondente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Linguistica e Filologia orientale), nell'adunanza del 31 maggio 1908.

Lasinio (Fausto), Professore di lingue semitiche comparate nel R. Istituto di Studi superiori e di perfezionamento in Firenze. Id. id.

Parodi (Giacomo Ernesto), Professore di Storia comparata delle lingue classiche e neo-latine nell'Istituto di Studi superiori e di perfezionamento in Firenze. Id. id.

Schiaparelli (Celestino), Professore di Lingua e Letteratura araba nella R. Università di Roma. Id. id.

Teza (Emilio), Professore di Sanscrito e Storia comparata delle lingue classiche nella R. Università di Padova. Id. id.

Vitelli (Girolamo), Professore di Letteratura greca nel R. Istituto di Studi superiori e di perfezionamento in Firenze, eletto Socio corrispondente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Filologia, Storia letteraria e Bibliografia), nell'adunanza del 31 maggio 1908.

Flamini (Francesco), Professore di Letteratura italiana nella R. Università di Padova. Id. id.

Gorra (Egidio), Professore di Storia comparata delle letterature neo-latine nella R. Università di Pavia. Id. id.

Savio (sacerdote Fedele), fa passaggio nella categoria deì Soci nazionali non residenti (*Deliberazione della Classe presa nell'adunanza privata del 3 maggio 1908*).

MORTI

11 Aprile 1908.

Mayer (Cristiano Gustavo Adolfo), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di matematiche pure).

26 Agosto 1908.

Mascart (Eleuterio), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Fisica generale e sperimentale).

16 Settembre 1908.

Canonico (Tancredi), Socio nazionale non residente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

14 Dicembre 1908.

Brusa (Emilio), Socio nazionale residente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

PUBBLICAZIONI PERIODICHE RICEVUTE DALL'ACCADEMIA

Dal 1° Gennaio al 31 Dicembre 1908.

NB. Le pubblicazioni segnate con * si hanno in cambio;
quelle notate con ** si comprano; e le altre senza asterisco si ricevono in dono.

* **Aberdeen.** University. - Record of the Celebration of the Quatercentenary of the University of Aberdeen, 1907. — Records of the Sheriff Court of Aberdeenshire, vol. III. — Records 1642-1660 with Supplementary Lists of Official 1660-1907 and Index to vol. I, II, III. — The House of Gordon, vol. II. — Flosculi Graeci Boreales, sive Anthologia Graeca Aberdonensis, Ser. Nova. — Surgical Instruments in Greek and Roman Times. — Studies on Alcyonarians and Antipatharians.

* **Acireale.** R. Accademia di scienze, lettere ed arti degli Zelanti. Rendiconti e Memorie, serie 3ª, vol. IV (1094-1905).

Adelaide. Royal Society of South Australia. Transactions and Proceedings and Report, vol. XXXI.

* **Aix-en-Provence.** Bibliothèque de l'Université. Annales de la Faculté de Droit, T. I, N. 1-4 (1907); Annales de la Faculté de Lettres, T. I, N. 1-4 (1907).

* **Albuquerque.** University of New Mexico. Bulletin, Biological Ser., vol. III, art. 12. — Bulletin, Language Ser., vol. I, N. 1.

* **Amsterdam.** Académie Royale des Sciences. Verhandelingen Afd. Natuurkunde, 1e Sectie, Dl. IX, 4-7; 2e Sect., Dl. XIII, 1-9. — Verhandelingen Afd. Letterkunde, Nieuwe Reeks, Dl. VII; VIII, 3-5; IX, X, 1. — Verslage van de gewone vergaderingen der Wis- en Natuurkundige Afd. Van 26 Mei 1906 tot 26 April 1907, Dl. XV, 1stc, 2de gedeelte. — Proceedings of the Section of Sciences, vol. IX, 1st, 2nd part.; X. — Verslagen en Mededeelingen Afd. Letterkunde, 4e Reeke, Dl. VIII. — Zittingsverslagen, Afd. Natuurkunde. Vol. XVI. — Jaarbock 1906, 1907. — Prijsvers: Rufius Crispinus. Accedunt sex carmina laudata. — Ad Conventum Hagensem de Publica pace. Accedunt quatuor poemata laudata.

* — Société mathématique. Nieuw Archief voor Wiskunde: Tweede Reeks, Deel III, 3. Stuk. — Nieuw Opgaven, Deel X, N. 101-126.

— Wiskundig Genootschap. Nieuw Archief voor Wiskunde: Tweede Reeks, Deel VIII, 2. Stuk. — Wiskundige Opgaven, Deel X, 1-3. Stuk. — Index du répertoire bibliographique des sciences mathématiques. Nouvelle édition.

* **Angers**. Société d'études scientifiques; Bulletin. Nouvelle Sér., XXXVIe an., 1906.

* **Austin**. Texas Academy of Science-Transactions, vol. VI, VIII, IX.

* **Baltimore**. Johns Hopkins University. American Chemical Journall vol. XXXVII, Nos 2-6; XXXVIII, 1-6, XXXIX, 1-2. American Journa, of Mathematics, vol. XXIX, N. 1-3, XXX, 1. — American Journal of Philology, vol. XXVIII, N. 1-4. — Historical and Political Science. Ser. XXIV, N. 11-12; XXV, 1-12. Circular 1906, N. 10; 1907, N. 1-3, 5-9; 1908, 1.

* — Peabody Institute. 41. Annual Report. June I, 1908.

* **Basel**. Naturforschende Gesellschaft. Verhandlungen, Bd. XIX, Heft 2.

* — Catalogue des écrits académiques Suisses, 1906-1907; 1907-1908.

* **Bassano**. Museo Civico. Bollettino, anno IV, N. 4; V, 1-2.

* **Batavia**. Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. — Notulen, Deel XLV, 1907, Aflev. 2-4; XLVI, 1. — Tijdschrift voor indische Taal-, Land- en Volkenkunde, Deel L, Aflev. 2-6. LI, 1. — De Java-Oorlog van 1825-30 door E. S. De Klerck, 1908. 1 vol. 8°.

* — K. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indie. Natuurkundig Tijdschrift, Dl. LXVI, LXVII.

— Magnetical and Meteorological Observatory. Observations, vol. XXVIII (1905). — Appendix I-III, vol. XXVIII (1905). — Regenwaarnemingen in Nederlandisch-Indie 28stc Jargaang, 1906. — Over den Regenval op Java, 1879-1905.

* **Bergen**. Bergens Museum Aarbog 1907; Afhandlinger og Aarsberetning. 3die Hefte; 1908, 1, 2 Hefte. — Aarsberetning for 1907. — Étude sur l'ancien dialecte léonais d'après des chartes du XIII siècle par E. Staaff. — An account of the Crustacea of Norway, etc. G. O. Sars. Vol. V, Copepoda, part XXI-XXII.

* **Berkeley**. University of California. University of California Chronicle. An Official Record, vol. IX, N. 2-4 e Suppl.; 4 fasc. — Library Bulletin, N. 15. — College of Agriculture. Agricultural Experiment Station. Bulletin, N. 183-191. — American Archaeology and Ethnology, vol. II, N. 5; IV, 3-6; V, 1-2; VII, 1. — Botany, vol. II, 13-15. — Geology, vol. V, 6-11. — Pathology, vol. I, 8, 9. — Physiology, vol. III, 8, 9, 10. — Zoology, vol. III, 9-11, 13, 14; IV, 1-2.

* **Berlin**. K. Preussische Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte, 1907, N. XXXIX-LIII, 8°; 1908, N. I-XXXIV. Acta Borussica, Behördenorganisation, Bd. IV, 1. Hälfte, 1723-25; 2. 1726 29: Bd. IX, 1750-53, 3 vol. in-8°. — Das preussische Münzwesen im 18. Jahrhundert. Münzgeschichtlicher Teil, Bd. II, 1740-1755.

** — Historische Gesellschaft, Jahresberichte, XXIX. Jahrgang, 1906.

* **Berne**. Naturforschende Gesellschaft. Mitteilungen aus dem Jahre 1907, N. 1629-1664.

* **Beyrouth**. Université St.-Joseph. Revue catholique orientale mensuelle, 1904, 14; 1905, 11; 1908, an. XI, N. 1-12,

Blackburn. Stonyhurst College Observatory. Results of Meteorological and Magnetical Observations, 1907; 8°.

* **Bologna**. R. Accademia delle Scienze dell'Istituto. Memorie, ser. VI, T. IV (1907); 4°. — Statuto-Rendiconto, N. S., vol. XI (1906-1907); 8°. — Classe di Scienze morali. Regolamento. Sezione di Scienze storico-filologiche, ser. I, T. I. 1906-1907, fasc. 1-2; 4°. — Sezione di Scienze giuridiche, ser. I, T. I, 1906-1907, fasc. 1-2; 4°.

* — Società medico-chirurgica e Scuola medica. — Bullettino, 1907. Anno LXXVIII, ser. 8ª, vol. VII, fasc. 11, 12; vol. VIII, 1-6.

* — Osservatorio della R. Università. Osservazioni meteorologiche dell'annata 1906.

* — Biblioteca Comunale. L'Archiginnasio. Bullettino, anno II, N. 6; III, 1-5.

* **Bordeaux**. Société des sciences physiques et naturelles. Procès-verbaux des Séances. An. 1906-1907. — Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le Département de la Gironde de Juin 1906 à Mai 1907.

* — Universités du Midi. Annales de la Faculté des Lettres. Bulletin italien, T. VIII, 1908, N. 1-4. — Bulletin hispanique, T. X, 1908, N. 1-4. — Revue des études anciennes, T. X, 1908, N. 1-4.

* **Boston**. American Academy of Arts and Sciences. Proceedings, vol. XLII, 29; XLIII, 1-16.

* — Boston Society of Natural History. Proceedings, vol. XXXIII, N. 3-9.

— American Philological Association, 1906. Transactions and Proceedings. Vol. XXXVII.

* **Boulder Colo**. University of Colorado. Studies. Vol. V, N. 1.

* **Brescia**. Ateneo. Commentari per l'anno 1907.

* **Brooklyn**. Museum of the Brooklyn Institute of Arts and Sciences. Science Bulletin, vol. I, N. 11, 13.

* **Bruxelles**. Académie Royale de Belgique. Annuaire, 1908. — Bulletin de la Classe des sciences, 1907, N. 6-12; 1908, 1-5. — Bulletin de la Classe des Lettres et des Sciences morales et politiques et de la Classe des beaux-arts, 1908, N. 1, 2. — Mémoires, Collection in-4°, 2ème sér., T. I, fasc. 3-5. — Mémoires, Collect. in-8°, 2ème sér., T. II, fasc. 1, 2. — Biographie nationale, T. XVIII, fasc. 2, XXIX, 2.

* — Observatoire Royal de Belgique. Annuaire astronomique pour 1908. — Annales astronomiques. Nouvelle série, X, T. XI, fasc. 1. — Physique du Globe. Nouvelle sér., T. III, fasc. 3. — Annuaire météorologique pour 1908. — Annales météorologiques, N. sér., T. XX, fasc. 4, cahier 1-2.

* — Société d'Archéologie. Annales, T. XXI, livrs. 3-4; XXII, 1 et 2. Annuaire, T. XIX (1908).

* — Société des Bollandistes. Analecta Bollandiana, T. XXVI, fasc. 4; XXVII, 1-4.

* — Société Entomologique de Belgique. Annales, T. LI, 1907; Mémoires, XV, 8°.

* — Société Géologique de Belgique. Annales, T. XXXV, 2 livr.; XXVIII, 5e et dernière livr.

* — Société Belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie. Mémoires, T. XXI, fasc. 2-4. — Procès-Verbaux des séances 15 mai,

18 juin, 16 juiliet 1907; 17 février 1908. Clôture 1907. — Tables générales des matières des T. I-XX.

* **Bruxelles**. Société Belge de Microscopie. Annales, T. XXVIII, fasc. 2.

* — Société Paléontologique et Archéologique. Documents et rapports. T. XXIX.

* — Société Royale Zoologique et Malacologique de Belgique. Annales, T. XLI. An. 1906; XLII, 1907.

* **Bucarest**. Société des Sciences. Bulletin. Anul XVI, 1907, N. 5-6; An. XVII, 1908, N. 1-4; 8°.

* — Academici Romane Analele, T. XXIX (1906-1907). — Memoriile sectiunii stiintifice; Memoriile sect. Literare; Mem. sect. Istorice. — Partea administrativă și desbaterile. — Istoria romana de Titus Livius, T. III. — Catalogul manuscriptelor românești (Bibl. Acad. Române). — Documente Românesti reproduse după originale sau după fotografii sub supravegherea bibliotecarului Acad. Rom. T. I, fasc. 1 (1576-1629). — Discours et rapports officiels publiés par M. Dém. A. Sturdza, sécr. général. — Harta Agronomica a României. — Studiu asupra irigatiunilor in România. — Bibliografia românească veche 1508-1830. T. II, fasc. 3 (1769-1784).

* **Budapest**. K. Ungarische geologische Anstalt. Mitteilungen, XVI. Bd., Heft 2-4. — Jahresbericht für 1906. — Erläuterungen zur geologischen Spezialkarte der Länder der Ungar. Krone. Bl. Zone 20, kol. XXVIII (1 : 75.000).

* — Ungarische geologische Gesellschaft. Földtani közlöny (Geologische Mitteilungen), XXXVII. Kötet, 1907, 9-12; XXXVIII, 1908, N. 1-10.

* **Buenos Aires**. Sociedad Científica Argentina. Anales, T. LXIV, Entrega II-VI; LXV, 1-6; LVI, 1.

* — Museo Nacional. Anales, Ser. III, T. IX.

* — Direction générale de la Statistique municipale. Annuaire de la Statistique. Bulletin mensuel de Statistique de la Ville de Buenos-Ayres, XXI^me^ an., 1907, N. 11-12; XXII^me^, 1908, N. 1-10.

* **Cagliari**. Università. Annuario scolastico 1907-1908.

* **Calcutta**. Asiatic Society of Bengal. Bibliotheca Indica. Collection of Oriental Works. New Series, N. 1149, 1151, 1154, 1163-1167, 1172, 1174-1178, 1180, 1181.

— Imp.^e^ Department of Agriculture. Report for the years 1905-1906, a. 1906-07; 8°.

* — Geological Survey of India. Record, vol. XXXVI, p. 2-4; XXXVII, 1. — Memoirs, ser. XV, vol. I, p. 1; vol. V, p. 2, 3.

— Survey of India. A Sketch of the Geography and Geology of the Himalaya Mountains and Tibet. Part I-III, 1907; 4°.

* **California**. V. Berkeley. — V. San Francisco.

* **Cambridge** U. S. A. Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Annual Report, 1906-1907; 1907-1908. — Bulletin, vol. XLVIII, N. 4; XLIX, 5-7; LI, 7-12; LII, 1-6; LIII, 2. — Memoirs, vol. XXVI, 6.

* — Cambridge Philosophical Society. Proceedings, vol. XIV, p. 4-6. — Transactions, vol. XX, N. 15-16; XXI, 1-6.

Canada. V. Ottawa.

* **Cape Town.** South African Philosophical Society. Transactions, vol. XIII, p. 547-752; XVII, p. 2ª; XVIII, p. 2-3, 1907-1908.

Cape of Good Hope. Geodetic Survey of South Africa. Vol. V. Report on the Geodetic Survey of the Transvaal and Orange River Colony; London, 1908, 1 vol., 4°.

* **Catania.** Accademia Gioenia di scienze naturali. Bollettino delle sedute, fasc. 1-4. — Atti, an. 1907, ser. 4ª, vol. XX.

* — Società degli Spettroscopisti italiani. Memorie, vol. XXXVII (1908), disp. 1-11.

* **Chambéry.** Société Savoisienne d'histoire et d'archéologie. T. XLV fasc. 2-4.

Charlottenburg. Physikalisch-technische Reichsanstalt. Die Tätigkeit im Jahre 1907, 8°.

* **Chicago.** John Crerar Library. 13° Annual Report for the year 1907.

* — Field Columbian Museum. Publications: Botanical ser. vol. II, 6; Geological ser. vol. II, No. 10; III, 6; Ornithological ser. vol. I, 3; Zoological ser., vol. VII, 4, 5.

* **Christiania.** Videnskabs-Selskabet i Christiania: Skrifter. I. Mathematisk-naturvidenskabelig Klasse 1906, 2det Bd.; 1907. 2 vol., 8°. Forhandlinger, Aar 1907.

* **Cincinnati.** Lloyd Library of Botany, Pharmacy and Materia medica. Bulletin N. 9. — Mycological Notes, N. 24-26. — The Nidulariaceae or " Bird's-nest Fungi ". — The Phalloids of Australasia.

* **Cividale** del Friuli. Museo Civico. Bollettino, anno III, fasc. 3-4; IV, 1.

* **Colorado Springs.** Colorado College Publication. Language Ser., vol. II, 26. — Sciences Ser., vol. XI, N. 51-53; XII, 1.

* **Copenhague.** Académie R. des sciences et des lettres de Danemark. Bulletin (Oversigt), 1907, N. 5, 6; 1908, 1-5. — Mémoires. 7ème sér. Section des Sciences, T. IV, N. 5; V, 2; VI, 1, 2.—Section des Lettres, T. I, N. 2.

* **Cracovie.** Académie des Sciences. Classe des sciences mathématiques et naturelles: Bulletin international, 1907, mai-décembre, N. 4-10; 1908, janvier-mai, 1-8. — Classe de philologie. Classe d'histoire et de philosophie: Bulletin international, 1907, mai-décembre, N. 5-10; 1908, janvier-avril, 1-5. — Jakób Strepa Arcybiskup Halicki 1391-1409. — Materyaly i prace, T. II, zeszyt 3. — A. Prochaska, Król Wladyslaw Jagiello, T. I, II, 1908; 8°. Catalogue of Polish scientific leterature, T. VII, zeszyt 3, 4, 1907.

* — Rozprawy wydziatu matematyczno-przyrodniczego. Nauki matematyczno-fizyczne, Ser. III, A, T. VI (1906); T. VII (1907). — Nauki biologiczne, Ser. III, B, T. VI (1906), VII (1907). — Rozprawy wydziatu filologiczny, Ser. II, T. XXVII, XXIX. — Rozprawy wydziat historyczno-filozoficzny, Ser. II, T. XXV. — Literatura Aryańiskaw polsce 1560-1660 napisat Tadeusz Grabowski. — Kościoly Lubelskie na podstawie zródet Archiwalnych skresit ks. Jan Ambroży Wadowski. — Materyaly i prace komisyi jezykowej. T. II, zeszyt 2; III, 3,

Danzig. Naturforschende Gesellschaft. N. F. 12. Bd., 2. Heft.

* **Dorpat**. Imp. Universitatis Jurievensis (olim Dorpatensis) Acta et Commentationes, T. XV (1907), 1-3, 5-9.

* **Dublin**. Royal Irish Academy. Proceedings, vol. XXVII, Section A, N. 4-9; vol. XXVII, Sect. B, 1-5; vol. XXVII, Sect. C, N. 1-8 and Appendix.

— R. Dublin Society. Economic Proceedings, vol. I, p. 12. — Scientific proceedings, vol. XI (N. S.), 21-28.

Edinburgh. Edinburgh Geological Society, vol. IX, p. 2.

* — Royal Physical Society. Proceedings, vol. XVII, N. 4.

* — Royal Society. Proceedings, Session 1897-98. Vol. XXVIII, part 1-9; XXIX, 1. — Transactions, vol. XLV, p. 4, Sess. 1905-06, 1906-07; XLVI, p. 1, Sess. 1907-08.

* — Royal Scottish Society of Arts. Transactions, vol. XVIII, p. 1, 2, 1908.

* **Firenze**. R. Accademia della Crusca. Anno accademico 1906-1907. Adunanza pubblica del 12 gennaio 1908. Firenze, 1908; 8°.

* — R. Accademia economico-agraria dei Georgofili di Firenze. 5ª serie, Vol. IV, disp. 4ª; V, 1ª-4ª; 8°.

* — R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento. Sezione di scienze fisiche e naturali: Raccolte Planctoniche fatte dalla R. Nave " Liguria ", vol. I, fasc. IV. — Osservazioni astronomiche fatte all'Equatoriale di Arcetri nel 1907 da A. Abetti, fasc. 25.

* **Frankfurt am Mein**. Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft. Abhandlungen, Bd. XXX, 3. — Bericht, 1907. — Festschrift zur Erinnerung an die Eröffnung des neuerbauten Museums, am 13. Oktober 1904.

* **Freiburg i. Br**. Naturforschende Gesellschaft. Berichte, XVII. Bd., 1 Heft.

* **Gap**. Société d'Études des Hautes-Alpes. Bulletin, 3ème Sér., 3ème et 4ème trimestre 1907; 1er et 2ème trimestre 1908.

" **Genève**. Société de Physique et d'Histoire naturelle. Mémoires, Vol. XXXV, fasc. 4.

* **Genova**. Museo civico di Storia naturale. Annali, 1907-1908, Vol. XLIII.

* — Società di letture e conversazioni scientifiche. Rivista ligure di scienze, lettere ed arti. An. XXX, 1908, 1-6.

* **Göttingen**. K. Gesellschaft der Wissenschaften. Matematisch-physikalische Klasse: Abhandlungen, N. F., Bd. VI, 1-3; VII, 1, 2. — Nachrichten, 1907, N. 4; 1908, 1-3. — Philologisch-historische Klasse: Abhandlungen, N. F., Bd. X, 1, 3-5; XI, 1. — Nachrichten, 1907, N. 3; 1908, 1-5. — Nachrichten, Geschäftliche Mitteilungen, 1906, N. 2; 1907, Heft 2; 1908, 1-2.

* **Granville Ohio**. Scientific Laboratory of Denison University. Bulletin, vol. XIII, Art. 1, 4-6.

Groningen. Jaarboek der Ryksuniversitet 1906-1907.

* **Habana**. Academia de Ciencias Médicas, Físicas y Naturales. Anales, Revista cientifica, T. XLIV, 1907-1908; T. XLV, 1908, junio-octubre.

Halifax (Nuova Scozia). Nova Scotia Institute of Science Proceedings and Transactiens, XI, 3, 4; XII, 1.

Halle a. S. Academiae Caesareae Leopoldinae-Carolinae Germanicae. Nova Acta, T. LXXIII-LXXXV-LXXXVII; 4°. — Leopoldina. XLII, 1906; 4°.

* **Harlem.** Société hollandaise des sciences. Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. Sér. II, T. XIII, 1-5. — Œuvres complètes de Christiaan Huygens. T. XI. Travaux mathématiques 1645-1651. — Natuurkundige Verhandelingen, Deel VI, 3-4 stuk.

* — Musée Teyler. Sér. II, Vol. XI, 1ère-2ème partie.

Heidelberg. 272 Tesi di laurea dell'Università per l'anno 1906-1907.

* **Helsingfors.** Meteorologische Zentralanstalt. Meteorologisches Jahrbuch für Finland. Bd. I (1901); Observations météorologiques 1897-1898; 4°.

Hermannstadt. Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften. Verhandlungen und Mitteilungen, LVII. Bd. Jahrg. 1907.

* **Jena.** Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft. Denkschriften, Bd. IV, 6; VI, 2, 4; VII, 4. Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, N. F., XXXVI. Bd., Heft 2-4; XXXVII. 1.

* **Kasan.** Société Physico-Mathematique; Bulletin, T. XV, 4; XVI, 1.

* **Kiel** und **Leipzig.** Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchungen der deutschen Meere in Kiel und der Biologischen Anstalt auf Helgoland. Wissenschaftliche Meersuntersuchungen. N. F., VIII. Bd., Abth. Helgoland, Heft 2, 1906; X. Bd. Abth. Kiel; Observations météorologiques, 1897-1898; 4°.

Kodaikanal. Observatory. Bulletin, N. XII-XIII.

— and **Madras.** Observatories. Annual Report of the Director for 1907.

* **Lawrence.** University of Kansas. Science Bulletin, vol. IV, N. 1-6.

* **Leipzig.** K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-physische Klasse: Berichte über die Verhandlungen, 1907, IV; 1908, I-V. — Abhandlungen, XXX. Bd., N. IV. — Philologisch-historische Klasse: Berichte über die Verhandlungen, 1907, IV-V; 1908, I-III. — Abhandlungen, XXVI, N. 2.

* — Verein für Erdkunde. Mitteilungen 1907; 8°.

— Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft. Jahresbericht, 1907.

* **Liège.** Société Royale des Sciences. Mémoires, 3ème sér., T. VII.

* — Société Géologique de Belgique Annales, T. XXXIV, livrs. 2, 3; XXXV, 1. — Mémoires, T. XXV *bis* (T. I, des Mémoires, in-4°), 3ème livraison.

Lima. Ministerio del Fomento del Perú. Boletin del Cuerpo de Ingenieros de Minas. N. 50, 53 62.

* **Lisbona.** Commission du service Géologique du Portugal. Essai sur la tectonique de la chaîne de l'Arrobida par Paul Choffat. — Le Néogène continental dans la basse vallée du Tage (Rive droite). 1e partie: Paléontologie, par Fr. Roman et Fliche; 2e partie: Stratigraphie, par Antonio Torres. — Système silurique du Portugal. Étude de Stratigraphie paléontologique.

— Société portugaise de sciences naturelles. Bulletin, vol. I, N. 1-4.

* **London.** British Museum (Natural History). National Antartic Expedition 1901-1904. Natural History: Vol. I, Geology; II, Zoology; III, Zoology and Botany; 3 vol. in-4°. — A Monograph of the Culicidae or Mosquitoes by Fr. V. Theobald, vol. IV; in-8°. — Guide of the Great Game Animals (Ungulata) in department of Zoology, in-8°. — Guide

to the fossil invertebrate Animals in the department of Geology and Palaeontology; in-8°. — List of British Seed-Plants and Ferns. Department of Botany: fasc. in-8°. — Special Guides, N. 3. Memorial of Linnaeus; 1 fasc. in-8°. — Guide to the Specimens Horse Family (Equidae); 1 vol. 8°. — Guide to the exhibited Series of Insects; 1 vol. 8°. — A Guide Elephants (Recent and Fossil); 1 vol. 8°. — Guide to the Gallery of Fishes; 1 vol. 8°. — A Guide to the Domesticated Animals (other than Horses); 1 vol. 8°.

London. National Antartic Expedition 1901-1904. Natural History, vol. IV, Zoology (Various invertebrata), 1908 (dal British Museum).

* — Royal Institutions of Great Britain. Proceedings, vol. XVIII, part 2.

* — R. Astronomical Society. Monthly Notices, vol. LXVIII, N. 2-8, 9 suppl. numb. LXIX, N. 1. — Memoirs, vol. LVI.

* — Chemical Society. Journal, 1907, Suppl. number index, vol. XCI-XCII (Part I-II); XCIII-XCIV, 1908; January-December, 1908. — Proceedings, vol. XXIII, N. 319-334, January-December 1907; XXIV, N. 335-349.

* — Geological Society. The history of the Geological Society by Horace B. Woodward, 1907; 8°. — Quarterly Journal, vol. LXIV, p. 1-4, N. 253-256. — Geological literature..... during the Year ended December 31st., 1907.

* — Royal Society of Literature. Transactions, 2nd ser., vol. XXVIII, p. 1-3.

* — Linnean Society. List of the Linn. Soc. 1908-1909. Proceedings, 120th Session. From Novemb. 1907 to June 1908. Journal. Botany, vol. XXXVIII, N. 265-267. — Transactions, Botany, vol. VII, p. 6-8. — Journal Zoology, vol. XXX, 198; vol. XXXI, 203-204. — Transactions, Zoology, vol. IX, p. 12-14; X, 8; XII, 1-3.

* — Royal Microscopical Society. Journal, 1908, part 1-5.

* — Royal Society. Proceedings, Series A (Mathematical and Physical sciences), vol. **80**, N. 536-542; **81**, N. 543-549. — Ser. B (Biological sciences), vol. **80**, N. 536-543. — Philosophical. Transactions, Ser. A (Containing papers of Mathem. or physical Character), vol. 207. — Ser. B (Containing papers of a Biological character), vol. 199. — Year-Book, 1908, N. 12. — National Antartic Expedition 1901-1904. — Meteorology. Part I, 1908, 1 vol. 4°.

— Royal Society. *International Catalogue of Scientific literature.* (Fifth and Sixth annual issue): **A.** Mathematics; **E.** Astronomy; **J.** Geography; **L.** General Biology; **M.** Botany; **N.** Zoology, P. I. H.

— National Antartic Expedition 1901-1904. Physical Observations with discussions by various Authors. Part II, 1908; 4°. Album of Photographs and Sketches with a Portafolio of Panoramic Wiews. 2 vol. 4° (dalla Royal Society).

* — Zoological Society. Proceedings, 1907, pp. 747-1121 containing papers in November and December; 1908, pp. 1-782, part. 1, II January and June, 1908. — Transactions, vol. XVIII, p. 2 3. — List of the fellows, 1908.

* **Louvain**. Université catholique. Annuaire 1908. — Programme des cours de l'année académique 1907-1908. — H. Van de Weerd, Étude historique sur trois légions romaines du Bas-Danube. Louvain, 1907. — L. Van der Essen, Étude critique et littéraire sur les Vitae des Saints Mérovingiens de l'ancienne Belgique. Louvain, 1907. — Chr. Baur, St. Jean Chrysostome et ses œuvres dans l'histoire littéraire. Louvain, 1907. — C.-F.-X. Smits. De Kathedraal van's Hertogenbosch. Bruxelles, 1907. — Bibliographie, 3e Supplément.
* **Luxembourg**. Institut Grand-Ducal. Archives trimestrielles, N. S., T. II et III, an. 1907 et 1908.
* **Lyon**. Société d'Agriculture, sciences et industrie. Annales, 1906.
* — Société Linnéenne. Annales, 1907 (Nouvelle Sér.), T. LIV.
* — Université. Annales, Nouvelle Série: I. Sciences, Médecine, fasc. 20, 21, 23. — II. Droit, Lettres, fasc. 19.
* — Diocèse de Lyon. Bulletin historique, 8e année, N. 48-53.
* **Madison** Wis. Wisconsin Academy of Sciences, Arts and Lettres. Transactions, vol. XV, part I, 1904.
* — Wisconsin Geological and Natural history Survey. Bulletin, XV-XVIII: Economic Series, N. 10-11. — Scientific Series, N. 4, 5.
* **Madrid**. Instituto Central Meteorológico. Resumen de las observaciones meteorológicas efectuadas en la penisula y algunas de sus islas adyacentes durante el año 1906. Madrid, 1908.
* — R. Academia de la Historia. Boletin, T. LII, cuad. 1-6; LIII, 1-6.
* — R. Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales. Anuario, 1908. — Revista, T. VI (1907), N. 1-12; VII, 1-3.
* **Marseille**. Faculté des Sciences. Annales, T. XVI avec deux supplements.
* **Messina**. R. Accademia Peloritana. Atti, vol. XXII (1907), fasc. 1° e 2°. — Resoconti delle tornate delle Classi (marzo e giugno 1907).
* **Mexico**. Sociedad Científica “ Antonio Alzate „. Memorias y Revista, T. XXIV, N. 10-12; T. XXV, 1-3; T. XXVI, 1-9.

— Observatorio astronómico nacional de Tacubaya. Anuario para el año de 1908; 16°.

— Observatorio Meteorológico Magnético Central. Boletin mensual: 1903, Mayo-Diciembre; 1904, Enero-Marzo, Octubre; 1907, Julio-Diciembre; 1908, Enero-Julio.

* **Milano**. R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti, Ser. II, vol. XL, fasc. 19, 20; XLI, 1-17. — Memorie: Classe di scienze matematiche e naturali, vol. XX, fasc. 10. — Classe di lettere, scienze morali e storiche, vol. XXI, fasc. 7. Atti della fondazione Cagnola, vol. XX (1906-1907).
* — R. Osservatorio di Brera. Pubblicazioni. N. XL, parte III, Al-Battānī sive Albatenii opus astronomicum. — XLIV. Determinazione (1906) della latitudine della torre della R. Università di Pavia. — XLII. Determinazioni di Azimut e di latitudine eseguite nel 1885 nella Stazione astronomica di Termoli. — Anno 1909. Articoli generali del Calendario ed Effemeridi del Sole e della Luna per l'orizzonte di Milano. Con appendice.

Milano. Società Italiana di scienze naturali e Museo Civico di storia naturale. Atti, vol. XLVI, fasc. 3°, 4°; LVII, 1°, 2°.

* — Città di Milano. Bollettino statistico mensile, Dicembre 1907. — Notizie riassuntive dell'anno 1907, Gennaio-Ottobre 1908. — Dati statistici a corredo del Resoconto dell'Amministrazione comunale, 1901, 1903, 1906, 1907.

* — Raccolta Vinciana; fasc. 4°.

* **Modena**. R. Biblioteca Palatina. Elenco dei doni, 1902-1907; 16°.

Monaco. Institut Océanographique. Bulletin. N. 109-125. Resultats des campagnes scientifiques accomplies sur son Yacht par Albert 1er Prince souverain de Monaco; fasc. XXXIII.

* **Moncalieri**. Osservatorio del R. Collegio Carlo Alberto. Bollettino meteorologico e geodinamico, Ottobre-Dicembre 1907 e Gennaio-Novembre 1908.

* **Montecorona**. Congregazione Camaldolese degli Eremiti. Monografie di storia benedettina, vol. I.

* **Montevideo**. Museo Nacional. Anales, vol. VI. — Flora Uruguaya. T. III, entr. 3.

— Observatorio Nacional Físico Climatológico. Boletin, N. 55-60, 64 66.

* — República Oriental del Uruguay. Anuario estadístico. Años 1904 á 1906. T. II.

Montpellier Académie des sciences et lettres. Mémoires IIe Sér., Section des Sciences, T. III, 8; Section de médecine, II, 3; Section des lettres, T. V, 1.

* **Moscou**. Société Impér. des Naturalistes. Bulletin, An. 1906, N. 3-4; 1907, 1-3.

* — Observatoire météorologique et magnétique de l'Université Impériale. Beobachtungen... im Jahre 1903-1904. — Meteorologische Beobachtungen in Moskau, im Jahre 1905-1906.

* **München**. K. Bayerische Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-physikalische Klasse: Sitzungsberichte, 1907, Heft 3; 1908, 1. — Philosoph.-philologische und historische Klasse: Sitzungsberichte, 1907, N. 3; 1908, Abhand., 1-6.

* — Ornithologische Gesellschaft in Bayern, 1906, Bd. VII.

* **Nancy**. Académie de Stanislas. Mémoires, 1906-1907, 6e Sér., T. IV.

* **Nantes**. Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France. Bulletin, 2e Sér., T. VII, 3e et 4e trimestres, 1907; VIII, 1er et 2e trim. 1908.

* **Napoli**. Società Reale. Annuario 1908. — Accademia delle scienze fisiche e matematiche. Rendiconti, Ser. 3a, vol. XIII, fasc. 8-12 (1907); vol. XIV (1908), fasc. 1-7; 8°. — Atti, vol. XIII; in-4°. — Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti. Rendiconto, N. S., An. XXI (1907), Maggio-Dicembre e appendice. — Atti, vol. XXV (1908); 4°.

* — Accademia Pontaniana. Atti, vol. XXXVII.

* — R. Istituto d'Incoraggiamento. Atti, Ser. VI, 1907, vol. LIX.

* — Società di Naturalisti. Bollettino, vol. XXI (Ser. II, vol. I), 1907; 8°.

— Museo Zoologico della R. Università. Annuario, N. S., vol. II (1906-1908); 8°.

* — Zoologische Station. Mittheilungen, 18. Bd., 4. Heft. Berlin, 1908, 19, 1.

* **Neuchâtel**. Société Neuchâteloise des sciences naturelles. Bulletin, T. XXXIII, An. 1904-1905; XXXIV, 1905-1906.

* **New-York.** American Association of Genito-Urinary Surgeons. Transactions, vol. II.

* — American Mathematical Society. Bulletin, vol. XIV, 4-10; XV, 1-3. — Transactions, vol. IX, 1, 3, 4. — Annual Register, January, 1908.

* — New York Public Library Astor, Lenox and Tilden Foundations. 1908, N. 1-11.

Nürnberg, Naturhistorische Gesellschaft. Abhandlungen, XVII Bd.; Mitteilungen, I Jahrg. 1-6 (1907); II, 1 (1908); Beigabe zum XVII Bd. der Abhandl. Dr. Jos. Reindl, Siegmund Günther; 8°.

Oberlin (Ohio). Wilson Ornithological Club. Wilson Bulletin, N. Ser., vol. XIV, N. 4; XX, N. 1, 3.

* **Ottawa**. Royal Society of Canada. Proceedings and Transactions, 2nd ser., vol. XII, suppl. volume Meeting of May, 1906. — General Index Proceedings and Transactions. First and Second Series, 1882-1906. — Proceedings and Transactions. Third Series, vol. I.

* — Geological Survey of Canada. Annual Report (N. S.), vol. XVI (Text and Atl.), 1904. — General Index to Reports, 1885-1906. — Section of Mines-Annual on the Mineral Industries of Canada for 1905. — Numbers 949, 953, 958, 968, 977, 979, 982, 986, 988, 992, 996, 1017, 1028.

— Minister of the Interior Canada's Fertile Northland. Ottawa, 1907, 2 vol. 8° (Text a. Maps) (dono di S. E. Fr. Oliver Minister of the Interior).

Osaka. Observatory. Report on Omori horizontal pendulum. Seismograph Observations... for the two Years 1906-1907; 8°.

* **Padova**. R. Accademia di scienze, lettere ed arti. Atti e Memorie, N. S., vol. XXIII.

* — Accademia scientifica Veneto-Trentino-Istriana. Atti, N. S., An. V, fasc. 1°; 3ª serie, anno I.

* — Museo Civico. Bollettino, anni I-IV, 1-6 (1898-1901) (dono del socio Renier); IV, 7-12: V, IX, X, 1-6, 1901, 1902, 1906-1907, 8°; XI (1908), 1-3.

* — R. Università degli studi. Annuario per l'anno accademico 1907-1908.

* **Palermo.** R. Accademia di scienze, lettere e belle arti. Atti, 3ª serie, vol. VIII (anni 1904-05-06-07).

* — Circolo Matematico. Annuario 1906. — Rendiconti, T. XXV (1908), fasc. 1-3; XXVIII, 1-3. — Supplemento ai Rendiconti: Estratti dai verbali delle adunanze, vol. II, An. 1907, N. 5-6; III, An. 1908, 1-4. — Indici delle pubblicazioni, N. 1, 1908, I. — Indice dei Rendiconti, T. I-XXVI (1887-1908). — II. Indice del supplemento, vol. I-III (1906-1908).

— Collegio degli Ingegneri ed Architetti. Atti, 1907, 1908; 8°.

* **Parà**. Museu Gœldi (Museu Paraense) de historia natural e ethnographia. Boletin, vol. V, 1.

Paris. Ministère de l'Instruction Publique. Œuvres complètes d'Augustin Cauchy. 1ª ser., T. II. — Catalogue des Thèses et Écrits académiques, XXIII fasc. Année scolaire 1906-1907.

— Ministère de l'Instruction Publique. Inventaire Sommaire des Archives communales et départementales antérieures à 1790: *Haute-Vienne*, Archives ecclésiastiques, Sér. G, T. I. Évêché de Limoges et Chambre ecclésiastique. — *Ile-et-Vilaine*, Ville de Saint-Servan. — *Indre*, Sér. G,

Archive ecclésiastique. Clergé séculier. — *Loiret*, Ville d'Orléans. — *Nord*, Deûlémont. — *Nord*, Ville de Cambrai. — *Vaucluse*, Ville d'Avignon. — Inventaire Sommaire des Archives communales et départementales postérieurs à 1790. Période révolutionnaire. — *Calvados*, Sér. L, T. I; Sér. L, Suppl., T. I, Ville de Condé-sur-Noireau.

Paris. Ministère des Travaux Publics. Annales des Mines, 2e Sér. T. XII, 9-12 livrs., 1907; T. XIII, 1-6 livrs., 1908.

** — Bureau des Longitudes. Annuaire pour l'an 1908, 1909; 16°.

* — Bureau international des Poids et Mesures. Travaux et Mémoires, T. XIII.

* — École Polytechnique. Journal. IIe sér., 12ème cahier, 1908.

* — Société Nationale des Antiquaires de France. Mettensia, V. Mémoires et documents, fasc. supplémentaire, fasc. 2, 3. — Bulletin, 3e et 4e trimestre 1907; 1r-3e trimestre 1908. — Mémoires, 1907, 7e sér., T. VII.

** — Société Anatomique. Bulletins et Mémoires, 1908, 1.

* — Institut de France. Annuaire pour 1908.

** — Institut de France. Académie des sciences. Comptes rendus hebdomadaires. Paris, T. CXLVI, CXLVII. — Académie des sciences morales et politiques.

* — Musée National d'histoire naturelle. Bulletin, An. 1907, N. 6, 7; 1908, 1-5. — Nouvelles Archives, 4e sér., T. IX, 2e fasc.; X, 1er.

* — Musée Guimet. Revue de l'histoire des religions, T. LV, 1-2; LVI, 1-3; LVII, 1. — Bibliothèque d'études. T. XIX, XXIV.

* — Société de Géographie. La Géographie, Bulletin, 1907, vol. XVI, N. 1-6; 1908, vol. XVII, 1-6.

* — Société Géologique de France. Bulletin, 4e Sér., T. VI (1906), N. 8, 9; T. VII (1907); VIII. 1, 2 (1908).

** — Tables générale et analitique des volumes I-XIV, 1e Sér.; I-XXIX, 2e Sér.; I-XX, 3e Sér. (1830-1892), 4 vol. in-8°.

* — Société Mathématique de France. Bulletin, T. XXXVI, fasc. 1-4.

* — Société Philomatique. Bulletin, Nouv. Sér., T. IX, N. 6; X, 1-4.

* — Société de Spéléologie Spelunca. Bulletin et Mémoires, T. VII, N. 50-53,

* — Société Zoologique de France. Bulletin, T. XXXI, N. 1-5; XXXII. — Mémoires, An. 1906, T. XIX; 1907, XX.

* **Pavia.** Società Pavese di Storia patria. Bollettino, An. VII (1907), fasc. 4°; An. VIII (1908), fasc. 1-2.

* **Perugia.** R. Deputazione di Storia patria per l'Umbria. Bollettino, An. XIII, fasc. 2-3; XIV, 1.

* **Philadelphia.** Academy of Natural Sciences. Journal, 2nd Ser., vol. XIII, p. 3. — Proceedings, vol. LIX, p. II, III, 1907.

* — American Philosophical Society. Proceedings, vol. XLVI, N. 185-187. — Transactions, vol. XXI, New Ser., p. IV-V.

* **Pisa.** Società Toscana di scienze naturali. Atti. Processi verbali, 17 novembre 1907; 5 luglio 1908, vol. XVII. — Memorie, vol. XXIII, XXIV.

* — R. Università. Annuario per l'anno accademico 1907-1908. — Annali delle Università Toscane, T. XXVII; 4°.

* **Portici.** Regia Scuola Superiore di Agricoltura. Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e Agraria, vol. I, II. — Contribuzione alla conoscenza degli insetti dannosi all'olivo e di quelli che con essi hanno rapporti. Portici, 1908; 8°.

* **Porto.** Academia Polytechnica. Annaes scientificos, vol. II, N. 4; III, 1-2.

Potsdam. K. Preussisches Geodätisches Institut. Veröffentlichung, N. F., 34, 36, 38. — Comptes rendus des séances de la XV[e] conférence générale de l'Association Géodésique internationale réunie à Budapest.

— Zentralbureau der internationalen Erdmessung. N. F. der Veröffentlichungen N. 16. — Verhandlungen der vom 20. bis 28 September 1906 in Budapest abgehaltenen 15[en] allgemeinen Conferenz der Internationalen Erdmessung; 4°.

* **Prag.** Ceska Akademie Císaře Frantiska Josefa I. Almanach. — Bulletin international. Résumé des travaux présentés. Classe des sciences mathématiques, naturelles et de la médecine, XI[e] An. (1906). — Rozpravy, Třida II (Mathematiko-přirodnicka), Ročnik XVI (1907). — Rozpravy, Třido I, Cislo 37. — Věstnik, Roč. XIV (1907). — Sbírka pramenův. Skupina II, Cislo 10. — Archiv pro Lexikografii a dialektologii..... Cislo 7. Dialekticky Slovnik Chodsky. — Bibliographie České Historie. Svazck I. — Katalog Českých rukopisů C. K. verejné a Universitni knihovny prazské. — Všeobecná Botanika. Srovnávaci morfologie. Dil I, II. — Anatomie a fysiologie rostlin. Část pruni. — Filosofická bibliotheka. Rada I, Cislo 1.

* — K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften. Jahresbericht für das Jahr 1907.— Sitzungsberichte der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Classe, 1907. — Neue Untersuchungen über die Reifung und Befruchtung.

— K. K. Sternwarte: Magnetische und Meteorologische Beobachtungen... im Jahre 1907.

Pretoria. Transvaal. Meteorological Department. Annual Reports for the Year ended 30th June, 1907; 8°.

* **Pusa.** Agricultural Research Institute. Memoirs of the Department of Agriculture in India. — Botanical Series, vol. II, N. 3-5. — Chemical Series, vol. I, N. 6. — Entomological Series, vol. I, N. 6; vol. II, 1-6.

* **Rennes.** Société scientifique et Médicale de l'Ouest. Bulletin, An. 1906, T. XV, 4; 1907, T. XVI, N. 1-4; XVII, 1.

* **Riga.** Naturforscher-Verein. Arbeiten. N. F., Elftes Heft.

* **Rio de Janeiro.** Biblioteca Nacional. Itinerario e trabalhos da Commissão de estudos da estrada de ferro do Madeira e Mamoré, etc. Rio de Janeiro, 1885; 8°. — Relatorio apresentado ao Presidente da Republica dos Estados Unidos do Brazil pelo Ministro de Estado du Justiça e Negocios Interiores. Rio de Janeiro, 1907; 2 vol. in-8°.

Rio de Janeiro. Observatorio. Boletim mensal, Janeiro-Junho, 1907.

* **Roma.** Senato del Regno. Catalogo metodico degli scritti contenuti nelle pubblicazioni periodiche italiane e straniere possedute dalla Biblioteca. V Suppl. Roma, 1907; 1 vol. 8°. — Bollettino delle pubblicazioni di recente acquisto. Anno 1907, N. 5-6, Settembre-Dicembre; 1908, N. 1.

* **Roma**. Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio. Direzione generale della Statistica. Statistica giudiziaria penale per l'anno 1904. — Movimento della popolazione secondo gli Atti dello Stato civile nell'anno 1906. Statistica delle cause di morte nell'anno 1906. — Annuario statistico italiano 1905-1907, fasc. 2°. — Annali. Atti della Commissione per la statistica giudiziaria e notarile. Sessione del luglio 1907, Sez. IV, N. 110. — Divorzi e separazioni personali di coniugi, Sez. IV, N. 94*bis*. — Annali dell'Industria e del Commercio 1907. Disposizioni vigenti in Italia e in alcuni Stati esteri per la sorveglianza sull'uso del carburo di calcio e dell'acetilene.

— Ministero delle Finanze. Statistica del commercio speciale di importazione e di esportazione, ottobre-dicembre 1907, gennaio-ottobre 1908. — Bollettino di Legislazione e Statistica doganale e commerciale, an. XXIV, 1° gennaio-16 dicembre 1907; XXV, 1° gennaio - 16 agosto 1908. — Relazione sull'Amministrazione delle Gabelle per l'esercizio 1906-1907. — Movimento commerciale del Regno d'Italia nell'anno 1906, vol. I, II; 1907, vol. I. — Movimento della Navigazione del Regno d'Italia nell'anno 1906, vol. I, II; 4°. — Tabella indicante i valori delle merci nell'anno 1907 per le statistiche commerciali.

** — Ministero dell'Interno. Calendario generale del Regno pel 1908.

** — Ministero della Pubblica Istruzione. Annuario 1908; 8°.

* — Reale Accademia dei Lincei. Atti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Memorie, serie 5ª, vol. VI, fasc. 13-15-16, 17. — Rendiconti. — Atti della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. — Memorie. — Notizie degli Scavi di antichità, sez. 5ª, vol. IV, fasc. 7-12; vol. IV, fasc. 1-8. — Rendiconti. — Elenco bibliografico delle Accademie, Società, Istituti scientifici, ecc., corrispondenti con la R. Accad. dei Lincei. Roma, 1908; 1 vol. 8°. — Rendiconto dell'adunanza solenne del 7 giugno 1908.

* — Pontificia Accademia Romana dei nuovi Lincei. Memorie, vol. XXV. — Atti, Anno LXI, 1907-1908, Sess. I-VII; 4°

— Biblioteca Apostolica Vaticana; Studi e Testi, n. 19. Roma, 1908; 8°.

— Società Aereonautica italiana. Bollettino, vol. V, 1-10.

— Società Italiana per il progresso delle scienze. Atti. Prima riunione, Parma, settembre 1907.

* — R. Comitato Geologico d'Italia. An. 1907, N. 3-4; An. 1908, N. 1, 2. — Carta geologica delle Alpi occidentali, 1 : 400.000; fol°.

* — Istituto di Diritto romano. Bullettino. An. XX, fasc. 1-3.

— Società degli Agricoltori italiani. Bollettino quindicinale, vol. XIII (1908), 1-24.

* — Società italiana delle Scienze. Memorie di matematica e di fisica, Ser. 3ª, T. XV; 4°.

* — R. Ufficio centrale meteorologico e geodinamico italiano. Annali, vol. XVII, p. 3ª, 1895; 4°. — Cinquième conférence de la Commission internationale pour l'aérostation scientifique à Milan du 30 septembre au 7 octobre 1907. Procès-Verbaux des Séances et Mémoires. Strassbourg, 1907; 8°.

* **Rovereto**. I. R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti degli Agiati. Atti, Ser. 3ª, vol. XIII, fasc. 3 4 (1907); XIV, 1-11.
* **Saint-Louis**. Missouri Botanical Garden. 18° Annual Report, 1907; 8°.
* **St-Pétersbourg**. Académie Impᵉ des sciences. Bulletin, VIᵉ Sér., 1908, 1-18. — Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente, T. II, livrs. 3. — Œuvres de P. L. Tchebychef, T. II.
* — Comité Géologique. Bulletins, vol. XXIV; XXV, N. 1-.10; XXVI, 5-7; XXVII, 1. — Mémoires, Nouvelle Sér., livrs. 16, 21-24 à 27, 29, 31-35.

— Musée Géologique Pierre le Grand. Travaux, vol. I (1907), 1-5; II, 1-2.

— Observatoire Physique Central Nicolas. Annales, 1903. Supplément. — Publication, Ser. II, T. XVI, XVIII. — Missions scientifiques pour la mesure d'un arc de méridien au Spitzberg, entreprises en 1899-1901. Deux Mémoires de la Mission Russe.

* — Société physico-chimique russe. Journal, T. XL, 1-4, 6-8.
* **San Francisco**. California Academy of sciences. Proceedings, 4ª Series, vol. I, 1; III, pp. 1-40.
* **Sassari**. Studi sassaresi. Supplemento agli Studi Sassaresi. Anno V, 1907, sez. II; An. V, sez. II. fasc. 1 2; An. VI, sez. II, fasc. 1-2.
* **Siena**. R. Accademia dei Fisiocritici. Atti, Serie IV, vol. XIX, N. 7-10; XXX, 1-6.

— R. Università degli Studi. Annuario accademico 1907-1908.

* **Stockholm**. Académie Rᵉ des sciences de Suède. Arkiv för Matematik, astronomi och fysik, Bd. IV, 1-4. — Arkiv för kemi, mineralogi och geologi, Bd. III, 1, 2. — Arkiv för botanik, Bd. VII, 1-4. — Arkiv för zoologi, Bd. IV, 1-4. – Handlingar, Bd. XLII, N. 10-12; XLIII, 1-6. Arsbok för år 1908. — Accessionskatalog XXI (1906). — Meteorologiska iakttagesler i Sverige, Bd. XLVIII (1906-1907); XLIX (1907). — Meddelanden från K. Vetenskapsakad. Nobelinstitut, Bd. I, 8-11.

Strassburg. Publications de la Commission Internationale pour l'Aérostation scientifique. Observations des ascensions internationales simultanées et des stations de montagne et des nuages. An. 1905, juillet-décembre, fasc. 7-12; 1906, janvier-décembre, fasc. 1-12; 1907, 1-6; 4°.

— Weröffentlichungen der Internationalen Kommission, 7 (1907).

* **Stuttgart**. Verein für vaterländische Naturkunde. Jahreshefte, 64. Jahrg. 1908. — 1. Beilage, 64. Jahrg. 1908, Verzeichnis der mineralogischen, geologischen, urgeschichtlichen und hydrologischen Literatur von Würtemberg, Hohenzollern... V. — 2. Beilage, 64. Jahrg. 1908, Mitteilungen der Geologischen Abteilung des kgl. Würtembergischen Statistichen Landesamts, N. 4 5.
* **Svizzera**. Geologische Kommission der Schweiz. Naturforschende Gesellschaft. Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz, N. F., XV, XXI, XXII. Liefg. — Schweiz. Geologische Kommission: Matériaux pour la Carte géologique de la Suisse: Carte spéciale n. 45, 49, 52 avec texte explicatif.
* — Schweizerische geodätische Kommission. Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz, Bd. X, XI.
* — Société Helvétique des sciences naturelles. Nouveaux Mémoires, Bd. XLI,

XLII, XLIII. Compte rendu des travaux presentés à la 90^{me} session; Actes, 90^{me} session du 28-31 juillet 1907 à Freiburg, vol. I et II.

* **Sydney**. Royal Society of New South Wales. Journal and Proceedings, vol. XXXVII-XLI (1903-1907); 5 vol. in-8°.

Tananarive. Académie Malgache. Bulletin, 1907, vol. V; 8°.

* **Thonon**. Académie Chablaisienne. Mémoires et Documents, T. XX, XXI.

* **Tōkyō**. Imperial Earthquake Investigation Committee. Bulletin, vol. II, N. 1-2. — Publications, N. 22 A, 22 C.

* — Imperial University. The Journal of the College of Science, vol. XXI, art. 8-9; XXIII, art. 2-14; XXIV, XXV, art. 1-19.

* — K. Japanische Universität. Mitteilungen aus der Medizinischen Fakultät, Bd. VII, N. 3, 4.

* **Topeka**. Kansas Academy of science. Transactions, vol. XXI, p. 1.

* **Torino**. R. Accademia di Agricoltura. Annali, vol. L, 1907; 8°.

* — R. Accademia di Medicina. Giornale, Anno LXX (1907), N. 9-12; LXXI (1908), N. 1-8.

* — R. Univers. di Torino. Annuario 1907-1908. An. 504° dalla fondazione ; 8°.

— Società di Archeologia e Belle Arti per la provincia di Torino. Atti, vol. VII, fasc. 6°.

* — Società meteorologica italiana. Bollettino bimensuale, ser. III, vol. XXVI, N. 8-12 (1907); XXVII, N. 1-9 (1908).

— Musei di Zoologia ed Anatomia comparata dell'Università. Bollettino. Vol. XXII, 1907; 8°.

— Istituto d'Anatomia patologica dell'Università. Lavori. Anni 1906-1908.

— Consiglio Provinciale. Atti, 1907.

* — Municipio. Annuario 1906-1907. — Atti e allegati di contabilità, 1907, 2 vol. in-4°. — Bollettino statistico dell'Ufficio d'igiene. An. XXXVI, 1907, N. 8-13; XXVIII, 1908, 1-6.

* — Club Alpino italiano. Rivista mensile, vol. XXVI, N. 12; XXVII, 1-12. — Guida delle Alpi marittime.

— Associazione Pro-Torino. Pro-Torino, An. I (1905)—An. IV (1908), N. 1-12.

— Scuola professionale per gli Orefici. Anno I-IV.

— Cassa di Risparmio. Resoconto dell'anno 1907 approvato dal Consiglio di Amministrazione in seduta 25 aprile 1908. Torino, 1908; fol°.

* **Toronto**. Canadian Institute. Transactions, vol, VIII, part 2, N. 17.

— University. History and Economics, vol. II, N. 4. — Psycological Series, vol. II, N. 4.

— University. Review of historical publications relating to Canada, vol. XII. Publications of the Year 1907. — Paper from the physical Laboratories, N. 22.

* **Toulouse**. Université. Annales de la Faculté des sciences, 2^{e} Sér., T. IX, 1907, 2^{e}-4 fasc.; X, 1er. — Annales du Midi. Revue de la France méridionale, XIX^{e} An., N. 75, 76, 1907; XX^{e} An., N. 77, 78, 1908. — Rapport annuel du Conseil de l'Université (6 janvier 1908). — Comptes rendus des travaux des Facultés et des Observatoires, etc. — Annuaire pour l'an. 1906-1907, 1907-1908. — Bulletin, N. 20. — Bibliothèque méridionale, 2^{e} sér., T. XII. Blaise de Monluc historien; 1 vol. 8°.

* **Trieste.** Società di Minerva. Archeografo Triestino. Raccolta di memorie, notizie e documenti particolarmente per servire alla storia della regione Giulia, vol. IV della 3ª serie. Trieste, 1908.

* **Udine.** Civica biblioteca e Museo. Bollettino, 1907, Anno I, N. 1-3; 1908, An. II, 1-2.

* **Upsala.** Observatoire Météorologique de l'Université. Bulletin mensuel, vol. XXXIX, An. 1907.

* — Kungl. Vetenskaps Societeten. Bibliographia Linneana. Matériaux pour servir à une bibliogr. Linnéenne recueillis par J. M. Hulsh. P. I, livr. 1.

* — Bibliothèque de l'Université Royale. Arsskrift, 1906, 1907; Arsskrift, 1907; skrifter med anledning af Linnifesten; 2 vol. 8°. — Bref och Skrifvetser af och till Carl von Linné etc. Del. II. Stockholm, 1908. — Förelänsningar och öfningar vid Kungl. Universitetet i Uppsala höstterminen 1906; Id. id. vår-terminen 1907. — Urkunder till Stockholms historia I. 3. Häftet.

* **Urbana.** Illinois State Laboratory of natural history. Bulletin, vol. VIII, Article 1.

Varsavia. Societas scientiarum Varsaviensis. Wydzial nauk matematycznych i pryrodniczych. 1908, Rok. I, Zeszyt 1-3.

* **Venezia.** R° Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Monumenti veneti nell'isola di Creta, vol. II. — Atti, T. LXVII, disp. 1-10. — Memorie, vol. XXVII, N. 9-10; XXVIII, 1, 2. — Ricerche Lagunari per cura di G. P. Magrini, L. De Marchi, T. Gnesotto, N. 1-10.

* **Verona.** Accademia d'Agricoltura, scienze, lettere, arti e commercio. Atti e Memorie, serie 4ª, vol. VII. — Osservazioni meteoriche dell'anno 1906.

* — Museo civico. Madonna Verona. An. 1° (1907), fasc. 1-4; An. II (1908), fasc. 1-3.

* **Washington.** Smithsonian Institution. Smithsonian Contribution to knowledge. Part of vol. XXXIV, N. 1692; Part of vol. XXXV, N. 1718, 1723. — Miscellaneous Collections, vol. XLVIII, N. 1695; vol. XLIX, N. 1717, 1720, 1721; vol. L, N. 1703, 1725, 1772, 1780; LI, 1791. — Annual Report for the Year ending June 30, 1906. — Classified List of Smithsonian Publications available for distribution, May, 1908.

* — Smithsonian Institution. Bureau of American Ethnology. 24, 25 Annual Report. — Antiquities of the Upper Gila and Salt River Valleys in Arizona and New Mexico by W. Hough, 1907. — Skeletal Remains suggesting or attributed to Early Man in North America by Aleš Hrdlička, 1907.

* — Smithsonian Institution. United States National Museum. Bulletin, 50, p. IV; 53, p. II; 57, 58, 59. — Proceedings, vol. 32. — Contribution from the United States National Herbarium, vol. X, p. 5-7. — U. S. National Museum. Contributions from the U. S. National Herbarium, vol. XII, p. 1. — Report on the progress and condition, for the Year ending June 30, 1907.

* — Carnegie Institution. Year Book, No 6. 1907.

* — Carnegie Foundation for the advancement of teaching. Second Annual Report of the President and Treasurer. — The Financial Status of Professor in America and in Germany. Bulletin, N. 2.

* **Washington**. Carnegie Instit. Publications, N. 5, part 1ª, 2ª, 43, 54; part 2ª, 3ª, 55, 62, 63, 64, 67, 68, 71, 72, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85 (5), 91, 92.

— Smithsonian Institution. Astrophysical Observatory, Annals. vol. II.

— U. S. Geological Survey. Geologic Atlas of the United States, fol°, 141-150; 10 fasc. in fol°.

* — Department of Commerce and Labor. Bulletin of the Bureau of Standards, vol. II, N. 3; IV, 1-4; V, 1, 2.

* — Department of Commerce and Labor. Coast and Geodetic Survey. Supplement to the List and Catalogue of the publications issued by the U. S. Coast and Geodetic Survey 1816-1902 (January 1903, to August 1908). — Report of the Superintendent... showing the progress of the Work from July 1, 1906 to June 30.

* — U. S. Naval Observatory. Synopsis of the Report of the Superintendent for the U.S. Naval Observatory for the Fiscal Year ending June 30, 1907; 8°.

— Library of Congress. Report of the Librarian of Congress and Report of the Superintendent of the Library Building and Grounds for the Fiscal year ending June 30, 1907.

* **Wien**. K. Akademie der Wissenschaften. — Sitzungsberichte der philosophisch-historischen Klasse, Bd. 151-153. — Sitzungsberichte der matematisch-naturwissenschaftlichen Klasse, Bd. 115, Abth. I; II A, II B; II, N. 1-10 und Mitteilungen der Erdbeben-Kommission, N, F., N. XXXI. — Almanach, 56. Jahrg., 1906. — Archiv für österreichische Geschichte, Bd. 95, Hälfte I-II. — Fontes rerum Austriacarum. Oesterreichische Geschichts-Quellen. Abth. 59.

* — K. Akademie der Wissenschaften. Mitteilungen der Prähistorischen Kommission, II. Bd., N. 1, 1908.

* — K. K. Geologische Reichsanstalt. Verhandlungen 1907, N. 11-18; 1908, N. 1-14. — Jahrbuch, Jahrg. 1907, LVII. Bd., 4. Heft; 1908, LVIII. Bd., Heft 1-2. — Abhandlungen, Bd. XVI, Heft 2.

— Oesterreichische Kommission für die internationale Erdmessung. Verhandlungen. Protokolle über die am 29. Dezember 1906 u. am 26. März 1907 abg. Sitzungen.

* — K. K. Zoologisch-botanische Gesellschaft. Jahrg. 1907, LVII. Bd.

* **Würzburg**. Physikalisch-medicinische Gesellschaft. Sitzungsberichte 1907, N. 3-7. — Verhandlungen, N. F., Bd. XXXIX, N. 3-7; XL, 1.

* **Zagreb**. Jugoslavenska Akademija znanosti i umjetnosti. Grada xa povijest književnosti hrvatske, Kńiga 5. — Rad, Knjiga 170, 172. — Razredi histor.-filolog. i filosofičko-juridički, 68, 69. — Starine, Kg. XXXII. — Zbornik za narodni život i običaje južnih Slavena, Kg. XII, Svezak 2; XIII, 1. — Monumenta spectantia historiam Slavorum meridionalium, vol. XXXI. — Ljetopis. God. 1907 (22 Svezak). — Codex diplomaticus Regni Croatiae, Dalmatiae et Slavoniae. Vol. V. — Prinosi za hrvatski pravno-povjestni Rječnik. Svezak I (A-Ctenija).

* — Kr. Hrvatsko-Slavonsko-Dalmatinskoga Zemaljskoga Arkiva. Vjesnik, God. X, Svesak I-V.

* **Zürich**. Naturforschende Gesellschaft. Vierteljahrsschrift, Jahrg. LII, 3-4.

PERIODICI 1908.

* **Acta** mathematica. Vol. 31. Zeitschrift herausg. von G. Mittag-Leffler. Stockholm; 4°.
** **Allgemeine** Deutsche Biographie. Liefg. 266-268. Leipzig; 8°.
** **Almanacco** italiano. An. X, 1905; XIII, 1908, 1909. Piccola enciclopedia popolare della vita pratica.
** **Annalen** der Physik und Chemie. Leipzig; 8°.
** **Annales** de Chimie et de Physique. Paris; 8°.
Annales scientifiques de l'École Normale supérieure. Paris, 1908. — Tables des matières, 1864-1904, T. XXV, 1-7,
* **Annals** and Magazine of Natural History. London; 8°.
** **Annals** of Mathematics, second series. Charlottesville; 4°.
** **Antologia** (Nuova). Rivista di scienze, lettere ed arti. Roma; 8°.
** **Archiv** für Entwickelungsmechanik der Organismen. Leipzig; 8°.
Archiv für Naturgeschichte. Berlin (Jahrg. 74).
** **Archives** des Sciences physiques et naturelles, etc. Genève; 8°.
** **Archives** italiennes de Biologie... sous la direction de A. Mosso. Turin; 8°.
** **Archivio** per le Scienze mediche. Torino; 8°.
** **Archivio** storico italiano. Firenze; 8°.
* **Archivio** storico lombardo. Milano; 8°.
* **Archivio** storico sardo. Edito dalla Società storica sarda. Cagliari; 8°.
* **Archivio** storico per la Sicilia orientale. Catania, 8°.
Archivum Franciscanum historicum. An. I.
* **Ateneo** veneto. — Rivista mensile di scienze, lettere ed arti. Venezia; 8°.
** **Athenaeum** (The). Journal of English and Foreign Literature, Science, the Fine Arts, Music and the Drama. London; 4°.
* **Beiblätter** zu den Annalen der Physik und Chemie. Leipzig; 8°.
* **Beiträge** zur chemischen Physiologie und Pathologie. Braunschweig; 8°.
** **Berliner** philologische Wochenschrift; 8°.
** **Bibliografia** italiana. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. Milano; 8°.
** **Bibliographie** der deutschen Zeitschriften-Litteratur, mit Einschluss von Sammelwerken und Zeitungen. Supplementband. Leipzig; 4°.
Biblioteca nazionale centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. Firenze; 8°.
** **Bibliotheca** mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausg. von G. Erneström. Stockholm; 8°.
** **Bibliotheca** Philologica Classica.; 8°.
** **Bibliothèque** de l'École des Chartes; Revue d'érudition consacrée spécialement à l'étude du moyen âge, etc. Paris; 8°.
** **Bibliothèque** universelle et Revue suisse. Lausanne; 8°.
** **Bollettino** Ufficiale del Ministero dell'Istruzione Pubblica. Roma; 8°.
** **Bullettino** (Nuovo) di Archeologia cristiana. Roma; 8°.

** **Bullettino** di Archeologia e Storia dalmata. Spalato; 8°.
** **Centralblatt** für Mineralogie, Geologie und Paleontologie in Verbindung mit dem neuen Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paleontologie. Stuttgart; 8°.
* **Cimento** (Il nuovo). Pisa; 8°.
* **Elettricista** (L'). Rivista mensile di elettrotecnica. Roma; 4°.
** Ἐφημερὶς ἀρχαιολογική. Ἐν Ἀθήναις. 4°.
Eranos. Acta philologica Suecana, 1907.
** **Euphorion**, Zeitschrift für Literaturgeschichte.
** **Fortschritte** der Physik im Jahre 1906, 3; 1907, 1-2. Braunschweig; 8°.
* **Gazzetta** chimica italiana. Roma; 8°.
* **Gazzetta** Ufficiale del Regno. Roma; 4°.
* **Gegenbaurs** Morphologisches Jahrbuch. Leipzig; 8°.
* **Giornale** del Genio civile. Roma; 8°.
** **Giornale** della libreria, della tipografia e delle arti e industrie affini. Milano; 8°.
* **Giornale** storico e letterario della Liguria diretto da Achille Neri e da Ubaldo Mazzini. Spezia; 8°.
** **Giornale** storico della Letteratura italiana. Torino; 8°.
** **Guida** commerciale ed amministrativa di Torino. 8°.
* **Heidelberger Jahrbücher** (Neue). Heidelberg; 8°.
* **Historische** Zeitschrift. München; 8°.
* **Jahrbuch** über die Fortschritte der Mathematik. 1908, XXXV; Bd. X (1905), Heft 2, 3; XXXVI (1906).
** **Jahrbuch** (Neues), für Mineralogie, Geologie und Palaeontologie, etc. 1908, I. II. Beil. Bd. XXV, XXVI, 1, 2.
** **Jahresberichte** der Geschichtswissenschaft im Auftrage der historischen Gesellschaft zu Berlin herausgegeben von E. Berner. XXVII Jahrg. 1906. Berlin; 8°.
* **Journal** (The American) of Science. Edit. Edward S. Dana. New-Haven. Ser. IV, vol. XXV; XXVI, 151-155; 8°.
** **Journal Asiatique**, ou Recueil de Mémoires, d'Extraits et de Notices relatifs à l'histoire, à la philosophie, aux langues et à la littérature des peuples orientaux. Sér. X, vol. XI, XII, 1. Paris; 8°.
** **Journal** de Conchyliologie, comprenant l'étude des mollusques vivants et fossiles. 1907; T. LV, 1. Paris; 8°.
** **Journal** de Mathématiques pures et appliquées. Paris; 4°.
** **Journal** des Savants. Paris; 8°.
** **Journal** für die reine u. angewandte Mathematik. Berlin; 4°.
* **Journal** of Physical Chemistry. Ithaca; 8°.
** **Mathematische** u. Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Leipzig; 8°.
** **Minerva**. Jahrbuch d. gelehrten Welt. Strassburg; 16°.
** **Modern** language notes. Baltimore; 4°.
* **Monatshefte** für Mathematik und Physik. Wien; 8°.
** **Moyen Age** (Le). Bulletin mensuel d'histoire et de philol. Paris; 8°.
** **Nature**, a weekly illustrated Journal of Science. London; 8°.

* **Nieuw Archieff** voor Wirskunde. Uitgegeven door hel Wiskundig Genootschap te Amsterdam; 8°.
** **Palaeontographica.** Beiträge zur Naturgeschichte der Vorzeit. Stuttgart.
** **Petermanns** Mitteilungen aus Justus Perthes' Geographisch. Anstalt. Gotha; 8°.
** — Ergänzung. N. 159-160.
* **Physical Review** (The); a journal of experimental and theoretical physic. Published for Cornell University Ithaca. New-York; 8°.
** **Poggendorff's** biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften. Leipzig; 8°.
* **Portugalia.** Materias para o estudo do povo portuguez. Porto; 8°.
* **Prace** matematyczno fizyczne. Warzawa; 8°.
* **Psychologische Studien** herausg. von W. Wundt. Neue Folge der Philosophischen Studien. Leipzig; 8°.
** **Quarterly** Journal of pure and applied Mathematics. London; 8°.
** **Raccolta** Ufficiale delle leggi e dei decreti del Regno d'Italia. 8°.
Revista de Mathematica per G. Peano.
** **Revue** archéologique. Paris; 8°.
** **Revue** de la Renaissance. Paris; 8°.
* **Revue** de l'Université de Bruxelles; 8°.
** **Revue** des Deux Mondes. Paris; 8°.
Revue du Mois. Paris; 8°.
** **Revue** générale des sciences pures et appliquées. Paris; 8°.
** **Revue** numismatique. Paris; 8°.
** **Revue** politique et littéraire, revue bleue. Paris; 4°.
** **Revue** scientifique. Paris; 4°.
* **Revue** semestrielle des publications mathématiques. Amsterdam; 8°.
** **Risorgimento** italiano. Rivista storica diretta dal prof. B. Manzone. Torino; 8°.
* **Rivista** di Artiglieria e Genio. Roma; 8°.
** **Rivista** di Filologia e d'Istruzione classica. Torino; 8°.
** **Rivista** d'Italia. Roma; 8°.
** **Rivista** di scienza. Organo internazionale di sintesi scientifica. Bologna; 8°.
** **Rivista** filosofica in continuazione della *Filosofia delle Scuole italiane* e della *Rivista italiana di Filosofia*, Pavia; 8°.
* **Rivista** internaz. di scienze sociali e discipline ausiliarie. Roma; 8°.
* **Rivista** italiana di Sociologia. Roma; 8°.
* **Rivista** storica benedettina. Roma; 8°.
* **Rivista** storica italiana. Torino; 8°.
Rosario (Il) e la Nuova Pompei. Valle di Pompei; 8°.
** **Science.** New-York; 8°.
* **Science Abstracts.** Physics and Electrical Engineering. London; 8°.
* **Sperimentale** (Lo). Archivio di Biologia. Firenze; 8°.
** **Stampa** (La). Gazzetta Piemontese. Torino; f°.
** **Studi** medioevali diretti da F. Novati e R. Renier. Torino; 8°.
* **Tridentum.** Rivista mensile di studi scientifici. Trento; 8°.
Valle di Pompei.

* **Wiskundige** Opgaven met de Oplossingen, door de leden van het Wiskundig Genootschap. Amsterdam; 8°.

** **Zeitschrift** für Gletscherkunde für Eiszeitforschung und Geschichte des Klimas. Berlin; 4°.

* **Zeitschrift** für matematischen und naturwissenschaftl. Unterricht, herausg. v. J. C. Hoffmann. Leipzig; 8°.

** **Zeitschrift** für physikalische Chemie. Leipzig; 8°.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALL'ACCADEMIA

NB. Le pubblicazioni notate con * si hanno in cambio.
quelle notate con ** si comprano; e le altre senza asterisco si ricevono in dono.

Dal 14 Giugno al 15 Novembre 1908.

A Giovanni Cavalli gloria dell'Artiglieria italiana (*dono del Ministero della Guerra*).

Bonomi (A.). Giglioli H. Enrico. Avifauna italica. Recensione.

Camerano (L.). Gordiens du Musée Indien. Calcutta, 1908; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Cavazzi (L. G.). Flusso-riflusso del mare. Centri delle gravità centrifughe. Milano, 1908; 8° (*dall'A.*).

Centenario (Nel) della nascita del Generale Giovanni Cavalli. 1808-1908 (Fascicolo di ricordo della Rivista di Artiglieria e Genio). Roma, 1908; 8°.

Centenario (III) della nascita di Evangelista Torricelli. MDCVIII-MCMVIII; 4° (*Omaggio della Biblioteca Nazionale centrale di Firenze*).

Cerutti (V.). Le matematiche pure e miste nei primi dodici Congressi della Società Italiana per il progresso delle scienze. Milano, 1908; 4° (*dall'A.*).

Coblentz (W. W.). Selective Radiation from the Nernst Glower. Washington, 1908; 8° (*Id.*).

Haeckel (E.). Unsere Ahnenreihe (Progonotaxis hominis). Kritische Studien über phyletische Anthropologie. Jena, 1908; 4° (*dall'A. Socio straniero dell'Accademia*).

Hauswaldt (H.). Interferenz-Erscheinungen an doppeltbrechenden Krystallplatten im Konvergente polarisirten Licht. 3. Reihe. Magdeburg, 1907; 72 tav. in 4° (*dall'A.*).

Issel (A.). Liguria preistorica. Genova, 1908; 1 vol. 8° gr. (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Laar (J. J. van). Lehrbuch der theoretischen Electrochemie auf thermodynamischer Grundlage. Leipzig u. Amsterdam, 1907; 1 vol. 8° (*dall'A.*).

Mosso (A.). Villaggi preistorici di Caldare e Cannatello presso Girgenti. Roma, 1908; 4° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Naccari (Andrea). La vita di Michele Faraday. Padova, 1908; 1 vol. 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Oddone (E.). Il problema delle ondulazioni secondarie di mare e delle sesse nei laghi. Modena, 1908; 8° (*dall'A.*).

Onoranze a Ulisse Aldrovandi nel terzo centenario della sua morte, celebrate in Bologna nei giorni xi, xii, xiii giugno MCMVIII. Imola, 1908; 1 vol. in 4°.

Onoranze al prof. Alfonso Sella. Roma, 1908; 8° (*dono del Comitato*).

** **Reichenbach** (L.) et (H. G.) fils. Icones florae germanicae et helveticae simul terrarum adjacentium ergo mediae Europae. Opus... conditum, nunc continuatum D^re G. Beck de Mannagetta. T. XXIV, Decas 16, 17. Lipsiae et Gerae; 4°.

Rosenbusch (H.). Mikroscopiske Physiographie der Mineralien und Gesteine. Ein Hülfsbuch bei mikroscopischen Gesteinsstudien. Bd. II, Zweite Hälfte. Massige Gesteine. 4 neue bearbeitete Auflage. Stuttgart, 1908, 1 vol. 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Sasse. Allgemeiner Beweis des letzen oder grossen Fermatschen Satzes.

— Fermat's letzter Satz. Berlin, 1908. 1 c.

Schaeberle (J. M.). Geological climate. New-York, 1908; 8°.

— An explanation of the cause of the eastward circulation of our atmosphere. New-York, 1908; 4°.

See (T. J. J.). Further researches on the Physics of the Earth. Philadelphia, 1908; 8° (*dall'A.*).

** **Seitz** (A.). Les Macrolépidoptères du Globe. 1 vol. Fauna palaeartica. livrs. 15-17.

Taramelli (T.). Osservazioni stratigrafiche nei dintorni di San Pellegrino e di Salsomaggiore. Milano, 1908; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Tommasina (Th.). Physique de la gravitation universelle basée sur l'action exclusive des forces Maxwell-Bartoli. Genève, 1908; 8° (*Id.*).

Dal 21 Giugno al 22 Novembre 1908.

Bologna. Cassa di Risparmio. Premi " Cesare Zucchini ". Statuti.

** **De Gubernatis** (A.). Dictionnaire International des Écrivains du Monde Latin. Supplément avec Index. Rome-Florence; 8°.

Finocchiaro-Sartorio (A.). I beni comuni di diritto pubblico nel loro svolgimento storico e specialmente nella legislazione statutaria. Città di Castello, 1908; 8° (*dall'A.*).

** **Granderath** (Th.). Geschichte des Vaticanischen Konzils von seiner ersten Ankündigung bis zu seiner Vertagung. Freiburg im Breisgau, 1903-1906; 3 vol. 8°.

Hauser (O.). Fouilles scientifiques dans la Vallée de la Vézère (*dall'A.*).

Ibn Ǵubayr (Ibn Giobeir). Viaggio in Ispagna, Sicilia, Siria e Palestina, Mesopotamia, Arabia, Egitto, compiuto nel secolo XII. Prima traduzione, fatta sull'originale arabo da C. Schiaparelli. Roma, 1906; 1 vol. 8° (*dal Traduttore prof. C. Schiaparelli, Socio corrispondente dell'Accademia*).

Ibn Hamîds. Il Canzoniere. Pubblicato da Celestino Schiaparelli. Roma 1897; 1 vol. 8° (*Id.*).

La Mantia (Fr.). Relazione delle feste fatte in Sciacca dal 19 al 26 novembre 1713 per la solenne acclamazione di Vittorio Amedeo di Savoia re di Sicilia. Sciacca, 1908; 8° (*dall'A.*).

** **Litta.** Famiglie celebri italiane. Seconda Serie, fasc. XXXIII-XXXV.

Lizier (A.). Le Scuole di Novara ed il Liceo-Convitto (Nel primo centenario del R. Convitto Nazionale di Novara, 1808-1908). Novara, 1908 (*dono della Direzione del Convitto*).

Martini (M.). Studi Vergiliani. Piacenza, 1906; 8°.

— Il Caronte Vergiliano e il Dantesco. Piacenza, 1907; 8° (*dall'A.*).

** **Maspero** (G.). Causeries d'Égypte. Paris. 1 vol. 8°.

— Les contes populaires de l'Égypte ancienne, 3ᵉ édit. Paris, 1 vol. 8°.

** **Monumenta** Germaniae historica Scriptorum. T. XXXII, parte II.

Mosso (A.). Villaggi preistorici di Caldare e Cannatello presso Girgenti. Roma, 1908; 4° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Muratori (L. A.). Rerum italicarum Scriptores: fasc. 60 (fasc. I del T. XXIV, p. xiii); fasc. 61 (fasc. 3-4 del T. XVIII, p. i); fasc 63 (fasc. 3 del T. XXXII, p. i); fasc. 64 (fasc. 2 del T. XXVI, p. i). — Archivio Muratoriano. Studi e ricerche in servigio della nuova edizione del *Rerum italicarum Scriptores*, N. 5-6.

Pennini-Mauro (A.). L'Universale. Anno XI (1907-1908) (*dall'A.*).

** **Philippe** (P.) et **Paul-Boncour** (G.). Les anomalies mentales chez les écoliers. Paris, 1905; 1 vol. 8°.

Prato (G.). La vita economica in Piemonte a mezzo del secolo XVIII. Torino, 1908; 1 vol. 4° (*dall'A.*).

Raymond (G. L.). The Aztec God and other dramas. Third edit. New York and London, Putnanissons, 1908; 16°.

— A Life in Song. 3. edit. New York and London, 1908; 16°.

— Ballads and other poems. 3. edit. New York and London, 1908; 16° (*dall'A.*).

Scano (D.). Storia dell'Arte in Sardegna dall'XI al XIV secolo. Cagliari-Sassari, 1907; 1 vol. in-4° (*Id.*).

Sforza (G.). I più antichi protocolli dell'Archivio notarile dell'Aulla. Genova, 1908; 8°.

— Gli Scrittori della Lunigiana estense. Prima Serie. Modena, 1908; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

** **Thibaut** (Fr.). Quid de puellis instituendis senserit Vives. Parisiis, 1888; 8°.

Venturi (A.). Storia dell'arte italiana. Vol. IV-VI. Milano, 1906-1908; 3 vol. 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Dal 15 al 29 Novembre 1908.

Centenario della Cattedra di Zoologia della R. Università di Napoli 1806-1906. Napoli, 1907; 4° (*dal Direttore del Museo Zoologico di Napoli*).

Jadanza (N.). Tachymeter-Tafeln für centesimale Winkelteilung. Deutsche Ausgabe, nach der 2 Auflage (Turin 1904) besorg von E. Hammer. Stuttgart, 1909; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

** **Naumann**. Naturgeschichte der Vögel Mitteleuropas. Herausgegeben von D. C. R. Henniche de Gera. 12 vol. 4° mass.

Oechsner de Coninck (W.) et **Arzalier** (L.). Action des corps solubles sur des corps insolubles. Bruxelles, 1908 (*dall'A. W. O. de Coninck*).

Schiaparelli (G.). I primordi dell'Astronomia presso i Babilonesi. Bologna, 1908; 8°.

— I progressi dell'Astronomia presso i Babilonesi. Bologna, 1908; 8° (*dall'A. Socio nazionale non residente dell'Accademia*).

Dal 22 Novembre al 6 Dicembre 1908.

Bertolini (C.). Appunti didattici di Diritto romano, fasc. 5-8. Torino, 1907-1908; 8°.

Commemorazione del 1° centenario della morte di Giovanni Fantoni (Fivizzano, 29 settembre 1907). Pistoia, 1908; 8° (*dono del Socio residente dell'Accademia, G. Sforza*).

Kircheisen (F. M.). Bibliographie du temps de Napoléon, comprenant l'histoire des États-Unis. T. I. Genève, 1908; 1 vol. 8° (*dall'A.*).

** **Litta**. Famiglie celebri italiane (2ª serie), fasc. XXXVI, XXXVII: D'Aquino di Capua; fol.

Oxilia (U.) e **Boffito** (G.). Un trattato inedito di Egidio Colonna. Firenze, 1908; 1 vol. 8° (*dono del prof. G. Boffito Socio corrispondente dell'Accademia*).

** **Pagliaini** (A.). Catalogo generale della Libreria italiana. Indice per materie. Puntate III-IV. Milano, 1908; 4°.

Patetta (F.). Studi storici e note sopra alcune iscrizioni medievali. Modena, 1907; 1 vol. 4° (*dono dell'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Siragusa (G. B). Per l'edizione dei primi due gruppi dei Capitolari delle Arti veneziane; delle Vite dei Dogi di Marin Sanudo, del " Liber de regno Sicile " di Ugo Falcando. A proposito di due risposte del G. Monticolo. Palermo, 1908; 4° (*dall'A.*).

Zocco-Rosa (A.). D'une nouvelle Palingénésie des Institutes de Justinien. Montpellier; 8° (*Id.*).

Dal 29 Novembre al 13 Dicembre 1908.

Gibelli (G.). La sirena umana. Milano, 1907; 8° (*dall'A. per concorrere al premio Bressa*).

Grassi (G.). Corso di Elettrotecnica. Vol. I: Alternatori, Dinamo a corrente continua e Trasformatori. 2ª ediz. riveduta ed ampliata. Torino; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

** **Reichenbach** (L.) et (H. G.) fils. Icones florae germanicae et helveticae simul terrarum adjacentium ergo mediae Europae. Opus..... conditum, nunc continuatum Dre G. Beck de Mannagetta. T. XIX, 2 Decas, 21. Hieracium II. Lipsiae et Gerae; 4°.

Sauvageau (C.). Le Professeur David Carazzi de l'Université de Padoue (Italie). Les Huitres de Marennes et la Diatomée bleue. Bordeaux, 1908; 8° (*dall'A.*).

** **Seitz** (A.). Les Macrolépidoptères du Globe. 5, 6 livrs. Stuttgart; 8°.

Dal 6 al 20 Dicembre 1908

Bertolini (C.). Appunti didattici di Diritto romano. Università di Torino, 1905-1906, fasc. 3°, 4° e 9°.

— Bibliografia. Estratto dal Bullettino dell' Istituto di Diritto romano. Roma, 1908; 8°.

D'Ercole (P.). L'insegnamento filosofico liceale e la storia della filosofia. Roma, 1908; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Foerster (W.). Kristian von Troyes Erec und Enide. Textausgabe mit Variantenauswahl, Einleitung, erklärenden Anmerkungen und vollständigem Glossar. Halle a. S., 1909; 8° (*dall'A. Socio straniero dell'Accademia*).

Sforza (G.). Esuli estensi in Piemonte dal 1848 al 1859. Modena, 1908; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Dal 13 al 27 Dicembre 1908.

Bassani (F.) e **Galdieri** (A.). La sorgente minerale di Valle di Pompei. Relazione geologica. Napoli, 1908 (*dal sig. Bassani Socio corrispondente dell'Accademia e collaboratore*).

Bertese (A.). Le nuove accuse contro Antonio Bertese a proposito della Mosca delle Olive. Firenze, 1908; 8° (*dall'A.*).

Colomba (L.). Escursione ai giacimenti di Brosso e Traversella (14-15 settembre 1907). Roma, 1907; 8°.

— Aloisiite, nuovo idrosilicato dei tufi di Fort Portal (Uganda). Roma, 1908; 8° (*Id.*).

** **Curie** (Pierre). Œuvres de P. C. publiées par les soins de la Société française de physique. Paris, 1908; 1 vol. 8°.

Haton de la Goupillière. Surfaces nautiloïdes. Coimbra, 1908; 1 vol. 8°.

— Application aux mouvements planétaire et cométaire de la recherche du centre de gravité et des axes principaux du temps de parcours. Paris, 4° (*dall'A.*).

** **Reichenbach** (L.) et (H. G.) fils. Icones florae germanicae et helveticae simul terrarum adjacentium ergo mediae Europae. Opus... conditum, nunc continuatum Dre G. Beck de Mannagetta. T. XXIV, 18 Decas, 1. Lipsiae et Gerae; 4°.

Rizzo (G. B.). Sulla velocità di propagazione delle onde sismiche nel terremoto della Calabria del giorno 8 settembre 1905. Torino, 1906; 4°.

— Sopra il calcolo della profondità degli ipocentri nei sistemi sismici. Torino, 1906; 8°.

— Sopra le perturbazioni magnetiche dovute al terremoto della Calabria dell'8 settembre 1905. Baltimora, 1906; 8°.

— Contributo allo studio del terremoto della Calabria del giorno 8 settembre 1905. Messina, 1906; 8°.

— Sulla propagazione dei terremoti. Saggio di interpretazione dei diagrammi sismici. Torino, 1907; 8°.

— Nuovo contributo allo studio della propagazione dei movimenti sismici. Torino, 1908; 4° (*dall'A. per concorrere al premio Bressa*).

Dal 20 Dicembre 1908 al 3 Gennaio 1909.

** **Dante Alighieri.** La divina commedia. Nuovamente commentata da Francesco Torraca. Roma-Milano, 1907; 1 vol. 8°.

** — La vita nuova, per cura di Michele Barbi. Milano, 1907: 1 vol. 8°.

** **Muratori.** (L. A.). Rerum Italicarum Scriptores. Fasc. 65; fasc. 4° del T. XVIII, p. 1.

Dal 27 Dicembre 1908 al 10 Gennaio 1909.

Bassani (F.) e **Galdieri** (A.). La sorgente minerale di Valle di Pompei. Napoli, 1908 (*dal sig. Prof. Bassani, Socio corrispondente dell'Accademia, e dal Collaboratore*).

** **Barrande** (J.). Système silurien du centre de la Bohême. Problematica silurica. Prague, 1908; 1 vol. 4°.

Binder (O.). Ueber eine Selbstentzündung von Schwefelmangan. Wiesbaden, 1907; 8°.

— Automatischer Probenehmer und Mischapparat Laboratoriumszwecke. Wiesbaden; 8° (*dall'A.*).

Coblentz (W. W.). Supplementary investigations of Infra-red Spectra: Part V. Infra-Red reflection Spectra; VI. Infra-Red transmission Spectra; VII. Infra-Red Emission Spectra. Washington, 1908; 8° (*dall'A.*).

De Toni (G. B.). Illustrazione del terzo volume dell'erbario di Ulisse Aldrovandi. Genova, 1908.

— Matteo Lanzi. Genova, 1907 (*Id.*).

Foà (P.). Lavori dell'Istituto d'Anatomia Patologica dell'Università di Torino. Anni 1906-1908. Torino, 1908; 8° (*dono del Prof. Senatore Foà, Socio dell'Accademia*).

Dal 3 al 17 Gennaio 1909.

Boggio (C.). Lo sviluppo edilizio di Torino dall'assedio del 1706 alla Rivoluzione Francese. Torino, 1909; 4° (*dall'A.*).

** **Levi** (A.) e **Varisco** (B.). Saggio di una bibliografia filosofica italiana. Dal 1° gennaio 1901 al 30 giugno 1908. Bologna-Modena, 1908; 8°.

** **Monumenta** Germaniae historica. Legum, sectio IV, Constitutiones et Acta publica imperatorum et regum. T. IV, partis posterioris fasc. I. Legum, sectio III, Concilia, T. II, pars II.

** **Poole** (M.). Poole's index to periodical literature. Fifth supplement from January 1, 1902 to January 1, 1907. London, 1908; 1 vol. 4°.

Dal 10 al 24 Gennaio 1909.

Boccardi (G.). Osservazioni di ascensioni rette eseguite nel R. Osservatorio di Torino negli anni 1904-1906. Torino, 1908; 4°.

— In aequationem quam decimalem vocant animadversiones. Pavia, 1908; 8° (*dall'A.*).

Fusari (R.). Trattato elementare di Istologia generale e di tecnica istologica. Torino, 1909; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Mattirolo (O.). Species novae in excelsis Ruwenzori in expeditione Ducis Aprutii lectae. Roma, 1908; 8°.

— Sulla profilassi contro gli avvelenamenti dei funghi. Torino; 1908 (*Id.*).

De-Toni (G. B.). Contributo alla conoscenza delle relazioni del patrizio veneziano Pietro Antonio Michiel con Ulisse Aldrovandi. Modena, 1908; 4° (*dall'A.*).

** **Seitz** (A.). Les Macrolépidoptères du Globe. I vol., fasc. 18: Fauna palaeartica; II vol., fasc. 1: Exotica Fauna indoaustralica.

Dal 17 al 31 Gennaio 1909.

Brini (G.). Intorno alle obbligazioni naturali nel diritto romano privato. Bologna, 1908; 4°.

— La bilateralità delle *pollicitationes* ad una *res publica* e dei *vota* nel diritto romano. Bologna, 1908; 4° (*Dono dell'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Bellio (V.). Limnologia medioevale della regione dei Colli Berici. Firenze, 1908; 8° (*Id.*).

Bertolini (C.). Appunti didattici di diritto romano, fasc. 3° e 4° (1905-06); 9° (1908-09).

— Bibliografia. Roma, 1908 (*dall'A.*).

Calisse (C.). Gli usi civici nella provincia di Roma. Osservazioni. Prato, 1906; 8°.

— Le riforme della legge per gli usi civici nella provincia di Roma. Roma, 1907; 8°.

— Svolgimento storico del diritto penale in Italia dalle invasioni barbariche alle riforme del secolo XVIII. Milano, 1906; 8° (*Id.*).

** **Cambridge** (The) Modern history. Vol. XI: The growth of Nationalities. London, 1009; 8°.

Chevalier (U.). Mes souvenirs, 1804-1853 (Œuvre posthume). Romans, 1908 (*Dono del sig. U. Chevalier Socio corrispondente dell'Accademia*).

De-Gregorio (G.). Relazione del XV Congresso internazionale degli Orientalisti (Copenaghen, 14-20 agosto 1908. Palermo, 1908; 4° (*dall'A.*).

Geisser (A.). Il programma finanziario di Torino e l'allargamento della cinta daziaria. Dubbii e proposte. Torino, 1909; 8° (*Id.*).

Papini (G.). Il crepuscolo dei filosofi. Milano, 1906; 8° (*dall'A. per concorrere al premio Gautieri per la Filosofia*).

Pesce (A.). Cenni sulla condizione giuridica e politica di Ovada dal sec. X al XV (Estr. dal " Bollettino Stor. bibl. subalpino „); 8°.

— Un episodio dei costumi. Genova, 1908; 8°.

— Alcuni documenti intorno alla ricostruzione del Castelletto e ad un intrigo di Alfonso d'Aragona (1448-1455). Genova, 1907; 8° (*dall'A.*).

Pivano (S.). Stato e Chiesa da Berengario I ad Arduino (888-1015). Torino, 1908; 8° (*Id.*).

Pugliesi (S.). Due secoli di vita agricola. Produzione e valore dei terreni, contratti agrari, salari e prezzi nel Vercellese nei secoli XVIII e XIX. Torino, Bocca, 1908; 1 vol. 4° (*Id.*).

Rotta (P.). La coscienza religiosa medievale. Angelologia. Torino, 1908; 8°.

— La filosofia del linguaggio nella patristica e nella scolastica. Torino, 1909; 8° (*dall'A. per concorrere al premio Gautieri per la Filosofia*).

Sforza (G.). Biografie di illustri lunigianesi. Genova, 1908; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Dal 24 Gennaio al 7 Febbraio 1909.

Borredon (G.). L'equilibrio ed il moto perpetuo della terra girante intorno al sole; 8° (*dall'A.*).

Carazzi (D.). Il caso Sauvageau. Padova, 1909; 8° (*Id.*).

Coblentz (W. W.). Selective radiation from various solids. Washington, 1909; 8° (*Id.*).

Guerrini (G.). Sul meccanismo di azione del Distoma Epatico. Milano, 1908; 8°.

— Ein Fall von Darm-Sarkom beim Pferde; 8°.

— Di un particolare apparato di secrezione osservato nel " Distomum hepaticum ". Firenze, 1908; 8°.

— Sur la fonction des muscles dégénérés. Turin, 1908; 8°.

— Ueber einen Fall von Hämatoma splenis mit zahlreichen über das ganze Peritoneum versprengten Nebenmilzen. Stuttgart; 8°.

— Ueber einen Fall von Struma sarcomatosa der sekundärer Hypertrophie der Nebennieren und Hydrops Ascites beim Hunde. Stuttgart; 8° (*Id.*).

** **Seitz** (A.). Les Macrolépidoptères du Globe, " Exotica ", Livr. 8, II vol.: Fauna indoaustralica. Stuttgart, 1909; 4°.

Dal 31 Gennaio al 14 Febbraio 1909.

Cossavella (G.). Leggendo i *Promessi Sposi* ed i *Miserabili*. Note, confronti e riflessioni. Alba, 1908; 8° (*dall'A.*).

Geisser (A.). Durante l'assalto, parate e nuove botte. Torino, 1909; 8° (*Id.*).

** **Lea** (H. Ch.). A history of auricular confession and indulgences in the latin Church. Vol. I-III. London, 1896; 8°.

Marucchi (O.). Esame di un opuscolo di Mons. G. Wilpert risguardante alcuni miei studi sulle catacombe romane. Roma, 1909; 8° (*Omaggio del Nuovo Bollettino di Archeologia cristiana*).

Scritti di geografia e di storia della geografia concernenti l'Italia pubblicati in onore di Giuseppe Dalla Vedova. Firenze, 1908; 8° (*dono del prof. G. Dalla Vedova Socio corrispondente dell'Accademia*).

Dal 7 al 21 Febbraio 1909.

Bauer (R. W.). Die " Ansaat der Erde ". IV. Auflage. Leipzig, 1903; 16°.

— Agriculturchemische Nova! I-VII. Leipzig und Wien, 1900-1906; 8°.

— Ueber den aus Agar-Agar entstehenden zucker, über eine neue Säure aus der Arabinose etc. Leipzig, 1885; 8° (*dall'A. per concorrere al premio Bressa*).

Guareschi (I.). La Chimica e Marco Polo del Prof. Dott. Edmondo O. von Lippmann. Torino, 1909; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

** **Seth-Smith** (D.). Parrakeets. A. Handbook to the imported species. London, 1903; 1 vol. 8°.

Dal 14 al 28 Febbraio 1909.

Biàdego (G.). Pisanus pictor. Venezia, 1909; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Cantoni (C.). Scritti varî. Pavia, 1908; 1 vol. in-4° (*dono della signora vedova Cristina Cantoni*).

Carabellese (P.). La teoria della Percezione intellettiva di A. Rosmini. Saggio critico con prefazione del prof. B. Varisco. Bari, 1907; 1 vol. in-8° (*dall'A. per concorrere al premio Gautieri per la Filosofia*).

Troilo (E.). La filosofia di Giordano Bruno. Torino, 1907; 8° (*Id.*).

Dal 21 Febbraio al 7 Marzo 1909.

Alessio (A.). Determinazione della gravità relativa fra Padova e Potsdam: e valori delle durate d'oscillazione dei pendoli dell'apparato tripendolare del R. Istituto Idrografico a Padova, prima e dopo della campagna di circumnavigazione della R. Nave " Calabria „ (4 febbraio 1905-3 febbraio 1907). Genova, 1908; 8° (*da parte del R. Osservatorio astronomico di Padova*).

Bassani (F.). Commemorazione di Alberto Gaudry. Napoli, 1909; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Favaro (G. A.). Confronto fra le osservazioni dell'eclisse solare 30 agosto 190 fatte a Padova e i calcoli eseguiti con la " Connaissance des temps „ ed il " Nautical Almanac „ di Londra, con prefazione ed appendice del prof. G. Lorenzoni (*dono del prof. G. Lorenzoni, Socio nazionale non residente dell'Accademia*).

Lorenzoni (G.). Commemorazione del prof. Giuseppe Ciscato. Venezia, 1908; 8°.

— Commemorazione di Giorgio Carlo Cristiano Zachariae. Roma, 1908; 8° (*dall'A. Socio nazionale non residente dell'Accademia*).

Schiaparelli (G.). Orbite cometarie correnti cosmiche, Meteorite. Pavia, 1908; 8° (*Id.*).

Waldeyer (W.). Ansprache. Berlin, 1909; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Wehmeyer (S. A.). Studio termodinamico dei motori a fuoco odierni con riferimento speciale a quelli marini. Venezia, 1908; 1 vol. 8° (*dall'A.*).

Dal 28 Febbraio al 14 Marzo 1909.

** **Litta**. Famiglie celebri italiane (2ª serie). Fasc. XXXVIII, XXXIX: D'Aquino di Capua.

** **Muratori** (L. A.). Rerum italicarum scriptores, fasc. 66, fasc. I del T. XIV, p. 1; fasc. 67; fasc. 2 del T. III, p. 2.

Dal 7 al 21 Marzo 1909.

Galdieri (A.). Sul Trias dei dintorni di Giffoni. Napoli, 1908; 8° (*dall'A.*).
Swedish Explorations in Spitzbergen 1708-1908. Historical sketch, Bibliography, List of maps. Stockholm, 1909; 8°.

Dal 14 al 28 Marzo 1909.

Berlanga (M. R. de). Málaca. Noticia de algunos descubrimientos realizados desde fines de diciembre de 1904 á mediados de junio de 1906 al derribar el último lienzo de la muralla de mar de la Alcazaba de Málaga que ha logrado examinar casi siempre en el mismo lugar donde se ha verificado. Barcelona, 1905-1908; 1 vol. 8° (*dall'A., Socio corrispondente dell'Accademia*).
Gatti (G.). Lamina di bronzo con iscrizione riferibile alla guerra dei Soci italici. Roma, 1909; 8° (*Id.*).
Porena (F.). Lo stretto di Messina e i suoi terremoti. Conferenza. Roma, 1909; 8° (*Id.*).
Sforza (G.). L'indennità ai Giacobini piemontesi perseguitati e danneggiati (1800-1802). Torino, 1908; 8° (*dall'A., Socio residente dell'Accademia*).
Toesca di Castellazzo (C.). Il prezzo dell'avviamento, il sovrapprezzo delle azioni e l'imposta di ricchezza mobile. Studio di diritto commerciale e tributario. Torino, 1909; 8° (*dall'A.*).

Dal 21 Marzo al 4 Aprile 1909.

Helm. Gustav Anton Zeuner. Nachruf. Braunschweig, 1908; 4° (*dall'A.*).
Onelli (C.). Notes préliminaires sur la relation qui existe entre le nombre des vertèbres et celui des taches dans la peau de quelques animaux. Buenos Aires, 1908; 8° (*Id.*).
** **Reichenbach** (L.) et (H. G.) fils. Icones florae germanicae et helveticae simul terrarum adjacentium ergo mediae Europae. Opus..... conditum, nunc continuatum Dre G. Beck de Mannagetta. T. XXIV, decas 19, 20, Lipsiae et Gerae; 4°.
** **Seitz** (A.). Les Macrolépidoptères du Globe: Exotica II vol. Fauna indo-australica, livrs. 10.

Dal 28 Marzo al 18 Aprile 1909.

Biadego (G.). Verona. Con 174 illustrazioni. Bergamo, 1909; 1 vol. 4° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).
Brini (G.). La proprietà del lavoro. Bologna, 1909; 8°.
— Sul fr. 16 Dig. XII. 4. Bologna, 1909; 8° (*Id.*).
Finocchiaro-Sartorio (A.). Gizyah e Kharag. Note sulla condizione dei vinti in Sicilia durante la dominazione musulmana con speciale riguardo alla proprietà fondiaria. Roma, 1908; 8° (*dall'A.*).

In memoria di Maria Guareschi in Garelli nel xxx giorno dalla sua morte. La famiglia. Torino, 1909; 8° (*dono del Socio I. Guareschi*).

Polacco (V.). Le cabale del mondo legale. Discorso. Venezia, 1908; 8°.

— Di alcune deviazioni dal diritto comune conseguite al terremoto Calabro-Siculo. Padova, 1909; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Schanz (M.). Geschichte der römischen Litteratur bis zum Gesetzgebungswerk des Kaiser Justinian. Erster Teil, 2. Hälfte. München, 1909; 1 vol. 8° (*dall'A.*).

Dal 4 al 25 Aprile 1909.

Gautier (R.). Resumé météorologique de l'année 1907 pour Genève et le Gran Saint-Bernard. Genève, 1908; 8°.

Gautier (R.) et **Duaime** (H.). Observations météorologiques faites aux fortifications de Saint-Maurice pendant l'année 1907. Genève, 1908; 8° (*dal sig. R. Gautier, Directeur de l'Observatoire de Genève*).

Guidi (C.). Lezioni sulla scienza delle costruzioni. Parte seconda: Teoria dell'elasticità e resistenza dei materiali. 5ª ediz. Torino, 1909; 1 vol. 8° (*dono dell'A. Socio dell'Accademia*).

Oechsner de Conink (W.). Sur les analogies que présente l'uranium avec d'autres éléments. Bruxelles, 1909; 8°.

— Contribution à l'étude des uranates. Bruxelles, 1909; 8° (*dall'A.*).

Dal 18 Aprile al 2 Maggio 1909.

Desmaisons (J. J. P.). Dictionnaire persan-français..... publié par ses neveux. Vol. 1°. Rome, Typ. Polyglotte, 1908 (*dono di Carlo Reymond e Suzanne Reymond Desmaisons*).

* **Martini** (A.). Fatti psichici e fatti fisiologici. Spirito e corpo. Parte I, II, vol. 4° e 5°. Ascoli Piceno, 1904-1908; 2 vol. 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Filosofia*).

** **Muratori** (L. A.). Rerum italicarum scriptores: Fasc. 68 (I del T. XVII, p. 1ª) 69 (I del T. XXIV, p. 1ª).

Dal 25 Aprile al 9 Maggio 1909.

Haeckel (E.). Das Weltbild von Darwin und Lamarck. Festrede zur Hundertjähringen Geburtstag. Feier von Ch. Darwin am 12 Februar 1909 gehalten im Wolkshause zu Jena. Leipzig, 1909; 8° (*dall'A. Socio straniero dell'Accademia*).

Oddone (E.). Sui Geysers e sui Pseudo-Geysers. Modena, 1909; 8° (*dall'A.*).

** **Reichenbach** (L.) et (H. G.) fils. Icones florae germanicae et helveticae simul terrarum adjacentium ergo mediae Europae. Opus..... conditum, nunc continuatum D^re^ G. Beck de Mannagetta. T. XIX, 2 Decas, 22; T. XXIV, decas 21-22. Lipsiae et Gerae; 4°.

Semmola (E.). Le curve iso-anomale della gravità terrestre e le aree sismiche. Napoli, 1909; 4° (*dall'A.*).

Dal 2 al 16 Maggio 1909.

De Sarlo (F.). L'attività pratica e la coscienza morale. Firenze, 1907; 8°.

— e **Calò** (G.). Principii di scienza etica. Palermo, 1907; 8°.

— La patologia mentale in rapporto all' Etica ed al Diritto. Palermo; 8° (*dal Prof. De Sarlo per concorrere al premio Gautieri di Filosofia*).

** **Litta**. Famiglie celebri italiane. 2ª Serie, fasc. 40, 41: D'Aquino di Capua; Foscarini di Venezia.

Marr (B.). Altjüdische Sprache-metrik und Lunartheosophie. Dux, 1909; 8° (*dall'A.*).

** **Muratori** (L. A.). Rerum italicarum scriptores. Fasc. 70 (Fasc. 3 del T. XII, p. III). Città di Castello, 1909: 4°.

Roma. Ragioneria dello Stato. Il Bilancio del Regno d'Italia negli esercizi finanziari dal 1862 al 1907-1908. Roma, 1909; 1 vol. 4° (*dono del Comm. Paolo Bernardi Ragioniere Generale dello Stato*).

Dal 9 al 23 Maggio 1909.

Arctowski (H.). Les variations séculaires du climat de Varsovie. Warzawa, 1908; 8° (*dall'A.*).

Bertini (E.). Sopra la teoria dei moduli di forme algebriche. Roma, 1909; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Coblenz (W. W.). Radiation constants of Metals. Washington, 1909; 8° (*dall'A.*).

Ameghino (F.). Le litige des Scories et des terres cuites anthropiques des formations néogènes de la république Argentine. Buenos-Ayres, 1909; 8° (*Id.*).

Dal 16 al 30 Maggio 1909.

Arnò (C.). Sul C. 23 dei " Fragmenta Vaticana ". Modena, 1909; 4° (*dall'A.*).

Bertacchi (C.). Il prof. Gabriele Grassi della R. Università di Messina e la Geografia storica. Roma, 1909; 8° (*Id.*).

Fedeli (C.). I documenti Pontifici riguardanti l'Università di Pisa, editi ed illustrati. Pisa, 1908; 1 vol. in-4° (*Omaggio di Sua Eminenza il cardinale Maffi arcivescovo di Pisa*).

** **Justiniani Augusti** digestorum seu pandectarum codex Florentinus olim Pisanus phototypice expressus. Vol. II, fasc. VII. Roma, 1908, fol.

Pernier (L.). Il disco di Phaestos con caratteri pittografici. Roma, 1909; 4° (*dall'A.*).

Sforza (G.). Il Principe Eugenio Francesco di Savoia, Conte di Soissons e il suo fidanzamento con Maria Teresa Cybo Duchessa di Massa. Torino, 1909; 4° (*dono dell'A. Socio residente dell'Accademia*).

Dal 23 Maggio al 13 Giugno 1909.

Bernardi (G.). Sulla ricerca delle soluzioni intere e positive dell'equazione $ax + by = k$ quando i tre numeri a, b, k, sono interi e positivi. Roma, 1909; 8° (*dall'A.*).

Binder (O.). Zur Verkokungsprobe. Wiesbaden, 1909; 8° (*Id.*).

Caldarera (F.). Primi fondamenti della Geometria dello spazio, seguito alla prima parte col titolo: Primi fondamenti della Geometria del Piano. Palermo, 1908; 1 vol. 8° (*Id.*).

Capua-Giuffré (A.). Contributo alla conoscenza della spermatogenesi della *Phylliroé bucephala* (Per.). Torino, 1908; 8° (*Id.*).

Maggiorani (S.). Fenomeni plutonici. La Terra è più fredda nel suo interno. Le eruzioni vulcaniche e i moti sismici prendono origini da azioni esterne al Pianeta. Roma, 1909; 8° (*Id.*).

Pirotta (R.). La chimica fisica e la biologia vegetale. Roma, 1909; 8° (*dono dell'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Polara (V.). Sul potere emissivo dei corpi neri. Roma, 1909; 8° (*dall'A.*).

Sauvageau (C.). Lettre ouverte au sujet des Huitres de Marennes et de la Diatomée bleue. Bordeaux, 1909; 8°.

— Sur le développement échelonné de l'*Halopteris* (*Stypocaulon* Kütz) *Scoparia* Sauv. et remarques sur le *Sphacelaria radicans* Harv. Paris, 1909; 8° (*Id.*).

Dal 30 Maggio al 20 Giugno 1909.

Allievo (G.). Opuscoli pedagogici editi ed inediti. Torino, 1909; 1 vol. 8o (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Rossi (G. Fr.). Saggio di una nuova versione poetica dei carmi di Q. Orazio Flacco. I primi due libri delle odi e il carme secolare. Firenze, 1909; 1 vol. 8° (*dall'A.*).

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 15 Novembre 1908.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Naccari, Direttore della Classe, Jadanza, Guidi, Fusari, Morera, Peano, Somigliana, Parona, Guareschi, Mosso, Fileti e Camerano Segretario.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

Il Presidente saluta i colleghi ed augura loro un buon anno accademico.

Scusano la loro assenza i Soci Segre e Foà.

La Classe, dolente del doloroso incidente avvenuto al Socio Foà, fa voti per il pronto e completo suo ristabilimento in salute.

Il Presidente annunzia la morte del Socio corrispondente Prof. Eleuterio Mascart. La Classe si associa alle condoglianze che la Presidenza già inviò alla famiglia del compianto Socio.

Il Presidente comunica: 1° l'invito a partecipare al Congresso di Chimica applicata che avrà luogo a Londra nel 1909. Se qualcuno dei Soci si recherà a Londra in tale epoca, la Presidenza gli darà mandato di rappresentare l'Accademia e in ogni caso si provvederà affinchè l'Accademia sia rappresentata;

2° l'invito dell'Università di Cambridge per la commemorazione di Carlo Darwin, che avrà luogo nel 1909. — La Classe delega il Socio Camerano a rappresentarla.

Il Presidente presenta le pubblicazioni seguenti giunte in dono all'Accademia:

1° *La vita di Michele Faraday,* del Socio Naccari;

2° *Villaggi preistorici di Caldare e Cannatello,* del Socio Mosso;

3° *Unsere Ahnenreihe,* del Socio straniero Haeckel;

4° *Liguria preistorica,* del Socio corrispondente A. Issel;

5° *Mikroskopische Physiographie der Mineralien etc.*, del Socio corrispondente Rosenbusch;

6° *Onoranze ad Ulisse Aldrovandi,* dal Socio corrispondente G. Capellini;

7° *Due fac-simili di autografi di Galileo Galilei e di E. Torricelli,* dalla Biblioteca Nazionale di Firenze;

8° *Tachymeter-Tafeln,* del Socio Jadanza.

Il Socio Guareschi, a nome anche dei colleghi Fileti e Somigliana, riferisce intorno alle deliberazioni prese dalla Sezione di Chimica del Congresso della Società italiana per il progresso delle scienze, tenutosi in Firenze nel p. p. ottobre, riguardo alle onoranze da tributarsi nel 1911 ad Avogadro. La Sezione di Chimica, presa cognizione dell'iniziativa della nostra Accademia, ha aderito unanime a quanto essa ha già deliberato, vale a dire la pubblicazione di un volume contenente le principali memorie del grande scienziato, ed inoltre fece voti che il Comitato nazionale nominato dalla nostra Accademia sia trasformato in Comitato internazionale, il quale inizî una sottoscrizione internazionale per un monumento da erigersi in Torino ad Avogadro. L'ordine del giorno della Sezione di Chimica fu approvato anche nell'adunanza generale del Congresso.

Il Presidente a nome della Classe ringrazia il Socio Guareschi di quanto ha riferito.

La Classe accoglie unanime le proposte della Sezione di Chimica del Congresso, secondo quanto ha riferito il Socio Guareschi.

Il Presidente riunirà la Commissione accademica per i provvedimenti che del caso.

Il Presidente presenta alla Classe due note dell'ingegnere L. Compagna per la stampa, intitolate: *a) Ricerche sulle grandezze statiche la cui indeterminazione dipende dalla deformazione indeterminata degli appoggi; b) Nota sulla elasticità di torsione.*

La Classe delibera di affidare le due note al Socio Guidi per un esame preliminare.

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° G. Bertini, *Sulle serie segnate sopra una curva iperspaziale dalle sue ipersuperficie aggiunte e da tutte le ipersuperficie dell'iperspazio,* dal Socio Segre;

2° M. Bottasso, *I caratteri di un piano multiplo ciclico la cui curva di diramazione è irreducibile e generale nel suo ordine,* dal Socio Segre.

Il Socio Peano presenta per l'inserzione nelle *Memorie* il lavoro del Dr. T. Boggio intitolato: *Sulla risoluzione di una classe di equazioni algebriche che si presentano nella matematica finanziaria e attuariale.* La Classe delega i Soci Peano e Somigliana all'esame di detto lavoro.

Il Socio Parona presenta per l'inserzione nelle *Memorie* il lavoro del Prof. Sacco intitolato: *Il Gruppo della Majella.* La Classe delega i Soci Parona e Spezia all'esame di detto lavoro.

Il Socio Camerano presenta per l'inserzione nelle *Memorie* il lavoro del Dott. Ponzo intitolato: *Studio della localizzazione delle sensazioni cutanee;* Parte I: *Localizzazione delle sensazioni tattili.* La Classe delega i Soci Camerano e Fusari all'esame di detto lavoro.

LETTURE

Sulle serie segnate sopra una curva iperspaziale dalle sue ipersuperficie aggiunte e da tutte le ipersuperficie dell'iperspazio.

Nota del Socio corrispondente E. BERTINI a Pisa.

---

1. — Le presenti osservazioni sono continuazione di quelle contenute in una Nota (*) pubblicata in questi medesimi *Atti*: nella qual Nota fu dimostrato il teorema: *Se* C *è una curva irriducibile qualunque, le sue ipersuperficie aggiunte di un ordine dato arbitrario staccano su* C *una serie lineare completa, prescindendo dai punti che dipendono dall'aggiunzione.*

Nella Nota stessa è pure detto che cosa deve intendersi per *ipersuperficie aggiunta* a C in ogni caso, cioè tanto (in I) che C sia completa intersezione di $r-1$ ipersuperficie di S_r, quanto (in II, 2) che C formi una tale completa intersezione con un'altra curva C'.

2. — Premettiamo anzitutto alcune particolari determinazioni di una proprietà nota, le quali esprimiamo in S_{r-1} per comodità di applicazione.

Si sa che la postulazione, rispetto ad ipersuperficie di ordine l, di $n_1 n_2 \dots n_r$ punti distinti che formino in S_{r-1} la completa intersezione di $r-1$ ipersuperficie degli ordini $n_1, n_2, \dots, n_{r-1}$ è (**)

$$(1)\quad \binom{l+r-1}{r-1} - \sum \binom{l-n_i+r-1}{r-1} + \dots + (-1)^{r-1} \binom{l-n_1-\dots-n_{r-1}+r-1}{r-1},$$

(*) *Osservazioni sul Restsatz.....*; estratti di lettere di E. Bertini ed F. Severi (“ Atti della R. Acc. di Torino „, vol. 43, 1908).

(**) Cfr., ad es., il mio libro: *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi...* (Pisa, Spoerri, 1907), cap. 11, n. 17, 2°.

facendo la convenzione di porre zero per ogni simbolo combinatorio nel quale il numero superiore è $< r - 1$. Ma, se si prescinde da questa convenzione, cioè se si tien conto solo del significato algoritmico dei simboli combinatori, è facile vedere (*) che l'espressione (1) è $= n_1 n_2 \dots n_{r-1}$. Sicchè questo numero, se $l \geq \Sigma n_i - r + 1$, è precisamente la postulazione del suddetto gruppo di punti, perchè i numeri superiori dei simboli combinatori essendo allora tutti positivi (o nulli), quando sieno inferiori ad $r - 1$, si ha, per questo solo fatto, senza introdurre alcuna convenzione, che i simboli stessi dànno zero. Invece, se $l = \Sigma n_i - r$, ciò non è più vero soltanto per l'ultimo termine di (1) che è $(-1)^{r-1}\binom{-1}{r-1} = 1$, mentre per la convenzione si deve porre zero: e però, nel caso ora considerato, la postulazione è $n_1 n_2 \dots n_{r-1} - 1$. E si può anche osservare, per quanto non occorra in seguito, che, se $l = \Sigma n_i - r - 1$, l'ultimo termine di (1) è $(-1)^{r-1}\binom{-2}{r-1} = r$ e per la convenzione deve invece sostituirsi con zero, mentre in ogni altro simbolo combinatorio il numero superiore è sempre positivo (o nullo), se si aggiunge l'ipotesi che sia $n_i \geq 2$ ($i = 1, 2, \dots, r-1$). Questa ipotesi equivalendo all'altra che per il sunnominato gruppo di punti non passi alcun iperpiano (**), si conclude che *la postulazione, rispetto ad ipersuperficie di ordine* l, *di* $\mathrm{n}_1 \mathrm{n}_2 \dots \mathrm{n}_{r-1}$ *punti distinti comuni ad* $\mathrm{r} - 1$ *ipersuperficie di* S_{r-1} *degli ordini* $\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2, \dots, \mathrm{n}_{r-1}$, *è* $\mathrm{n}_1 \mathrm{n}_2 \dots \mathrm{n}_{r-1}$ *se* $\mathrm{l} \geq \Sigma \mathrm{n}_i - \mathrm{r} + 1$, *è* $\mathrm{n}_1 \mathrm{n}_2 \dots \mathrm{n}_{r-1} - 1$ *se* $\mathrm{l} = \Sigma \mathrm{n}_i - \mathrm{r}$ *ed è* $\mathrm{n}_1 \mathrm{n}_2 \dots \mathrm{n}_{r-1} - \mathrm{r}$ *se* $\mathrm{l} = \Sigma \mathrm{n}_i - \mathrm{r} - 1$ *e se inoltre (in quest'ultimo caso) il gruppo di punti appartiene ad* S_{r-1}.

3. — Ora sia ω il numero totale dei punti che una ipersuperficie Φ_l aggiunta ad una curva C di S_r ha colla C stessa per il fatto di essere aggiunta, numero costante al variare di l. Se si indica con r_l la dimensione della serie segnata su C dalle ϕ_l aggiunte, si avrà, per il teorema del n. 1,

$$r_l = nl - \omega - p + i_l,$$

(*) Cfr. ad es., il mio libro citato, cap. 11, n. 20.

(**) Il che segue subito da una nota proprietà (cfr., ad es., il mio libro citato, cap. 11, n. 17, 1°).

ove n, p sono rispettivamente ordine e genere di C ed i_l è l'indice di specialità della serie (numero dei gruppi canonici indipendenti passanti per un gruppo della serie): e similmente

$$r_{l-1} = n(l-1) - \omega - p + i_{l-1}.$$

Sottraendo risulta

$$r_l - r_{l-1} = n + i_l - i_{l-1}.$$

Si seghi con un S_{r-1} generico e sia ν_l la sovrabbondanza, rispetto alle Φ_l aggiunte, del gruppo G_n di n punti in cui S_{r-1} sega C, onde il gruppo G_n presenti alle dette Φ_l o, ciò che è lo stesso, alla serie segnata da queste su C, $n - \nu_l$ condizioni (indipendenti). Allora la dimensione della serie residua di G_n rispetto a questa serie sarà $r_l - n + \nu_l$; e, siccome tale serie residua (sempre per il teorema del n. 1) deve coincidere con quella segnata dalle Φ_{l-1} aggiunte, si avrà

$$r_{l-1} = r_l - n + \nu_l.$$

Confrontando coll'ultima relazione segue

$$\nu_l = i_{l-1} - i_l. \tag{2}$$

La curva C' (senza parti multiple), che insieme a C forma la completa intersezione di $r-1$ ipersuperficie, sia dell'ordine n, e queste ipersuperficie sieno rispettivamente degli ordini $n_1, n_2, \ldots, n_{r-1}$ $(n + n' = n_1 n_2 \ldots n_{r-1})$. Le Φ_l aggiunte a C e passanti inoltre per il gruppo G_n comprendono le Φ_l passanti per $C + C'$ e, poichè queste segano S_{r-1} in un sistema completo (*), quelle vi segano pure questo medesimo sistema: onde, se $l \geq \Sigma n_i - r + 1$, per la proprietà del n. 2, gli $n + n'$ punti in cui S_{r-1} sega $C + C'$ e quindi in particolare gli n punti di G_n presentano alle Φ_l aggiunte condizioni tutte indipendenti. Ossia, se $l \geq \Sigma n_i - r + 1$, $\nu_l = 0$ e quindi, per la (2), si ha $i_{l-1} = i_l = i_{l+1} = \ldots$:

(*) Vale la stessa dimostrazione fatta dal Severi per $r = 3$. Cfr. nota al n. 2 della Nota: *Sulla deficienza della serie caratteristica...* (“ Rend. dei Lincei ”, vol. XII, serie 5ª, 1903).

ma per l opportunamente grande l'indice di specialità è nullo: dunque *la serie segnata sopra una curva qualunque (irriducibile)* C *dalle sue* Φ_l *aggiunte quando* $l \geq \Sigma n_i - r$ *è (completa) non speciale*, che è un teorema noto nelle ipotesi molto restrittive che C sia priva di punti multipli, che anche C' sia priva di punti multipli ed inoltre irriducibile, e infine che i punti (semplici) comuni a C, C' sieno distinti.

Castelnuovo ha dimostrato (*) che le Φ_l aggiunte ad una curva qualunque (irriducibile) C, se $l \geq n - 2$, segnano sopra C una serie completa non speciale: ma è da rilevare che non solo è questa una diversa (e spesso superiore) limitazione a quella dianzi data, ma ancora che, se C non è completa intersezione di ipersuperficie, le Φ_l aggiunte hanno qui un significato più particolare di quello assegnato da Castelnuovo (dovendo inoltre passare per C').

4. — Se $l = \Sigma n_i - r + 1$, la relazione (B) fornisce (per essere $i_{l-1} = 0$)

$$\nu_{l-1} = i_{l-2}$$

e, ripetendo lo stesso ragionamento del n. 3, si vede, poichè adesso, per il n° 2 (essendo $l - 1 = \Sigma n_i - r$), gli $n + n'$ punti comuni ad S_{r-1} e a $C + C'$ presentano alle Φ_{l-1} aggiunte $n + n' - 1$ condizioni, che si hanno due casi: o $\nu_{l-1} = i_{l-2} = 1$, ovvero $\nu_{l-1} = i_{l-2} = 0$ (quando cioè accada che gli n' punti in cui S_{r-1} incontra C' offrano da sè la sovrabbondanza 1 alle Φ_{l-1} per essi).

Non pare facile mostrare che, se $p > 1$, si ha solo il primo caso e di più che in questo caso si ha proprio la g_{2p-2}^{p-1} (**), il che per una C qualunque sarebbe l'estensione di una proprietà nota per una C nelle condizioni restrittive dette alla fine del n. 3.

5. — Consideriamo ora *tutte* le Φ_l di S_r e diciamo ω_l il numero delle condizioni (indipendenti) alle quali esse debbono assoggettarsi per passare per gli ω punti di C pei quali passano le Φ_l aggiunte per il fatto dell'aggiunzione. Le Φ_l passanti

---

(*) Vedasi n. 9 della Nota: *Sui multipli di una serie lineare...* (" Rend. del Circolo matem. di Palermo ,, t. VII, 1893).

(**) Se $n' = 0$, cioè C è completa intersezione di ipersuperficie, basta fare questa seconda dimostrazione.

per gli ω punti, comprendendo le Φ_l aggiunte, staccano su C la stessa serie completa segnata da queste: cosicchè, se supponiamo $l \geq \Sigma n_i - r$, onde tal serie è anche non speciale (n. 3) e precisamente una $g_{nl-\omega}^{nl-\omega-p}$, la serie segnata da *tutte* le Φ_l sarà una serie (non speciale) $g_{nl}^{nl-p-\omega+\omega_l}$, e però, detta δ_l la sua deficienza, si avrà

$$\delta_l = \omega - \omega_l .$$

Similmente

$$\delta_{l+1} = \omega - \omega_{l+1}$$

e quindi

$$\delta_{l+1} - \delta_l = \omega_l - \omega_{l+1}. \tag{3}$$

Sia invece $l = \Sigma n_i - r - 1$ e la serie (completa) segnata dalle Φ_l aggiunte (se esistono) abbia l'indice di specialità 1, cioè sia una $g_{nl-\omega}^{nl-\omega-p+1}$, il che ha luogo certamente se C è completa intersezione di ipersuperficie (Cfr. la nota al n° precedente). Allora la serie segnata da *tutte* le Φ_l è $g_{nl}^{nl-p+1-\omega+\omega_l}$, che dico essere non speciale, escluso, s'intende, il caso ovvio che sia $\omega = \omega_l = 0$, cioè C completa intersezione di ipersuperficie e priva di punti multipli. Infatti considerisi la jacobiana delle $r-1$ ipersuperficie passanti per C e di due iperpiani generici, superficie di ordine $\Sigma n_i - r + 1$. Questa, come è noto, sega C nei punti doppi della g_n^1 segata dagli iperpiani del fascio generico che ha per sostegno l'S_{r-2} comune a quei due iperpiani e in altri punti (*): sicchè si ha

$$(\Sigma n_i - r + 1)n > 2p - 2 + 2n$$

cioè

$$(\Sigma n_i - r - 1)n > 2p - 2:$$

il che dimostra ciò che si è affermato. Segue che la deficienza δ_l della serie segnata dalle Φ_l è ora

$$\delta_l = \omega - \omega_l - 1.$$

(*) Così un punto origine per C di un ramo di ordine i (> 1) è certo sulla detta jacobiana e quindi dà almeno i intersezioni di essa con C, mentre dà soltanto $i-1$ punti doppi di $g^1{}_n$ (essendo il fascio generico). Se si potesse dimostrare che il numero di tutti gli ulteriori punti d'intersezione della jacobiana e di C è ω, l'estensione di tutte le proprietà note sarebbe immediata.

Si ha sempre

$$\delta_{l+1} = \omega - \omega_{l+1}$$

e quindi, se $l = \Sigma n_i - r - 1$, si ha

(4) $$\delta_{l+1} - \delta_l = \omega_l - \omega_{l+1} + 1 \text{ (*)}.$$

6. — Ciò posto, dicasi ρ_l la dimensione del sistema delle Φ_l passanti per C e suppongasi $l \geq \Sigma n_i - r$. Allora, siccome le Φ_l passanti soltanto per gli ω punti dell'aggiunzione segnano su C una serie $g_{nl-\omega}^{nl-\omega-p}$ e formano un sistema di dimensione $\binom{l+r}{r} - 1 - \omega_l$ (cfr. n. 5), si avrà

$$nl - \omega - p = \binom{l+r}{r} - 1 - \omega_l - \rho_l - 1,$$

ossia

$$\rho_l = \binom{l+r}{r} - 2 - \omega_l - nl + \omega + p.$$

Similmente

$$\rho_{l+1} = \binom{l+r+1}{r} - 2 - \omega_{l+1} - n(l+1) + \omega + p$$

e quindi, sottraendo,

$$\rho_{l+1} - \rho_l - 1 = \binom{l+r}{r} - 1 - n + \omega_l - \omega_{l+1}.$$

Il primo membro è la dimensione del sistema delle sezioni fatte da un S_{r-1} generico sulle Φ_{l+1} passanti per C, alle quali sezioni (o meglio alle Φ_{l+1} di S_{r-1}), per il n° 2, essendo $l+1 \geq \Sigma n_i - r + 1$, gli n punti comuni a C e ad S_{r-1} presentano condizioni tutte indipendenti: quindi, dicendo θ_{l+1} la deficienza del suddetto sistema di sezioni, si ha

(5) $$\theta_{l+1} = \omega_{l+1} - \omega_l.$$

(*) Si noti che questa è dimostrata rigorosamente nel solo caso che C sia completa intersezione e abbia punti multipli, e che in questo caso soltanto è applicata in seguito.

Se $l = \Sigma n_i - r - 1$ e si suppone che le ipersuperficie aggiunte (o passanti per gli ω punti) di ordine l (se esistono) segnino su C una serie $g_{nl-\omega}^{nl-\omega-p+1}$ (di indice di specialità 1) come sta certamente per C completa intersezione (Cfr. la nota al n. 4), con analoghi ragionamenti, ricordando anche che gli n punti d'intersezione di C e di S_{r-1} presentano ora la sovrabbondanza 1 alle Φ_{l+1} di S_{r-1} (n. 4), si giunge alla stessa (5) (*).

7. — Applichiamo le formole trovate al caso di C completa intersezione di $r-1$ ipersuperficie.

Se $l \geq \Sigma n_i - r$, dalle (3) (5), essendo $\theta_{l+1} = 0$ (cfr. prima nota del n. 3) si ricava

$$\omega_l = \omega_{l+1} = \omega_{l+2} = \ldots = \omega'$$

$$\delta_l = \delta_{l+1} = \delta_{l+2} = \ldots = \delta' :$$

mentre se $l = \Sigma n_i - r - 1$, dalla (5), essendo sempre $\theta_{l+1} = 0$, si ha ancora

$$\omega_l = \omega_{l+1} = \omega_{l+2} = \ldots = \omega'$$

e dalla (4), (5) segue

$$\delta_l = \delta' - 1, \ \delta_{l+1} = \delta_{l+2} = \ldots = \delta'.$$

Adunque si ha dapprima che *gli* ω *punti dell'aggiunzione di una curva* C *completa intersezione di ipersuperficie, dotata comunque di punti multipli, degli ordini* $n_1, n_2, \ldots, n_r$, *presentano alle* Φ_l *di* S_r, *qualsiasi l'ordine* $l \geq \Sigma n_i - r - 1$, *sempre lo* ***stesso*** *numero* $\omega' (\leq \omega)$ *di condizioni.*

Poi si ha che *sulla medesima curva* C *tutte le* ϕ_l *di dato ordine* $l \geq \Sigma n_i - r$ *segnano una serie non speciale che è di deficienza costante* δ' *se* $l \geq \Sigma n_i - r$ (**) *ed è di deficienza* $\delta' - 1$ *se*

(*) Si noti che la (5), se $l = \Sigma n_i - r - 1$, è dimostrata rigorosamente solo se C è completa intersezione.

(**) Si confronti col teorema del n. 7 della Nota citata di Castelnuovo, dal quale si ricava che $\delta' \leq \pi - p$ (π genere massimo).

$l = \sum n_i - r - 1$ (*): mentre, come è noto, sulla C completa intersezione di ipersuperficie e priva di punti multipli tutte le ipersuperficie di ordine $l \geq \sum n_i - r$ segano una serie completa non speciale e quelle di ordine $l = \sum n_i - r - 1$ segano la serie canonica.

8. — Si sa che sopra una curva C non completa intersezione di ipersuperficie, nelle condizioni restrittive dette alla fine del n. 3, *tutte* le ipersuperficie di dato ordine $l \geq \sum n_i - r - 1$ segano una serie completa non speciale. Qual teorema si ha invece se C è qualunque? Per rispondere alla domanda occorre non solo togliere la lacuna lasciata nel n. 4 (anche per discutere l'esistenza o meno delle Φ_l aggiunte), ma vedere quale valore ha la deficienza θ_{l+1}, che compare nella (5), del sistema delle sezioni piane delle Φ_{l+1} passanti per C sopra un S_{r-1} generico, questione che pure non sembra facile a risolvere (forse $\theta_{l+1} = 0$ se $l \geq \sum n_i - r$ e $\theta_{l+1} = 1$ se $l = \sum n_i - r - 1$; onde tutte le ipersuperficie di dato ordine $l \geq \sum n_i - r - 1$ segano su C una serie non speciale di deficienza costante).

Cattolica di Romagna, Settembre 1908.

(*) Esempio. Una sestica di S_3 con punto doppio sia l'intersezione di una superficie cubica e di una quadrica che si toccano ivi ($p = 3$). Essa è segata dai piani di S_3 in una g^3_6 (non speciale completa) e dalle quadriche di S_3 in una g^8_{12} (non speciale e di deficienza 1).

I caratteri d'un piano multiplo ciclico la cui curva di diramazione è irriducibile e generale nel suo ordine.

Nota di MATTEO BOTTASSO.

Una delle vie che si possono seguire nello studio delle proprietà invarianti per trasformazioni birazionali delle superficie algebriche, cioè nello studio degli " enti algebrici doppiamente infiniti ", s'ottiene colla rappresentazione loro sopra un piano multiplo.

Data una superficie algebrica F^* che può riguardarsi priva di singolarità supponendola, ad es., immersa nello spazio a cinque dimensioni, sia $|C^*|$ una sua rete (qualsiasi) di grado n. Considerando una proiettività fra la rete $|C^*|$ e le rette d'un piano Π, ne seguirà una corrispondenza biunivoca fra i punti del piano ed i gruppi G_n dell'involuzione determinata sopra F^* dalla rete $|C^*|$, cioè una corrispondenza $(1, n)$ fra i punti di Π e quelli di F^*. La *curva di diramazione* D di Π è il luogo dei punti, ognuno dei quali ha due (almeno) dei suoi corrispondenti sopra F^* coincidenti, e corrisponde alla jacobiana J di $|C^*|$ sulla F^*.

Il piano Π può pure considerarsi costituito da n fogli sovrapposti (infinitamente vicini), in guisa venga ad intercedere una corrispondenza generalmente biunivoca fra F^* ed il piano stesso così concepito, chiamato *piano* n-*uplo*, o *piano multiplo d'indice* n. Allora la curva D non è altro che la curva di passaggio dall'uno all'altro degli n fogli sovrapposti.

Un piano n-uplo si dice *ciclico* quando il gruppo G_n degli n punti di F^* corrispondenti ad un punto mobile del piano genera una trasformazione birazionale ciclica Λ d'ordine n, la quale muta in sè la F^*. Cioè, in altri termini, quando l'equazione da cui dipende la determinazione dei punti di G_n è ciclica. Essa

può quindi ricondursi razionalmente alla forma binomia: s'ha allora della F^* il modello proiettivo

$$(1) \qquad z^n = f(x, y),$$

che nel seguito verrà sempre indicato con F.

I piani doppi son sempre ciclici; cioè di essi può sempre considerarsi il modello proiettivo del tipo

$$z^2 = f(x, y),$$

ed il loro studio si può ritenere esaurito per i casi più notevoli (*).

Il sig. A. Bottari (**) ha ottenuto i tipi dei piani multipli ciclici razionali d'indice primo, partendo dai tipi delle trasformazioni cicliche birazionali del piano assegnati dal Kantor e dal Wiman.

Nella presente Nota si rivolge lo studio ai piani ciclici (1), che designerò con Π_n, d'indice qualunque n, con curva di diramazione irriducibile e generale nel suo ordine.

Per via algebrica si trovano nei n[i] 7, 8 l'equazione delle curve canoniche ed i caratteri del sistema da esse formato, cioè i caratteri invariantivi di Π_n. Il tutto è dedotto dall'equazione delle superficie aggiunte ad F, la cui ricerca è stata premessa nel n° 6. Per trovare tali aggiunte occorre indagare la composizione del punto, singolare per F, all'infinito dell'asse z, per il che è opportuno considerare un fascio di sezioni della F per il punto indicato. Di qui la necessità provata di scomporre la singolarità delle curve d'equazione $z^n = f(x)$, e di trovare l'equazione più generale delle curve aventi un comportamento assegnato nella singolarità della curva predetta: ciò forma l'oggetto dei n[i] 3, 4, 5.

(*) Cfr. Clebsch, *Ueber den Zusammenhang etc.*, " Math. Ann. ", III. — Nöther, *Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen*, " Sitz. d. ph. med. Soc. zu Erlangen ", 1878. — Enriques, *Sui piani doppi di genere uno*, " Mem. della Soc. Ital. dei XL ", serie III, vol. X.

(**) *Sulla razionalità dei piani multipli* $\left\{ X, Y, \sqrt[n]{F(xy)} \right\}$, " Ann. di Mat. ", serie 3[a], t. II).

Nel n° 1 si è trovata la relazione che sussiste fra l'ordine m della curva di diramazione (completa) irriducibile e l'indice n del piano ciclico. E nel seguente n° 2 ho creduto bene di mostrare come si possono ottenere rapidamente per via geometrica i caratteri fondamentali del piano Π_n, fra cui il genere lineare ed il genere superficiale; il che serve anche di controllo ai risultati dei numeri successivi.

È facile ottenere, tenendo presente lo svolgimento di questa Nota, l'equazione delle superficie r-aggiunte ad F, e quindi l'equazione (ed i caratteri) dei sistemi r-canonici di Π_n. È però più importante, benchè più arduo, lo stabilire quali modificazioni subiscono i risultati qui ottenuti quando la curva di diramazione acquisti delle singolarità (puntuali), restando o no irriducibile. Così si ottengono infatti i caratteri di classi estese di superficie dei varî generi, segnando perciò un passo notevole nella classificazione generale delle superficie algebriche.

In un prossimo studio esporrò appunto i risultati ottenuti quando la curva di diramazione irriducibile presenta certe singolarità elementari esaurendo anche, essenzialmente, il caso del piano triplo a curva di diramazione irriducibile.

1. — Vediamo dapprima la *relazione che lega l'ordine* m *di* D *e l'indice* n *di* Π_n.

Supposto che nella (1) l'ordine della curva $f(x, y) = 0$ sia $m = nh - r$, ove h, r sono interi positivi, l'ultimo dei quali può esser nullo, ed è $r < n$, s'applichi la trasformazione birazionale

$$x = \frac{aX + bY + c}{a_0X + b_0Y + c_0}, \quad y = \frac{a'X + b'Y + c'}{a_0X + b_0Y + c_0}, \quad z = \frac{Z}{(a_0X + b_0Y + c_0)^h},$$

ove le due prime formole rappresentano un'omografia non degenere, ω, del piano Π.

La F si trasformerà in una superficie d'equazione

$$Z^n = \varphi(X, Y) \,.\, (a_0X + b_0Y + c_0)^r, \tag{2}$$

ove $\varphi(X, Y) = 0$ è la trasformata di $f(x, y) = 0$ mediante ω, e la $a_0X + b_0Y + c_0 = 0$ corrisponde nella stessa omografia ω alla retta impropria del piano (x, y). La curva di diramazione in (2) è costituita dalla $\varphi(X, Y) = 0$ e dalla $a_0X + b_0Y + c_0 = 0$ con-

tata r volte: quindi in (1), cioè per Π_n, la retta all'infinito risulta di diramazione se è $r > 0$; ed in ogni caso *la curva di diramazione completa di* Π_n *è d'ordine* $hn - r + r = hn$. Ne segue che: *Se* (come supponiamo) *la curva di diramazione (completa)* D *d'un piano multiplo ciclico d'indice* n *è irriducibile, l'ordine* m *di* D *è un multiplo di* n; cioè s'ha la relazione, che converrà tener sempre presente nel seguito:

$$(3) \qquad m = hn,$$

ove h è un intero positivo (*).

Ricerca per via geometrica dei caratteri fondamentali del piano ciclico Π_n.

2. — Le rette C_R del piano Π_n formano una rete $|C_R|$, di grado n, il cui genere indicherò con p. Per determinare questo numero basta applicare la formola che dà il numero dei punti doppi di una serie g_n^1, tenendo conto che ogni punto n-uplo conta per $n-1$ punti doppi, e s'ha così

$$m(n-1) = 2(p + n - 1),$$

dalla quale, per la (3), s'ottiene

$$(4) \qquad p = \frac{1}{2}(n-1)(m-2) = \frac{1}{2}(n-1)(nh-2).$$

Una C_R tangente a D in un punto A è di genere minore di p, in quanto la sezione corrispondente C_R' di F acquista in A una singolarità determinata; e si può riconoscere che, supposta la D dotata di convenienti singolarità tangenziali, si hanno sopra Π_n delle C_R razionali, almeno per $h=1$ od $n=2$. Una qualsiasi, $\mathcal{C}_R$, di queste curve non può però esser *eccezionale* (**),

(*) Questa dimostrazione m'è stata suggerita dal mio amico il Prof. Severi; io avevo dedotto questa proprietà dal teorema III, del n° 5.

(**) Vedi Castelnuovo ed Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche*, " Ann. di Matem. ", serie III, 6°; 1901 (cap. III).

cioè non può esser trasformata in un punto R d'una F^* immagine del nostro Π_n. Infatti una curva eccezionale $\mathcal{E}$ d'una F è razionale e non ha punti multipli fuori dei punti singolari (eventuali) di F, poichè della $\mathcal{E}$ supposta irriducibile dev'esser nullo il *genere virtuale*. Quindi la $\mathcal{C}_R'$, con punti multipli fuori del punto dell'infinito dell'asse z non può essere eccezionale per F, cioè la C_R non può essere eccezionale per Π_n. Per $m=n$ se la D ammette in un punto A una tangente n-punto, C_R, la sezione C_R' corrispondente sopra F sarà spezzata in n rette per A: ma nessuna di queste può esser eccezionale per F, com'è facile verificare osservando che la F considerata è priva di singolarità puntuali.

Da quanto precede emerge ancora che, ove esistano su Π_n curve eccezionali, esse devono essere rette o coniche; e come si è ora escluso che possano esser tali le rette, si riconosce similmente che debbono pure escludersi le coniche; cioè *sul piano ciclico* Π_n *non vi sono curve eccezionali.*

Ciò premesso, le curve canoniche C_Σ di Π_n dovranno incontrare una C_R della rete $|C_R|$ in un numero N di punti che sommati ad un gruppo di punti G_n della serie caratteristica, debbono formare un gruppo della serie canonica g_{2p-2}^{p-1} di C_R stessa (essendo Π_n privo di curve eccezionali (*)).

S'avrà quindi come *ordine* N *delle curve canoniche* C_Σ *sopra* Π_n,

$$(5) \qquad N=2(p-1)-n=n(nh-h-3).$$

Ad ogni curva C^* della superficie F^*, che non sia mutata in sè dalla trasformazione birazionale ciclica Λ, corrisponde sul piano Π_n una curva semplice C, la quale ha esclusivamente dei contatti n-punto con D, nei punti che essa ha in comune con questa curva. Invero, in ognuno di tali punti comuni a C e D non s'ha diramazione e quindi, poichè nell'intersezione corrispondente di C^* con D^* coincidono gli n punti del gruppo omologo sopra F^* del punto considerato di Π_n, in questo debbono cadere n intersezioni di C con D. Ad una curva di F^*, mutata in sè dalla trasformazione Λ, corrisponde sul piano Π_n una curva

(*) F. Enriques, *Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche*, " Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino ", serie II, t. XLIV, 1893 (II, 2, 3, ...).

n-upla, la quale ha quindi ancora (esclusivamente) degli incontri n-punto con D.

In particolare le C_Σ avranno con D dei contatti n-punto tutti variabili (poichè F non ha alcuna singolarità sopra D, generale nell'ordine suo m), in numero di

$$(6) \qquad (D, C_\Sigma) = nh(nh - h - 3).$$

La curva D contata $n-1$ volte costituisce, sopra Π_n, la jacobiana C_j della rete $|C_R|$. Se π_j è il genere ed n_j è il numero delle *intersezioni* di tale curva *con se stessa* (od il *grado virtuale* (*) del sistema di Π_n a cui essa appartiene), per la proprietà caratteristica poc'anzi ricordata del sistema canonico, s'avrà:

$$(7) \qquad 2\pi_j - 2 = n_j + (n-1)(D, C_\Sigma).$$

D'altra parte riferendoci, per es., sopra la superficie F^*, semplice in corrispondenza birazionale con Π_n, alle curve C^*_R, C^*_Σ, C^*_j, omologhe rispettivamente delle C_R, C_Σ, C_j, ed ai sistemi lineari $|C^*_R|$, $|C^*_\Sigma|$, $C^*_j|$, dalla relazione (**).

$$|C^*_j| = |C_\Sigma + 3C^*_R|,$$

si hanno le note formole

$$(8) \qquad \begin{cases} \Omega = \pi_j - 9(p-1), \\ \Omega - 1 = n_j - 12(p-1) - 3n, \end{cases}$$

ove con Ω si è indicato il genere di $|C^*_\Sigma|$. Da questo si trae

$$n_j - \pi_j = 3(p+n-1) - 1,$$

che insieme alla (7) permette di ottenere i valori di π_j, n_j

$$\begin{cases} \pi_j = (n-1)(D, C_\Sigma) + 3(p+n-1) + 1 \\ n_j = (n-1)(D, C_\Sigma) + 6(p+n-1). \end{cases}$$

(*) V. ad es. F. Enriques, *Intorno ai fondamenti della Geometria sopra le superficie algebriche*, " Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino ", t. XXXVII, 1901 (n° 12). — Cfr. pure F. Severi, *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, " Atti " citati, t. XXXIX, 1904 (n° 1).

(**) Vedi F. Enriques, *Intorno ai fondamenti della Geometria, ecc.*, dianzi citato, al n° 24.

Si può, dopo ciò, mediante una delle (8) ricavare Ω e si ha

(9) $$\Omega=(n-1)(D, C_\Sigma)-6(p-1)+3n+1.$$

Poichè non esistono sopra Π_n delle curve eccezionali (*), l'invariante relativo Ω di Π_n coincide col *genere lineare* (**) $p^{(1)}$ del piano ciclico considerato, o genere delle curve canoniche C_Σ. S'ha dunque, per D generale,

(9)' $$\Omega=p^{(1)}=n[(n-1)h-3]^3+1.$$

L'altro invariante relativo I (***), corrispondente ad un fascio di curve della superficie, si può ottenere facilmente considerando un fascio di rette C_R sopra Π_n. In questo il numero σ dei punti base è n; il genere p delle curve è dato dalla (4); quindi dell'espressione

$$I=\delta-\sigma-4p$$

basta trovare il numero δ delle curve del fascio con punto doppio. Tali C_R son quelle che risultano tangenti alla curva di diramazione D, generale nell'ordine m; perciò sono in numero di $m(m-1)$ e dovendo ognuna di esse contarsi $n-1$ volte s'ha

$$\delta=m(m-1)(n-1),$$

e quindi

(10) $$I=nh(nh-1)(n-1)-n-4p.$$

Ottenuti così gl'invarianti relativi Ω ed I, si può subito trovare, mediante la nota relazione (****)

$$12P_a=I+\Omega-9,$$

il *genere aritmetico* di Π_n, e s'ottiene (dalle (4), (6), (9), (10))

(11) $$P_a=\frac{1}{12}n(n-1)h(2nh-h-9)+n-1.$$

(*) Per queste e per tutti i caratteri invariantivi d'una F^*, si veda F. Enriques, *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche*, " Mem. della Soc. It. dei XL ", serie 3ª, t. X, 1895; oltre al già citato Castelnuovo ed Enriques, *Sopra alcune questioni, ecc.*, " Ann. di Matem. ", serie III, 6°, 1901 (cap. II e III).

(**) Nöther, *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde*, " Math. Ann. ", t. II ed VIII.

(***) Vedi C. Segre, *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche*, " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", XXXI, 1896.

(****) Castelnuovo ed Enriques, loc. cit., II, 6.

Nel caso esaminato in cui la curva $f(x, y) = 0$ irreducibile è priva di singolarità puntuali si può vedere facilmente, com'è stato mostrato dal PICARD (*), che tutti i cicli lineari sopra la superficie (1) si possono ridurre ad un punto. Quindi la (1) stessa, cioè Π_n, è *regolare*, ossia il genere aritmetico P_a coincide col *genere geometrico* P_g di Π_n.

Proprietà sopra alcune singolarità superiori di una curva piana in un suo punto.

3. — TEOREMA I. " *Ogni curva piana la cui equazione omogenea è del tipo*

$$(12) \qquad \varphi_m(x,y,t) = \sum_{k=0}^{k=s} x^{h(s-k)} y^k \varphi_{m-hs+(h-1)k}(x,t) + \sum_{k=s+1}^{k=m} y^k \varphi_{m-k}(x, t) = 0,$$

dove le φ *sono forme nelle variabili* x, y, t *che in esse compaiono d'ordine eguale al rispettivo indice, possiede come infinitamente vicini e successivi all'origine* A_t, *punto* s-*uplo per la curva, altri* h — 1 *punti* s-*upli appartenenti all'asse* x (y = 0) ".

Supponiamo infatti d'aver una curva piana, con punto s-uplo nell'origine A_t, la cui equazione si possa scrivere

$$(12)' \qquad \varphi_m(x, y, t; h, s) = \sum_{k=0}^{k=s} x^{h(s-k)} y^k \varphi_{m-h(s-k)-k}(x, y, t) = 0,$$

dove m, h, s sono numeri interi positivi assegnati. Inoltre le φ, come si sottintenderà sempre nel seguito (salvo indicazione in contrario) per qualsiasi simbolo funzionale affetto da un indice libero, rappresentano forme nelle variabili x, y, t in esse designate di ordine eguale al rispettivo indice. Si userà invece, nel seguito, di affettare con un indice racchiuso fra parentesi [ ] i simboli funzionali che rappresentano polinomi nelle variabili in esse indicate, di ordine eguale all'indice stesso: omettendo

(*) PICARD et SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (Paris, Gauthier-Villars, t. I, 1897), pag. 90 e 91. Il ragionamento ivi esposto si riferisce al caso di $m = n$ ma s'applica, senza modificazioni sostanziali, al caso nostro dell'equazione (1).

solo tale parentesi per i simboli polinomiali quando non possa sorgere ambiguità. Un simbolo funzionale il cui indice risultasse negativo s'intenderà identicamente nullo: come si considereranno evanescenti i simboli funzionali d'una variabile il cui esponente risultasse negativo.

Applicando alla (12) la trasformazione quadratica

$$(13) \qquad \rho x = y_1 t_1, \qquad \rho y = y_1 x_1, \qquad \rho t = t_1(t_1 + y_1),$$

s'ottiene una curva la cui equazione, all'infuori delle rette corrispondenti a punti fondamentali, è della forma

$$(12_1)' \ \varphi^{(1)}_{m_1}(x_1, y_1, t_1; h-1, s) = \sum_{k=0}^{k=s} x_1^{(h-1)(s-k)} y_1^k \varphi^{(1)}_{m_1-(h-1)(s-k)-k}(x_1, y_1, t_1) = 0,$$

ove $m_1 \leq 2m - s$. Questa curva contiene, per $h > 1$, il punto $A_{t_1} \equiv (x_1 = 0,\ y_1 = 0,\ t_1 = 1)$ come s-uplo (e non con molteplicità maggiore se, come supponiamo, la $(12)'$ contiene A_t solo come s-uplo), con tutte le tangenti in esso coincidenti nella retta $y_1 = 0$ se $h > 2$, e generalmente tutte distinte fra loro se $h = 1$.

È utile osservare che la (13) si può pensare come prodotto di due omografie per una trasformazione quadratica, sotto la forma ordinariamente considerata (*), secondo la relazione simbolica

$$(14) \quad \begin{pmatrix} x_1 t_1, & y_1 x_1, & t_1(t_1 + y_1) \\ x, & y, & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x', & y' - x', & t' \\ x, & y, & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y''t'', & x''t'', & x''y'' \\ x', & y', & t' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 + y_1, & t_1, & x_1 \\ x'', & y'', & t'' \end{pmatrix}.$$

La (13) stessa ammette come trasformazione inversa

$$(13)' \qquad \rho x_1 = x(x + y), \quad \rho_1 y_1 = ty, \quad \rho_1 t_1 = tx,$$

(*) Si veda per es. l'Appendice del bel trattato del Prof. Bertini, *Introduzione alla Geometria Proiettiva degli iperspazî con appendice sulle curve algebriche e loro singolarità* (Pisa, E. Spoerri, 1907). — Son stato indotto a considerare la particolare trasformazione quadratica (13), perchè offre il vantaggio di potersi applicare replicatamente alla (12) per decomporne la singolarità nel punto A_t. Sta naturalmente per mera semplicità di forma l'ipotesi posta che la singolarità in esame sia nell'origine, e l'asse x sia la tangente singolare; per la stessa ragione si è considerata la (13) invece della trasformazione più generale

$$\rho x = x_1 t_1, \quad \rho y = y_1 x_1, \quad \rho t = (t_1 + \lambda y_1), \quad \text{ove} \quad \lambda \neq 0.$$

e come punti fondamentali nel primo piano

$$A_t \equiv (x=0, y=0, t=1), \quad A_y \equiv (x=0, y=1, t=0),$$
$$A_x' \equiv (x=1, y=-1, t=0),$$

e nel secondo piano

$$A_{x_1} \equiv (x_1=1, y_1=0, t_1=0), \quad A'_{t_1} \equiv (x_1=0, y_1=1, t_1=-1),$$
$$A_{y_1} \equiv (x_1=0, y_1=1, t_1=0).$$

Si riconosce pure facilmente (direttamente, o mediante la relazione (14)) che nei due piani si corrispondono proiettivamente le coppie di fasci con centri rispettivamente in A_t, A_{x_1}; A_y, A'_{t_1}; A'_x, A_{y_1}; quindi che ai punti dell'intorno di 1° ordine di A_t, A_y, A'_x corrispondono proiettivamente e rispettivamente i punti delle rette $x_1=0$, $t_1=0$, $t_1+y_1=0$; e, inversamente ai punti dell' intorno di 1° ordine di A_{x_1}, A'_{t_1}, A_{y_1}, corrispondono proiettivamente e rispettivamente i punti delle rette $t=0$, $x+y=0$, $x=0$.

In particolare al punto infinitamente vicino ad A_t nella direzione di $y=0$ corrisponde nel 2° piano il punto A_{t_1}.

Perciò, mentre mediante la $(12_1)'$ rimane verificato che per $h>1$ la $(12)'$ contiene il punto infinitamente vicino ad A_t sulla retta $y=0$ come s-uplo, risulterà pure dimostrato che a tale punto nella $(12)'$ seguono altri $h-2$ punti s-upli quando sia provato che la $(12_1)'$ presenta $h-2$ punti s-upli infinitamente vicini e successivi al suo punto s-uplo A_{t_1}. Ora la $(12_1)'$ è del medesimo tipo della $(12)'$: omettendo in essa (come superfluo ormai alla chiarezza) l' indice alle variabili x, y, t, e supposto $h-1>1$ si applichi di nuovo la (13); s'avrà, come equazione della curva trasformata (tralasciando nuovamente l'indice alle variabili):

$$(12_2)' \quad \varphi^{(2)}_{m_2}(x, y, t; h-2, s) = \sum_{k=0}^{k=s} x^{(h-2)(s-k)} y^k \varphi^{(2)}_{m_2-(h-2)(s-k)-k}(x, y, t) = 0.$$

Con ciò risulterà provato che per $h \geq 2$ il punto A_t di $(12)'$ contiene come infinitamente vicini e successivi ad A_t due punti s-upli, dei quali il primo almeno appartiene ad $y=0$; e come successivi ad essi, per $h>3$, tutti i punti multipli infinitamente vicini al punto A_t della curva $(12_2)'$.

Così continuando, applicando successivamente altre $h-3 \geq 0$ volte la trasformazione (13) sulla $(12_2)'$, si otterrà come risultato ultimo di questa serie di $h-1$ trasformazioni (13) sulla $(12)'$, una curva la cui equazione è della forma

$$(12_{h-1})' \quad \varphi^{(h-1)}_{m_{h-1}}(x, y, t; 1, s) \equiv \sum_{k=0}^{k=s} x^{s-k} y^k \varphi^{(h-1)}_{m_{h-1}-s}(x, y, t) = 0,$$

ove $$m_{h-1} \leq 2^{h-1}(m-s)+s.$$

Questa curva $(12_{h-1})'$ contiene ancora A_t come s-uplo, ma le tangenti in esso sono in generale tutte distinte: quindi la $(12)'$ contiene effettivamente come infinitamente vicini e successivi ad A_t, negli intorni di 1°, 2°, ..., $(h-1)$° ordine di A_t stesso, altrettanti punti s-upli i quali stanno sopra $y=0$, perchè questa retta incontra la $(12)'$ in A_t hs volte; ed in generale, cioè se le forme $\varphi(x,y,t)$ nella $(12)'$ sono generiche, non avrà altri punti multipli successivi a detti $h-1$ punti s-upli.

Ora la (12) rientra non solo, com'è ovvio, nel tipo $(12)'$, ma è un'altra forma (più esplicita) sotto la quale può scriversi l'equazione più generale di tale tipo: cioè ogni curva $(12)'$ può mettersi sempre sotto la forma (12); rimane quindi dimostrato il teorema enunciato.

4. — Si voglia ora vedere quale dev'essere la forma necessaria dell'equazione di una curva C' d'un certo ordine m', la quale contenga come infinitamente vicini e successivi ad A_t, coincidenti inoltre coi corrispondenti punti s-upli della (12), $h-1$ punti di eguale ed assegnata molteplicità s', oltre al possedere in A_t questa stessa molteplicità fissata s'.

L'applicazione replicata ad una tale curva di $h-1$ volte la trasformazione (13), condurrà ad una curva trasformata la cui equazione sarà del tipo $(12_{h-1})'$, cioè potrà scriversi così:

$$(15) \qquad \Psi^{(h-1)}_{m'_{h-1}}(x, y, t; 1, s') \equiv \sum_{k=0}^{k=s'} x^{s'-k} y^k \Psi^{(h-1)}_{m'_{h-1}-s'}(x, y, t) = 0,$$

ove si avrà $m'_{h-1} \leq 2^{h-1}(m'-s')+s'$.

Se eseguiamo sopra questa (dopo aver affisso alle varia-

bili x, y, t l'indice 1) la trasformazione (13)$'$, s'ottiene un'equazione di questa forma

$$\Psi^{(h-2)}_{m_{h-2}}(x, y, t; 2, s') \equiv \sum_{k=0}^{k=s'} x^{2(k-s')} y^k \Psi^{(h-2)}_{m_{h-1}-2(k-s')-k}(x, y, t) = 0.$$

Continuando in questo modo si vedrà che l'applicazione successiva di $h-1$ volte della trasformazione (13)$'$, inversa della (13), alla curva (15), conduce necessariamente ad una curva la cui equazione è del tipo (12)$'$

$$\Psi^{(0)}_{m'_0}(x, y, t; h', s') = 0.$$

Questa è dunque la forma che deve avere l'equazione della curva C' prima indicata; onde sarà pure necessariamente $m_0' = m'$, e l'equazione stessa si potrà scrivere sotto la forma (12). Quindi:

Teorema II. " *Ogni curva piana di dato ordine* m$'$ *la quale contenga gli stessi* h *punti infinitamente vicini e successivi a partire da* A_t, *posseduti come* s-*upli da una qualsivoglia curva* (12), *con una molteplicità assegnata* s$'$, *dovrà essere dello stesso tipo* (12), *cioè la sua equazione potrà scriversi*

$$\Psi_{m'}(x, y, t) \equiv \sum_{k=0}^{k=s'} x^{h(s'-k)} y^k \Psi_{m'-h(s'-k)-k}(x, t) + \sum_{k=s'+1}^{k=m'} y^k \Psi_{m'-k}(x, t) = 0. \text{ "}$$

Osservazione. I teoremi precedenti non cessano di sussistere quando le curve in essi considerate siano riducibili. Se, ad es., si suppone che la (12) si spezzi nella retta $y = 0$ contata r volte ed in una residua curva $\mathcal{C}_{m-r}$, d'ordine $m - r$, irriducibile, o, se riducibile tale che una sola sua parte passi per il punto A_t, l'equazione sua complessiva potrà scriversi

$$y^r \left\{ \sum_{k=0}^{k=s-r} x^{h(s-r-k)} y^k \varphi_{m-h(s-r-k)-k}(x, t) + \sum_{k=s+1}^{k=m-r} y^k \varphi_{m-r-k}(x, t) \right\} = 0.$$

Si vede così che la curva residua $\mathcal{C}_{m-r}$ possiede come $(s - r)$-upli $(s \geq r)$ gli h punti infinitamente vicini e successivi a partire da A_t della (12). Ossia che " *ogni curva la quale contiene sopra una parte irriducibile ciascuno degli* h *punti* s-*upli infinitamente vicini e successivi della* (12) *a partire da* A_t *con una data molteplicità* s$'$, *unita alla tangente singolare in* A_t *alla* (12),

cioè la y $= 0$ *contata un certo numero* $r \geq 0$ *di volte, forma una curva (riducibile) che contiene ognuno dei detti* h *punti infinitamente vicini colla molteplicità* $s' + r$ „.

5. — Dal teorema I si deduce il seguente

Teorema III. " *S'abbia una curva piana d'ordine* μ *la cui equazione sia della forma*

$$(16)\quad x^{\sigma}\varphi_{\mu-\sigma}(x,y,t) + y^{\varrho}\varphi_{\mu-\varrho}(x,y,t) + x^{\mu-\varrho+1}y^{\mu-\sigma+1}\psi_{\sigma+\varrho-(\mu+2)}(x,y) = 0,$$

che nell'ipotesi di $\sigma + \rho < \mu + 2$ *si riduce (necessariamente) alla forma*

$$(17)\quad x^{\sigma}\varphi_{\mu-\sigma}(x,y,t) + y^{\varrho}\varphi_{\mu-\varrho}(x,y,t) = 0,$$

ove σ, ρ *son interi positivi e le curve* $\varphi_{\mu-\varrho}(x,y,t)=0$, $\varphi_{\mu-\varrho}(x,y,t)=0$ *non passano per il punto* A_t. *S'indichino con*

$$h,\ h_0,\ h_1,\ \ldots,\ h_{r-1},\ h_r,$$

tutti i successivi quozienti e con

$$\rho_0,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_r,\ \epsilon$$

i resti corrispondenti che si ottengono nella ricerca del M. C. D. fra σ *e* ρ *col metodo delle divisioni successive. Allora, supposto ad es.* $\sigma > \rho$, *la curva considerata,* (16) *o* (17), *conterrà come infinitamente vicini e successivi al suo punto* A_t, ρ-*uplo,* $h - 1 \geq 0$ *punti* ρ-*upli sopra* $y = 0$, h_0 punti ρ_0-upli *il primo dei quali appartiene pure ad* $y = 0$, h_1 *punti* ρ_1-*upli,* ... h_r *punti* ρ_r-*upli. Il numero dei punti doppi a cui equivale l'insieme di tali punti multipli è*

$$\tau = \frac{1}{2}(\rho - 1)(\sigma - 1) + \frac{1}{2}(\rho_r - 1)(1 - \epsilon).\ „$$

S'avrà naturalmente $\epsilon = 0$ se è $\rho_r =$ M. C. D. (σ, ρ) ed $\epsilon = 1$ se gl'interi ρ e σ sono primi fra loro.

S'osservi anche che la (16) può mettersi sotto la forma più esplicita

$$(16)'\quad x^{\sigma}\sum_{k=0}^{k=\varrho-1} y^k\varphi_{\mu-\sigma-k}(x,t) + y^{\varrho}\sum_{k=\varrho}^{k=\mu} y^{k-\varrho}\varphi_{\mu-k}(x,t) +$$
$$+ x^{\mu-\varrho+1}y^{\mu-\sigma+1}\psi_{\sigma+\varrho-\mu-2}(x,y) = 0.$$

Infatti, ponendo nella (17) $\sigma = h\rho + \rho_0$, riesce anzitutto evidente, per il teorema I, che tale curva contiene $h - 1$ punti ρ-upli (e non di molteplicità superiore a ρ) infinitamente vicini e successivi ad A_t sulla retta di $y = 0$. Inoltre essa conterrà ancora come successive a questi, nell' intorno di h^0 ordine di A_t singolarità eguali a quelle situate sulla retta $x = 0$ all' infuori dei punti fondamentali $A_y \equiv (x = 0, y = 1, t = 0)$, $A_t' \equiv (x = 0, y = 1, t = -1)$, della curva che si ottiene applicando h volte la trasformazione quadratica (13) alla (17). La curva così trasformata (come si riconosce subito applicando, ad es., ancora una volta la (13) alla (12_{h-1}) corrispondente alla (12)') avrà un'equazione della forma

$$x^{\varrho_0} \varphi^{(h)}_{\mu_h - \varrho_0}(x, y, t) + y^{\varrho} \varphi^{(h)}_{\mu_h - \varrho}(x, y, t) = 0\,;$$

essa quindi contiene A_t come ρ_0-uplo, e non con molteplicità maggiore (poichè ciascuna delle forme $\varphi^{(h)}_{\mu_h - \varrho_0}$, $\varphi^{(h)}_{\mu_h - \varrho}$ contiene t al massimo esponente) ed ha in esso come unica tangente la retta $x = 0$. Ora l'equazione ultima è dello stesso tipo della (17), poichè scambiando in essa le variabili x, y diventa

$$x^{\varrho} \varphi^{(h)}_{\mu_h - \varrho}(x, y, t) + y^{\varrho_0} \varphi^{(h)}_{\mu_h - \varrho_0}(x, y, t) = 0\,;$$

onde, per essere $\rho = h_0 \rho_0 + \rho_1$, la curva rappresentata possiede come infinitamente vicini ad A_t altri $h_0 - 1$ punti ρ_0-upli.

Dunque la (17) contiene, come successiva alla 1ª serie di h punti ρ-upli infinitamente vicini a partire da A_t su $y = 0$, una seconda serie, se $\rho_0 > 1$, di h_0 punti ρ_0-upli, di cui il primo sta pure su $y = 0$ (che incontra (17) σ volte in A_t); ed a questi seguiranno punti di moltiplicità eguali a quelli posseduti dalla curva trasformata dell'ultima considerata, mediante l'applicazione di h_0 volte la (13), sulla $x = 0$ all'infuori dei punti A_y, A_t'.

È chiaro ormai come continuando si otterranno, nell'ipotesi di $\rho_0, \rho_1 > 1$, altre serie perfettamente analoghe di punti multipli, successivi a quelli già riconosciuti ed infinitamente vicini sempre ad A_t sulla curva (17), finchè mediante il procedimento indicato delle divisioni successive di σ per ρ, definito dalle relazioni

$$\begin{aligned} \sigma &= h\,\rho + \rho_0 \\ \rho &= h_0\rho_0 + \rho_1 \\ \rho_1 &= h_1\rho_1 + \rho_2 \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ \rho_{r-1} &= h_r\rho_r + \epsilon \end{aligned}$$

$$\rho > \rho_0 > \rho_1 > \ldots > \rho_{r-1} > \rho_r > \epsilon,$$

non si pervenga ad un resto ϵ nullo od eguale ad 1.

In ogni caso, come si è asserito, la singolarità nel punto A_t della curva (17) risulta composta di h punti ρ-upli, h_0 punti ρ_0-upli, ..., h_i punti ρ_i-upli (e non con molteplicità maggiore), ... h_r punti ρ_r-upli.

L'equivalente in punti doppi di tale singolarità sarà dunque espresso da

$$\tau = \frac{1}{2}\left\{ h\rho(\rho-1) + h_0\rho_0(\rho_0-1) + \ldots + h_r\rho_r(\rho_r-1)\right\},$$

ossia, tenendo conto delle relazioni scritte poc'anzi,

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma-1)(\rho-1) + \frac{1}{2}(1-\epsilon)(\rho_r-1).$$

Considerando ora la curva (16), non inclusa nella (17) per $\sigma + \rho \geq \mu + 2$, si applichi ad essa la trasformazione quadratica (13): si otterrà l'equazione

$$x_1^{\sigma-\varrho} t_1^{\sigma} \varphi_{\mu-\sigma}(t_1x_1, x_1y_1, t_1^2 + t_1y_1) + y_1^{\varrho} \varphi_{\mu-\varrho}(t_1x_1, x_1y_1, t_1^2 + t_1y_1) +$$
$$+ x_1^{\mu-\varrho} y_1^{\mu-\sigma+1} t_1^{\mu-\varrho+1} \varphi_{\sigma+\varrho-\mu-2}(t_1, y_1) = 0$$

della curva trasformata, la quale conterrà ancora A_t, come ρ-uplo, se $\sigma \geq 2\rho$.

Nel caso di $\sigma = 2\rho$ la curva ultima ha in A_t tangenti tutte distinte, quindi la (16) contiene come infinitamente vicino ad A_t un solo altro punto (multiplo) ρ-uplo, come è espresso nel teorema enunciato.

Se è $\sigma > 2\rho$ la curva trasformata avrà come unica tan-

gente nel punto ρ-uplo A_t la retta $y_1 = 0$, e poichè la sua equazione, essendo $\mu - \rho \geq \sigma - \rho$, può scriversi

$$x^{\sigma-\varrho} \Psi_{\mu'+\varrho-\sigma}(x, y, t) + y^{\varrho} \Psi_{\mu'-\varrho}(x, y, t) = 0,$$

ove nessuna delle due curve $\Psi_{\mu'+\varrho-\sigma}(x,y,t)=0$, $\Psi_{\mu'-\varrho}(x,y,t)=0$ passa per A_t, essa rientra nel tipo (17), dal che segue immediatamente che per la (16), nel caso considerato, vale la proprietà enunciata.

Questa infine sussiste pure nel caso di $\rho < \sigma < 2\rho$, poichè in tale ipotesi la curva trasformata con le (13) contiene A_t con la molteplicità $\sigma - \rho = \rho_0$, avendo in questo punto come unica tangente la retta $x = 0$, e l'equazione sopra scritta mediante la sostituzione $\begin{pmatrix} y\,x\,t \\ x_1\,y_1\,t_1 \end{pmatrix}$ ricade ancora nel tipo (17).

Resta così completamente dimostrato il teorema III. Per esso vale anche un'osservazione analoga a quella fatta nel n° 5 relativa alla non necessaria irriducibilità delle curve in esso contemplate.

Ricerca per via analitica dei caratteri del piano ciclico Π_n.

6\. — *Forma generale dell'equazione delle superficie aggiunte ad* F *di qualsivoglia ordine e loro grado d'infinità.*

Si consideri una sezione piana generica C'_R di F passante per il punto improprio, A_z, dell'asse z; ad es. quella posta nel piano $y = \lambda x$

$$z^n = f_{[m]}(x, \lambda x), \tag{18}$$

la quale equazione ridotta a forma omogenea diventa

$$t^{m-n} z^n = f_m(x, t). \tag{18$'$}$$

Tale equazione rientra nel tipo (16), poichè dopo aver fatto, per es., la sostituzione $\begin{pmatrix} x & t & y \\ x & z & t \end{pmatrix}$, può scriversi

$$\alpha_0 x^m + y^{m-n} [t^n - \Psi_n(x, y)] + x^{n+1} y \, \varphi_{m-n-2}(x, y) = 0;$$

ed in questa, essendo generica la sezione considerata (finchè cioè non passa per alcun punto improprio di $f_{[m]}(x, y) = 0$), la costante α_0 non può esser nulla, e quindi sarà applicabile alla forma ultima scritta della (18)$'$ il teorema III del n° precedente.

Dunque se è $m > n$, cioè nella (3) è $h > 1$, la $(18)'$ contiene come infinitamente vicini e successivi al punto $(m-n)$-uplo A_z, altri $h-1$ punti n-upli, appartenenti a $t=0$.

Dallo stesso teorema III segue ancora che il genere della sezione generica (non tangente a D) considerata, C'_R, è

$$p = \frac{1}{2}(m-1)(n-2) - \frac{1}{2}(m-1)(m-n-1) - \frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{2}(n-1)(m-2),$$

come si è ottenuto, colla (4), nel n° 2.

Al muoversi del piano sezione considerato per A_z, ad es. nel fascio $y = \lambda x$ d'asse $A_t A_z$, le singolarità indicate, infinitamente vicine e successive al punto $(m-n)$-uplo A_t, variano sulla superficie F mantenendo però inalterata la loro molteplicità. Quindi ognuno degli intorni infinitesimi di 1°, 2°, ..., $(h-1)$° ordine di A_t sopra F è tale che in un piano generico d'un fascio dà come sezione un punto n-uplo.

Seguendo le denominazioni introdotte dal Prof. SEGRE (*), ciò si esprime brevemente dicendo che *la superficie* F *contiene, per* h > 1, *come infinitamente vicine e successive al suo punto* (m — n)-*uplo* A_z, h — 1 " *rette infinitesime* „ n-*uple, tutte giacenti sul piano* t = 0 (*piano improprio*).

Ne segue che una superficie d'un dato ordine μ

$$\Psi_\mu(y, x, z, t) = 0 \tag{19}$$

aggiunta (**) ad F, per $h > 2$, dovrà possedere il punto A_z con la molteplicità $m - n - 2 = (h-1)n - 2 \geq 2$ (perchè si suppone, naturalmente, $n > 1$), e contenere come $(n-1)$-uple ciascuna delle menzionate $h-1$ rette infinitesime n-uple di F. Onde una sezione piana generica per A_z della (19), eseguita ad es., col piano $y = \lambda x$, dovrà essa pure contenere, per $h > 2$, il punto

(*) *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche*, " Ann. di Mat. „, serie 2ª, t. XXV, 1897. *Ordine* d'una linea infinitesima nell'intorno d'un punto è ivi chiamato l'ordine del cono che proietta dal punto (multiplo) considerato la linea stessa.

(**) La definizione di queste nel caso in cui la superficie di S_3 considerata abbia solo certe singolarità straordinarie o singolarità ordinarie è del NÖTHER. Vedasi p. es. *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens etc.*, " Math. Ann. „, VIII. Per altri casi vedasi ENRIQUES nell'*Introduzione alla Geometria ecc.* citata, V, 31.

A_z come $(m-n-2)$-uplo ed infinitamente vicini a questo altri $h-1$ punti $(n-1)$-upli coincidenti con quelli della sezione C'_R di F fatta dallo stesso piano considerato.

Per $h=1$ il punto A_z non impone alcuna condizione alle Ψ.

Per $h=2$ la Ψ non potrà contenere una retta infinitesima $(n-1)$-upla infinitamente vicina ad A_t, se non contiene questo punto con una molteplicità effettiva eguale (almeno) ad $n-1$, invece che ad $m-n-2=n-2$. D'altra parte se la Ψ contiene A_t come $(n-1)$-uplo, basterà abbia solo la molteplicità $n-2$ nella retta infinitesima ad esso successiva sulla F.

Si eseguisca infatti nello spazio di F una trasformazione cremoniana (quadratica per es.), la quale contenga A_z come punto fondamentale avente quale corrispondente nell'altro spazio una superficie (razionale) Z. A questa apparterrà la linea L' omologa della retta infinitesima L in A_z sulla F. — Se un sistema lineare $|\Psi|$ di superficie contiene A_z con una molteplicità effettiva maggiore della molteplicità virtuale (od assegnata) nel sistema trasformato $|\Psi'|$ andrà considerata come parte fissa la superficie Z contata tante volte quant'è la differenza δ fra le due molteplicità effettiva e virtuale di $|\Psi|$ in A_z.

Quindi perchè il sistema $|\Psi|$ contenga con una molteplicità assegnata ν la retta infinitesima L, basterà che $|\Psi'|$ liberato dalla parte fissa contenga L' con la molteplicità $\nu-\delta$, cioè che tale sia la molteplicità effettiva di L per $|\Psi|$.

Riconosciuto così il comportamento necessario delle Ψ in A_z, applico alla sezione generica $(18)'$, per questo punto di F, la trasformazione quadratica

$$(20) \qquad x=y't', \qquad z=t'(t'+x'), \qquad t=y'x',$$

che muta la $(18)'$ nell'equazione

$$x'^{(h-1)n}t'^{n}(t'+x')^{n}=y'^{n}f_{hn}(t',x')$$

di una curva d'ordine $m+n=(h+1)n$. E questa, se $h>1$, contiene per il teorema I (n° 3) $h-1\geq 1$ punti n-pli infinitamente vicini e successivi, a partire da $A_{t'}$, come omologhi degli $h-1$ punti n-upli della $(18)'$ infinitamente vicini ad A_t.

Quindi indicando con $\chi_{\mu'}(x',y',t')=0$ la trasformata mediante la (20) della sezione piana

$$(21) \qquad \Psi^{\mu}(x,\ \lambda x,\ z,\ t)=0,$$

complanare della (18)', dell'aggiunta (19) ad F, per il teorema II (n° 4), si avrà, supposto $h > 2$:

$$\chi_{\mu'}(x',y',t') = \sum_{k=0}^{k=n-1} x'^{(h-1)(n-k-1)} y'^k \chi_{\mu'-(h-1)(n-k-1)-k}(x',t') + \sum_{k=n}^{k=\mu'} y'^k \chi_{\mu'-k}(x',t').$$

Ora la trasformazione inversa della (20) che è

$$(20)' \qquad x' = tz, \; y' = x(x+t), \; t' = xz,$$

applicata alla curva $\chi_{\mu'}(x',y',t') = 0$, ci dà

$$(22) \qquad \sum_{k=0}^{k=n-1} z^{\mu'-k} t^{(h-1)(n-k-1)} x^k (x+t)^k \chi_{\mu'-(h-1)(k-n-1)-k}(t,x) +$$
$$+ \sum_{k=n}^{k=\mu'} z^{\mu'-k} x^k (x+t)^k \chi_{\mu'-k}(t,x) = 0;$$

e questa, all'infuori di rette fondamentali della trasformazione, deve coincidere con l'equazione (21).

Per quanto si è premesso tale sezione (21), quando $h > 2$, contiene A_t come $[(h-1)n-2]$-uplo ed incontra perciò ciascuna delle due rette fondamentali della trasformazione (20) fuori di A_t in $\mu - (h-1)n + 2$ punti, mentre incontrerà la terza retta fondamentale $z = 0$ in μ punti.

Ond'è che in generale (se cioè si suppone, per semplicità, che la (21) non contenga altro punto fondamentale della (20) all'infuori di A_z) si avrà

$$\mu' = 2\mu - (h-1)n + 2;$$

e nella trasformazione inversa (20)' della $\chi_{\mu'}(x',y',t') = 0$, cioè nella (22) si staccheranno i fattori

$$z^\mu, \; (x+t)^{\mu-(h-1)n+2}, \; x^{\mu-(h-1)n+2}.$$

Quindi si avrà come equazione (21), per $h > 2$: se è $\mu \geq hn - 3$,

$$\Psi_\mu(x, \lambda x, z, t) = \sum_{k=0}^{k=n-1} z^{\mu-(h-1)n-k+2} t^{(h-1)(n-k-1)} \Psi_{h(k+1)-3}(t, x, \lambda x) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{k=\mu-hn+2} z^k \Psi_{\mu-k}(t, x, \lambda x) = 0;$$

e se è $(h-1)n - 2 \leq \mu < hn - 3$,

$$\Psi_\mu(x,\lambda x,z,t) = t^{(h-1)(hn-\mu-3)} \sum_{k=0}^{k=\mu-(h-1)n+2} z^k t^{(h-1)k} \Psi_{(\mu-(h-1)n-k+3)h-3}(x,\lambda x,t) = 0;$$

mentre, com'è ovvio, non esiste alcun'aggiunta ad F, d'ordine $\mu < (h-1)n+2$.

Tenendo presente quanto s'è premesso per $h=2$, con ragionamento perfettamente analogo a quello indicato nel caso generale, si riconosce che valgono anche se $h=2$ le equazioni ottenute, purchè in esse si ritengano evanescenti le forme Ψ di indice negativo, come si è convenuto di fare sempre nel n° 3.

Dall'espressione trovata in tal guisa dell'equazione d'una sezione fatta col piano generico $y=\lambda x$ della (19) si deduce immediatamente l'equazione dell'aggiunta generale ad F, che, per il comportamento suo necessario nel punto A_z, dovrà essere:

per $\mu \geq hn-3$,

$$(23)\quad \Psi_\mu(x,y,z,t)=\sum_{k=0}^{k=\mu-hn+2} z^k \Psi_{\mu-k}(x,y,t)+\sum_{k=0}^{k=n-1} z^{\mu-hn+k+3} t^{(h-1)k} \Psi_{h(n-k)-3}(x,y,t)=0;$$

e per $(h-1)n-2 \leq \mu < hn-3$, astraendo dal piano $t=0$,

$$(24)\quad \Psi_\mu(x,y,z,t)=\sum_{k=0}^{k=\mu-(h-1)n+2} z^k t^{(h-1)k} \Psi_{h(\mu-(h-1)n-k+3)-3}(x,y,t)=0.$$

Ed una di queste (23) o (24), nella quale si riguardino come affatto arbitrarie le forme (ternarie) in essa indicate, rappresenterà *l'equazione più generale dell'aggiunte ad* F *di un dato ordine* μ, *quando* F *non abbia singolarità (puntuali) fuori di* A_z, *ovvero tali ulteriori singolarità, eventuali, non impongono nuove condizioni alle aggiunte stesse*: ad es. quando la $f=0$, irriducibile, è generale nel proprio ordine.

Se la curva di diramazione D di Π_n è generale nel proprio ordine hn, il *numero delle aggiunte ad* F *d'ordine* μ *linearmente indipendenti* è uguale dunque al numero dei coefficienti omogenei della (23) o (24), ossia è:

per $\mu \geq hn-3$,

$$(25)\quad P(\mu)=(\mu+3)_3-(hn)_3+\frac{1}{12}n(n+1)h[(2n+1)h-9]+n \quad (*);$$

(*) Come si userà anche nel seguito s'è posto $(n)_\nu$ invece di $\binom{n}{\nu}$.

e per $(h-1)n-2 \leq \mu < hn-3$,

$$(26)\quad P(\mu)=\frac{1}{12}(n-\nu'+1)(n-\nu')h\{[2(n-\nu')+1]h-9\}+n-\nu',$$

ove
$$\nu'=hn-\mu-3>0.$$

Si può pure determinare la forma effettiva sul piano Π_n del sistema lineare completo immagine di quello staccato sopra F dalle $\Psi_\mu=0$: basterà a tal fine eliminare la z fra la $F=0$, (1), e la (23) o (24).

7. — *Equazione e caratteri del sistema delle curve canoniche di* Π_n. *Genere superficiale e genere lineare di* Π_n.

Considerando in particolare le aggiunte d'ordine $m-4$, staccanti sopra F il sistema canonico $|C_{\Sigma_1}|$, s'avrà per la (24) come equazione generale di tali superficie, all'infuori del piano $t=0$ contato $h-1$ volte,

$$(27)\quad \Psi_{m-h-3}(x,y,z,t)=\sum_{k=0}^{k=n-2} z^k t^{(h-1)k}\Psi_{h(n-k-1)-3}(x,y,t)=0.$$

Ognuna di queste (Cfr. osserv. al n° 4), oltre all'avere in A_z la molteplicità $(h-1)(n-1)-2$, contiene come $(n-2)$-uple ciascuna delle $h-1$ rette infinitesime di F.

Il numero di tali superficie linearmente indipendenti, cioè il *genere superficiale (geometrico) di* F, sempre nell'ipotesi che la curva di diramazione D sia generale nel suo ordine, è per la (26)

$$P_g=\frac{1}{12}h(2hn-h-9)n(n-1)+n-1,$$

e coincide quindi, come deve per quanto s'è detto nel n° 2, col genere aritmetico P_a di F espresso dalla (11).

La proiezione sopra $z=0$ dell'intersezione di F con una (27), cioè l'*equazione esplicita delle curve canoniche* $|C_\Sigma|$ sul piano Π_n, sarà

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & f & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & f & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & f \\
\Psi_{h-3} & \Psi_{2h-3} & \dots & \Psi_{(n-2)h-3} & \Psi_{(n-1)h-3} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \Psi_{h-3} & \dots & \Psi_{(n-3)h-3} & \Psi_{(n-2)h-3} & \Psi_{(n-1)h-3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \Psi_{h-3} & \Psi_{2h-3} & \Psi_{3h-3} & \dots & \Psi_{(n-1)h-3}
\end{vmatrix} = 0,$$

od anche

$$(28) \qquad \Delta = \begin{vmatrix}
\Psi_{(n-1)h-3} & 0 & f.\Psi_{h-3} & f.\Psi_{2h-3} & \dots & f.\Psi_{(n-2)h-3} \\
\Psi_{(n-2)h-3} & \Psi_{(n-1)h-3} & 0 & f.\Psi_{h-3} & \dots & f.\Psi_{(n-3)h-3} \\
\Psi_{(n-3)h-3} & \Psi_{(n-2)h-3} & \Psi_{(n-1)h-3} & 0 & \dots & f.\Psi_{(n-4)h-3} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\Psi_{2h-3} & \Psi_{3h-3} & \Psi_{4h-3} & \Psi_{5h-3} & \dots & f.\Psi_{h-3} \\
\Psi_{h-3} & \Psi_{2h-3} & \Psi_{3h-3} & \Psi_{4h-3} & \dots & 0 \\
0 & \Psi_{h-3} & \Psi_{2h-3} & \Psi_{3h-3} & \dots & \Psi_{(n-1)h-3}
\end{vmatrix} = 0.$$

Lo sviluppo del determinante simmetrico Δ può essere scritto sotto la forma seguente

$$(28)' \qquad \Delta = \sum_{k=0}^{k=n-2} (-1)^{k(n-1)} f^k(x, y) \,.\, \Psi^n_{[(n-k-1)h-3]}(x, y) +$$

$$+ f(x, y) \,.\, \mathfrak{D}(\Psi_{[h-3]}(x, y), \dots, \Psi_{[(n-1)h-3]}(x, y); f(x, y)),$$

dove $\mathfrak{D}$ è un polinomio d'ordine $n-3$ in $f(x,y)$, i cui coefficienti sono forme determinate d'ordine n nelle $\Psi_{h-3}, \Psi_{2h-3}, \dots, \Psi_{(n-1)h-3}$,

ed ognuna di queste compare al più a grado $n-2$, cosicchè ogni termine di $\mathfrak{D}$ contiene almeno due delle Ψ_{lh-3} $(l=1,2,\ldots,n-1)$.

L'ordine di Δ nelle variabili x, y, cioè l'ordine delle curve canoniche C_Σ (28) sopra Π_n, è

$$N=n(nh-h-3),$$

come già si era ottenuto nel n° 2.

8. — Astraendo ora completamente dal modello proiettivo F del piano ciclico Π_n, si considerino in questo le curve C_Σ del sistema (28), dove le $\Psi_{lh-3}=0$ rappresentano curve piane d'ordine $lh-3$ $(l=1, 2, \ldots, n-2)$ perfettamente arbitrarie.

Il sistema in esame, di dimensione P_g-1, è formato da curve C_Σ d'ordine N, ognuna delle quali tocca con contatto n-punto la curva di diramazione (generale nel suo ordine) D di Π_n in ciascuno dei punti comuni a questa ed alla curva

$$\Psi_{[(n-1)h-3]}(x, y)=0.$$

Cioè tali contatti variabili di C_Σ con D formano i gruppi d'una serie lineare completa (poichè D è generale) sopra D, di ordine $nh(nh-h-3)$ e di dimensione $(nh-h-1)_2-1$: serie che è inoltre speciale, essendo $(h+2)_2$ il suo indice di specialità (*).

Considerando in particolare due curve C_Σ ridotte al tipo

$$\Psi^n_{[(n-1)h-3]}(x, y)=0,$$

cioè a curve n-uple generali nel loro ordine $(n-1)h-3$, ognuno degli $[(n-1)h-3]^2$ punti comuni a queste due curve riguardate come semplici, assorbirà n intersezioni delle due curve n-uple di Π_n. Basta infatti osservare che sulla superficie F^*, priva di singolarità e semplice in corrispondenza birazionale con Π_n, ciascuna delle C^*_Σ, omologhe delle due curve C_Σ considerate in Π_n, passa semplicemente per ognuno degli n punti distinti del gruppo dell'involuzione su F^* omologo ad uno qua-

(*) V. p. es. C. Segre, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, “ Ann. di Mat. ”, serie 2ª, t. XXII, 1894 od E. Bertini, *La Geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico* (Ibidem).

lunque dei punti comuni alle due C_Σ predette. Dunque il sistema delle curve (28) lineare sopra Π_n, sarà di grado

$$n[(n-1)h-3]^2 = \Omega - 1,$$

essendo Ω il genere delle curve canoniche, già ottenuto direttamente sopra Π_n stesso nel n° 2.

Si è così trovato che la dimensione $P_g - 1$ ed il grado del sistema (28) sopra Π_n coincidono con i caratteri omonimi del sistema canonico. Da ciò segue, non avendo i detti sistemi alcun punto base e poichè l'ultimo di essi è completo, che i due sistemi coincidono. Cioè rimane così confermato che l'equazione (28) $\Delta = 0$ *è l'equazione del sistema cononico* $|C_\Sigma|$ *sul piano* Π_n.

Supposto d'aver fissato ad arbitrio nell'equazione (28)

$$\Delta(x, y) = 0$$

tutti i parametri da cui dipende, cioè i coefficienti dei polinomi Ψ, ad eccezione di un qualsiasi coefficiente λ di $\Psi_{[(n-2)h-3]}(x,y)$, ad es. quello di $x^{i_1}y^{i_2}$ dove $i_1 + i_2 \leq (n-2)h - 3$, sia

$$\Delta(x, y; \lambda) = 0 \tag{28)*}$$

il sistema ∞^1 così ottenuto.

Queste curve (28)* hanno tutte un contatto n-punto con $f = 0$ in ciascuno dei punti d'incontro di questa curva con la $\Psi_{(n-1)h-3} = 0$ d'una qualunque delle (28)* stesse. Inoltre tali curve si toccano tutte con contatto d'ordine $i_1 - 1$ in ciascuno dei punti d'incontro di una di esse coll'asse $x = 0$; e con contatto d'ordine $i_2 - 1$ in ogni punto comune ad $y = 0$ e ad una curva del sistema; nè hanno, le (28)*, altri punti in comune a tutte (punti base del sistema), all'infuori di quelli indicati. E poichè l'inviluppo di tutte le curve canoniche è esclusivamente formato dalla curva di diramazione $f = 0$, ne seguirà che i punti d'incontro d'una curva generica $\Delta(x, y; \lambda) = 0$ con la curva infinitamente vicina ad essa nel sistema stesso (28)*

$$\Delta(x, y; \lambda + d\lambda) = 0,$$

all'infuori degli assi coordinati e della curva di diramazione, son i punti doppi della curva considerata. Cioè i punti doppi

(variabili) della curva generica di (28)* son le intersezioni di essa fuori di x, y, D, con la curva

$$x^{i_1}y^{i_2}f_{[m]}(x,y)\left\{n\Psi^{n-1}_{[(n-2)h-3]}(x,y;\lambda)\pm\frac{\partial}{\partial\Psi_{[(n-2)h-3]}}\mathcal{D}(\Psi_{[h-3]},\dots,\Psi_{[(n-1)h-3]};f)\right\}=0,$$

ossia son le intersezioni di essa con

$$n\Psi^{n-1}_{(n-2)h-3}\pm\frac{\partial}{\partial\Psi_{(n-2)h-3}}\mathcal{D}(\Psi_{h-3},\dots,\Psi_{(n-1)h-3};f)=0.$$

Se con d s'indica il numero di tali punti doppi variabili della (28)*, poichè ognuno di essi assorbe due intersezioni delle due curve ora esaminate, s'avrà

$$2d=(n-1)[(n-2)h-3]N,$$

cioè

$$d=\frac{1}{2}n(n-1)[(n-1)h-3][(n-2)h-3].$$

Non avendo la curva (28)* (curva canonica generica di Π_n) alcun punto base singolare, il suo genere (genere lineare di Π_n) si deduce subito dall'espressione di d ora ottenuta e si trova esser uguale ad Ω, quale è dato nel n° 2 dalla (9)'.

Raccogliendo s'avrà:

Le curve canoniche d'un piano ciclico Π_n, *d'indice* n, *avente come curva di diramazione una curva generale nel suo ordine* m = h n *d'equazione*

$$f(x,y)=0,$$

sono di ordine

$$N=n[(n-1)h-3];$$

di genere (genere lineare di Π_n)

$$\Omega=n[(n-1)h-3]^2+1;$$

e la dimensione del sistema da esse formato, cioè il genere superficiale di Π_n *è*

$$P=\frac{1}{12}n(n-1)h(2nh-h-9)+n-1.$$

L'equazione di tale sistema canonico sul piano è $\Delta=0$ *cioè, per* n > 3, *è del tipo*

$$\Delta=\Psi^n_{(n-1)h-3}(x,y)+f(x,y)\Psi^n_{(n-2)h-3}(x,y)+f^2(x,y)\Psi^n_{(n-3)h-3}(x,y)+\dots$$
$$\dots+f^{n-2}(x,y)\Psi_{h-3}(x,y)+f(x,y).\mathcal{D}(\Psi_{h-3}(x,y),\dots,\Psi_{(n-1)h-3}(x,y);f(x,y))=0,$$

ove $\Psi_{h-3}(x, y), \ldots, \Psi_{(n-1)h-3}(x, y)$ *son polinomi a coefficienti arbitrari nelle variabili* x, y *di ordine eguale a quello indicato dai rispettivi indici e* $\mathfrak{D}$ *è un polinomio di grado* $n-3>0$ *nella* $f(x,y)$, *i cui coefficienti sono forme determinanti d'ordine* n *nelle* $\Psi_{h-3}(x,y), \ldots \Psi_{(n-2)h-3}(x,y)$, $\Psi_{(n-1)h-3}(x,y)$, *contenenti ognuna di queste* Ψ *al più all'ordine* $n-2$.

I

$$d = \frac{1}{2} n(n-1)[(n-1)h-3][(n-2)h-3]$$

punti doppi variabili d'una curva qualunque del sistema, per $n>3$, *sono tutti e soli i punti d'incontro (contati ognuno due volte) di essa con la curva d'equazione*

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \Psi_{(n-2)h-3}} = 0$$

all'infuori della curva $f(x,y)=0$, *cioè i punti comuni alla curva considerata* $\Delta = 0$ *ed alla curva d'equazione*

$$n\Psi^{n-1}_{(n-2)h-3} \pm \frac{\partial}{\partial \Psi_{(n-2)h-3}} \mathfrak{D}(\Psi_{h-3}, \ldots, \Psi_{(n-2)h-3}, \Psi_{(n-1)h-3}; f) = 0.$$

In un piano ciclico triplo Π_3 *l'equazione delle curve canoniche si riduce a*

$$\Psi^3_{2h-3}(x,y) + f(x,y)\,\Psi^3_{h-3}(x,y) = 0,$$

e la curva generica del sistema contiene come tripli i $(2h-3)(h-3)$ *punti comuni alle due curve (arbitrarie)* $\Psi_{h-3}(x,y)=0$, $\Psi_{2h-3}(x,y)=0$, *senz'avere, in generale, altri punti multipli.*

In un piano doppio Π_2 *le curve canoniche sono curve doppie generiche* $\Psi_{h-3}(x,y)=0$ (*).

In ogni caso ciascuna delle curve canoniche tocca con contatti n-*punto la curva di diramazione nei punti d'un gruppo della serie, completa e speciale, segnata sulla curva di diramazione stessa da tutte le curve del piano d'ordine* $(n-1)h-3$.

(*) Cfr. NÖTHER, loc, cit., nella 2ª pag., od F. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperellittiche,* " Rendic. R. Acc. dei Lincei ", 1896.

Posizioni apparenti di stelle del Catalogo di Newcomb per il 1909.

Calcolate dal Dr. VITTORIO BALBI (*).

Le posizioni apparenti di stelle date nei fogli seguenti sono la continuazione pel 1909 di un lavoro intrapreso nel R. Osservatorio di Torino fino dal 1905, nell' intento di concorrere a colmare la notevole lacuna attualmente esistente nelle principali Effemeridi astronomiche, facilitando così la riosservazione di quelle stelle eseguita nel detto Osservatorio ed in parecchi altri.

(*) Presentate nell'adunanza del 14 giugno 1908.

Giorno del mese	44 σ Aquilae gr.: 5,3		14 Cygni gr.: 5,4		55 *e* Sagittarii gr.: 5,0		10 Vulpeculae gr.: 5,6		15 Cygni gr.: 5,0	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. australe	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1909	$19^h.34^m$	5°.11′	$19^h.36^m$	42°.36′	$19^h.37^m$	16°.20′	$19^h.39^m$	25°.32′	$19^h.40^m$	37°.7′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	39,90	19,7	26,36	26,2	16,38	22,1	53,29	70,7	57,35	62,0
11	39,99	18,1	26,39	23,1	16,47	22,4	53,36	68,2	57,39	59,1
21	^{12}40,10	16,6	^{12}26,47	19,9	^{2}16,61	22,6	^{13}53,49	65,6	^{13}57,47	56,1
31	40,25	15,1	26,60	16,8	16,78	22,8	53,66	63,1	57,60	53,1
Febbr. 10	40,43	13,8	26,78	13,9	16,97	22,9	53,87	60,9	57,77	50,4
20	40,64	12,7	27,01	11,3	17,20	22,9	54,13	58,9	57,98	48,0
Marzo 2	40,87	11,9	27,27	9,2	17,45	22,7	54,42	57,2	58,23	46,0
12	41,13	11,4	27,56	7,5	17,72	22,4	54,73	56,0	58,51	44,4
22	41,40	11,3	27,88	6,4	18,00	22,0	55,07	55,3	58,81	43,4
Aprile 1	41,68	11,5	28,22	5,9	18,30	22,4	55,43	55,1	59,13	43,0
11	41,97	12,0	28,58	6,1	18,61	20,7	55,80	55,4	59,46	43,1
21	42,27	12,8	28,94	6,8	18,93	19,8	56,16	56,2	59,80	43,8
Maggio 1	42,57	14,0	29,29	8,1	19,25	18,9	56,52	57,5	60,13	45,1
11	42,86	15,4	29,63	9,9	19,56	17,9	56,87	59,1	60,46	46,8
21	43,14	17,0	29,95	12,1	19,86	16,9	57,19	61,1	60,77	49,0
31	43,40	18,7	30,24	14,7	20,05	16,0	57,48	63,4	61,05	51,5
Giugno 10	43,64	20,5	30,50	17,5	20,41	15,1	57,74	65,9	61,30	54,3
20	43,85	22,4	30,71	20,6	20,65	14,3	57,95	68,6	61,52	57,2
30	44,03	24,2	30,87	23,8	20,85	13,7	58,12	71,2	61,69	60,3
Luglio 10	44,17	25,9	30,98	27,0	21,01	13,1	57,24	73,9	61,81	63,3
20	44,26	27,5	31,04	30,2	21,12	12,7	58,30	76,5	61,88	66,3
30	44,31	29,0	31,04	33,2	21,19	12,5	58,30	78,9	61,90	69,2
Agosto 9	44,32	30,3	30,99	36,0	21,21	12,4	58,25	81,2	61,87	71,9
19	44,29	31,3	30,89	38,5	21,19	12,4	58,14	83,2	61,78	74,3
29	44,21	32,2	30,74	40,8	21,13	12,5	57,99	84,9	61,65	76,4
Sett. 8	44,10	32,9	30,54	42,7	21,03	12,7	57,80	86,3	61,49	78,2
18	43,97	33,3	30,31	44,1	20,90	13,0	57,58	87,4	61,29	79,6
28	43,81	33,5	30,06	45,2	20,74	13,3	57,33	88,2	61,07	80,6
Ottobre 8	43,64	33,5	29,79	45,8	20,58	13,6	57,07	88,5	60,83	81,2
18	43,48	33,2	29,52	45,9	20,41	14,0	56,81	88,5	60,59	81,3
28	43,31	32,8	29,26	45,5	20,25	14,3	56,56	88,1	60,35	80,9
Nov. 7	43,17	32,2	29,01	44,6	20,11	14,6	56,34	87,2	60,13	80,1
17	43,05	31,3	28,79	43,2	20,00	15,0	56,14	86,0	59,93	78,8
27	42,96	30,2	28,60	41,4	19,92	15,3	55,98	84,5	59,77	77,0
Dic. 7	42,91	29,0	28,45	39,1	19,87	15,6	55,87	82,6	59,64	74,9
17	42,90	27,6	28,35	36,5	19,87	15,9	55,81	80,5	59,56	72,4
27	42,92	26,1	28,30	33,6	19,90	16,2	55,81	78,1	59,52	69,7
37	42,97	24,6	28,31	30,5	19,98	16,4	55,85	75,6	59,53	66,8
Posizione media	$19^h.34^m.42^s,21$ +5°.11′.23″,8		$19^h.36^m.28^s,81$ +42°.36′.27″,1		$19^h37.^m.18^s,88$ −16°.20′.16″,2		$19^h.39^m.53^s,92$ +25°.33′.13″,0		$19^h.40^m.59^s,72$ +37°.8′.3″,2	

Giorno del mese	56 *f* Sagittarii gr.: 5,1		8 ζ Sagittae gr.: 5,2		61 φ Aquilae gr.: 5,4		15 Vulpeculae gr.: 4,9		28 b^2 Cygni gr.: 5,2	
	Ascens. retta	Declinaz. australe	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1909	$19^h.41^m$	19°.58′	$19^h.44^m$	18°.54′	$19^h.51^m$	11°.9′	$19^h.57^m$	27°.29′	$20^h.6^m$	36°.33′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	0,74	55,8	54,13	45,1	53,45	50,5	18,90	63,9	0,54	76,0
11	[13] 0,83	55,9	54,18	42,8	53,51	48,7	18,94	61,4	[19] 0,54	73,1
21	0,96	55,9	[14] 54,28	40,6	[16] 53,60	46,9	[17] 19,01	58,8	0,59	70,2
31	1,13	55,8	54,41	38,4	53,73	45,1	19,13	56,3	0,69	67,4
Febbr. 10	1,33	55,7	54,58	36,4	53,90	43,5	19,28	53,9	0,83	64,7
20	1,56	55,5	54,77	34,7	54,09	42,2	19,46	51,8	1,01	62,2
Marzo 2	1,81	55,1	55,00	33,3	54,31	41,1	19,68	50,0	1,23	60,1
12	2,08	54,7	55,25	32,3	54,55	40,4	19,93	48,7	1,49	58,4
22	2,37	54,1	55,52	31,8	54,81	40,1	20,20	47,9	1,77	57,3
Aprile 1	2,68	53,4	55,80	31,7	55,09	40,1	20,49	47,5	2,08	56,7
11	2,99	52,6	56,10	32,1	55,38	40,6	20,80	47,7	2,41	56,7
21	3,32	55,8	56,40	32,9	55,67	41,4	21,11	48,4	2,74	57,2
Maggio 1	3,64	50,9	56,70	34,1	55,97	42,6	21,43	49,6	3,07	58,3
11	3,96	50,0	57,00	35,7	56,27	44,0	21,74	51,2	3,41	59,9
21	4,27	49,1	57,29	37,6	56,56	45,8	22,04	53,2	3,74	61,9
31	4,57	48,3	57,56	39,7	56,83	47,8	22,32	55,5	4,04	64,2
Giugno 10	4,84	47,6	57,80	42,0	57,08	49,8	22,58	58,0	4,31	66,9
20	5,08	47,0	58,02	44,4	57,30	51,9	22,81	60,7	4,55	69,8
30	5,29	46,5	58,20	46,9	57,49	54,1	22,99	63,4	4,74	72,8
Luglio 10	5,46	46,1	58,33	49,3	57,64	56,1	23,14	66,2	4,89	75,9
20	5,58	45,9	58,42	51,6	57,75	58,1	23,24	68,9	4,99	79,0
30	5,65	45,9	58,47	53,7	57,81	59,9	23,29	71,5	5,03	81,9
Agosto 9	5,68	46,0	58,47	55,7	57,83	61,6	23,29	73,9	5,04	84,7
19	5,66	46,2	58,43	57,5	57,80	63,0	23,25	76,1	4,99	87,3
29	5,60	46,5	58,35	59,0	57,73	64,2	23,16	78,0	4,89	89,6
Sett. 8	5,50	46,9	58,23	60,2	57,63	65,1	23,03	79,6	4,75	91,5
18	5,37	47,3	58,09	61,1	57,50	65,8	22,88	80,9	4,57	93,1
28	5,21	47,7	57,92	61,7	57,34	66,3	22,70	81,8	4,36	94,4
Ottobre 8	5,04	48,1	57,74	62,0	57,17	66,4	22,50	82,3	4,13	95,2
18	4,87	48,5	57,55	61,9	57,00	66,3	22,30	82,4	3,90	95,5
28	4,71	48,8	57,37	61,5	56,83	65,9	22,10	82,2	3,67	95,4
Nov. 7	4,57	49,1	57,20	60,8	56,68	65,3	21,91	81,5	3,45	94,8
17	4,45	49,3	57,06	59,7	56,55	64,4	21,74	80,4	3,25	93,8
27	4,36	49,4	56,95	58,3	56,45	63,2	21,60	79,0	3,07	92,3
Dic. 7	4,32	49,6	56,87	56,7	56,38	61,9	21,50	77,2	2,93	90,5
17	5,31	49,7	56,83	54,8	56,34	60,3	21,43	75,1	2,83	88,2
27	4,34	49,8	56,83	52,7	56,35	58,6	21,40	72,8	2,77	85,7
37	4,42	49,8	57,87	50,5	56,41	56,8	21,41	70,3	2,75	82,9
Posizione media	$19^h.41^m.3^s,28$ $-19°.58'.49'',4$		$19^h.44^m.56^s,39$ $+18°.54'.47'',9$		$19^h.51^m.55^s,71$ $+11°.10'.54'',2$		$19^h.57^m.21^s,17$ $+27°.30'.5'',8$		$20^h.6^m.2^s,85$ $+36°.34'.16'',5$	

Giorno del mese	20 Vulpeculae gr.: 6,2		67 ρ Aquilae gr.: 5,1		68 Draconis gr.: 5,7		30 Cygni gr.: 4,2		176 (Bode) Cygni gr.: 6,6	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1909	20^h.8^m	26°.12′	20^h.10^m	14°.54′	20^h.10^m	61°.47′	20^h.10^m	46°.32′	20^h.16^m	39°.5′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	9,45	22,0	1,80	68,4	2,62	72,1	24,00	24,4	52,09	58,4
11	20 9,48	19,5	20 1,84	66,4	20 2,52	68,8	20 23,97	21,3	22 52,08	55,5
21	9,54	17,0	1,91	64,4	2,50	65,4	24,00	18,1	52,11	52,5
31	9,64	14,6	2,02	62,5	2,56	61,9	24,09	14,9	52,49	49,6
Febbr. 10	9,78	12,3	2,16	60,8	2,71	58,6	24,23	11,9	52,32	46,8
20	9,96	10,2	2,34	59,3	2,94	55,5	24,41	9,1	52,50	44,2
Marzo 2	10,17	8,5	2,54	58,0	3,24	52,7	24,64	6,7	52,71	42,0
12	10,40	7,2	2,76	57,1	3,60	50,4	24,92	4,7	52,96	40,2
22	10,66	6,3	3,01	56,6	4,02	48,7	25,24	3,3	52,24	38,9
Aprile 1	10,95	6,0	3,29	56,6	4,49	47,6	25,58	2,4	53,55	38,2
11	11,25	6,1	3,58	57,0	4,98	47,1	25,94	2,2	53,88	38,1
21	11,56	6,8	3,88	57,7	5,48	47,3	26,31	2,6	54,22	38,5
Maggio 1	11,88	7,9	4,18	58,9	5,99	48,1	26,69	3,5	54,57	39,5
11	12,19	9,5	4,48	60,4	6,48	49,5	27,06	5,0	54,91	40,9
21	12,49	11,4	1,78	62,2	6,95	51,5	27,42	7,0	55,25	42,9
31	12,78	13,6	5,06	64,2	7,37	53,9	27,75	9,5	55,56	45,3
Giugno 10	13,05	16,1	5,32	66,4	7,74	56,7	28,05	12,3	55,85	47,9
20	13,28	18,7	5,56	68,7	8,05	59,8	28,31	15,3	56,10	50,8
30	12,48	21,4	5,76	71,0	8,29	63,2	28,52	18,5	56,31	53,9
Luglio 10	13,63	24,2	5,92	73,3	8,45	66,7	28,67	21,8	56,47	57,1
20	13,74	26,9	6,04	75,5	8,53	70,2	28,77	25,1	56,58	60,2
30	13,81	29,4	6,12	77,5	8,53	73,7	28,81	28,4	56,64	63,3
Agosto 9	13,82	31,8	6,15	79,4	8,45	77,1	28,79	31,5	56,65	66,2
19	13,79	34,0	6,14	81,1	8,28	80,3	28,71	34,4	56,60	68,9
29	13,72	36,0	6,08	82,6	8,05	83,2	28,58	37,0	56,50	71,4
Sett. 8	13,61	37,6	5,99	83,8	7,75	85,8	28,40	39,3	56,36	73,5
18	13,46	38,9	5,86	84,7	8,59	88,1	28,18	41,2	56,18	75,3
28	13,29	39,8	5,71	85,3	6,99	89,9	27,93	42,7	55,98	76,7
Ottobre 8	13,10	40,4	5,55	85,6	6,56	91,2	27,65	43,8	55,75	77,6
18	12,90	40,6	5,37	85,6	6,10	92,0	27,36	44,4	55,51	78,1
28	12,71	40,4	5,20	85,4	5,64	92,2	27,08	44,4	55,27	78,2
Nov. 7	12,52	39,8	5,04	84,8	5,19	91,9	26,80	43,9	55,03	77,8
17	12,35	38,9	4,90	83,9	4,76	91,0	26,54	43,0	54,81	76,9
27	12,21	37,6	4,78	82,8	4,37	89,6	26,31	41,5	54,62	75,5
Dic. 7	12,10	35,9	4,70	81,4	4,02	87,6	26,12	39,6	54,47	73,7
17	12,03	33,9	4,65	79,8	3,74	85,2	25,97	37,2	55,35	71,5
27	12,00	31,7	4,63	78,0	3,52	82,4	25,87	34,5	54,27	69,0
37	12,01	29,3	4,65	76,1	3,38	79,2	25,82	31,6	54,23	66,2
Posizione media	20^h.8^m.11^s,69 +26°.12′.23″,8		20^h.10^m.4^s,02 +14°.55′.11″,7		20^h.10^m.5^s,62 +61°.48′.9″,8		20^h.10^m.26^s,46 +46°.32′.23″,6		20^h.16^m.57^s,42 +39°.6′.58″,3	

Giorno del mese	40 Cygni gr. : 5,9		69 Aquilae gr. : 5,2		41 Cygni gr. : 4,3		42 Cygni gr. : 6,1		45 ω' Cygni gr. : 5,6	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. australe	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1909	$20^h.24^m$	$38°.8'$	$20^h.24^m$	$3°.11'$	$20^h.25^m$	$30°.2'$	$20^h.25^m$	$36°.8'$	$20^h.27^m$	$48°.38'$
	s	"	s	"	s	"	s	"	s	"
Genn. 1	9,68	28,2	51,44	24,5	38,46	51,2	49,87	62,1	11,98	44,8
11	9,66	25,4	51,48	25,5	38,46	48,7	49,85	59,3	11,93	41,8
21	9,69	22,5	51,55	26,4	38,50	46,1	49,88	56,5	11,93	38,6
31	^{23} 9,76	19,6	^{24}51,66	27,2	^{24}38,58	43,5	^{24}49,96	53,7	^{24}11,98	35,4
Febbr. 10	9,88	16,8	51,80	27,9	38,70	41,0	50,08	51,0	12,09	32,4
20	10,04	14,3	51,97	28,4	38,86	38,8	50,24	48,5	12,26	29,5
Marzo 2	10,25	12,1	52,16	28,7	39,05	36,9	50,44	46,4	12,48	26,9
12	10,49	10,3	52,38	28,8	39,28	35,4	50,67	44,7	12,75	24,8
22	10,76	9,0	52,63	28,7	39,54	34,4	50,94	43,4	13,05	23,2
Aprile 1	11,06	8,2	52,90	28,2	39,82	33,8	51,23	42,7	13,39	22,4
11	11,38	8,0	53,18	27,4	40,12	33,8	51,55	42,5	13,76	21,7
21	11,72	8,4	53,47	26,4	40,44	34,3	51,88	42,9	14,14	21,9
Maggio 1	12,07	9,3	53,78	25,3	40,76	35,3	52,22	43,9	14,53	22,7
11	12,41	10,8	54,09	23,9	41,08	36,7	52,56	45,3	14,92	24,0
21	12,74	12,7	54,39	22,4	41,40	38,6	52,89	47,2	15,30	25,9
31	13,06	15,0	54,68	20,8	41,70	40,9	53,20	49,5	15,65	28,2
Giugno 10	13,35	17,6	54,96	19,2	41,98	43,4	53,49	52,1	15,97	30,9
20	13,61	20,5	55,22	17,6	42,23	46,1	53,75	54,9	16,25	33,9
30	13,82	23,6	55,44	16,0	42,45	48,9	53,96	57,9	16,48	37,1
Luglio 10	14,00	26,7	55,63	14,6	42,62	51,8	54,13	60,9	16,66	40,5
20	14,12	29,8	55,78	13,3	42,75	54,7	54,26	64,0	16,78	43,9
30	14,19	32,9	55,88	12,1	42,83	57,4	54,33	67,0	16,84	47,3
Agosto 9	14,21	35,8	55,94	11,2	42,86	60,1	54,35	69,9	16,84	50,5
19	14,17	38,5	55,96	10,4	42,84	62,5	54,32	72,6	16,78	53,5
29	14,08	40,9	55,93	9,8	42,78	64,6	54,25	75,0	16,66	56,3
Sett. 8	13,95	43,1	55,86	9,4	42,67	66,5	54,13	77,1	16,49	58,7
18	13,79	44,9	55,76	9,2	42,52	68,1	53,97	78,8	16,28	60,9
28	13,59	46,3	55,64	9,1	42,35	69,3	53,78	80,2	16,00	62,7
Ottobre 8	13,37	47,3	55,49	9,2	42,16	70,1	53,57	81,2	15,75	64,0
18	13,13	47,9	55,33	9,5	41,96	70,5	53,34	81,8	15,46	64,8
28	12,90	48,0	55,18	9,9	41,76	70,6	53,11	81,9	15,10	65,1
Nov. 7	12,67	47,7	55,04	10,4	41,56	70,2	52,89	81,5	14,87	64,9
17	12,46	46,9	54,91	11,0	41,38	69,3	52,69	80,7	14,59	64,1
27	12,27	45,6	54,80	11,7	41,22	68,1	52,51	79,4	14,34	62,9
Dic. 7	12,11	43,8	54,72	12,5	41,09	66,5	52,36	77,7	14,12	61,1
17	11,99	41,7	54,68	13,3	41,00	64,5	52,24	75,7	13,97	58,9
27	11,91	39,3	54,67	14,2	40,94	62,3	52,16	73,3	13,81	56,3
37	11,87	36,6	54,70	15,1	40,92	59,9	52,13	70,7	13,73	53,5
Posizione media	$20^h.24^m.11^s,97$ $+38°.8'.28'',1$		$20^h.24^m.53^s,69$ $-3°.11'.18'',3$		$20^h.25^m.40^s,69$ $+30°.3'.52'',2$		$20^h.25^m.52^s,14$ $+36°.9'.2'',1$		$20^h.27^m.14^s,45$ $+48°.38'.43'',2$	

Giorno del mese	4 ζ Delphini gr.: 4,8		29 Vulpeculae gr.: 5,0		7 κ Delphini gr.: 5,1		11 δ Delphini gr.: 4,5		12 γ Delphini gr.: 4,1	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1909	20h.31m	14°.21′	20h.34m	20°.52′	20h.34m	9°.45′	20h.39m	14°.44′	20h.42m	15°.47′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	1,12	31,6	25,16	50,8	40,42	50,7	10,49	47,8	24,05	42,1
11	1,13	29,8	25,16	48,7	40,44	49,2	10,50	46,0	24,05	40,2
21	1,17	27,9	25,20	46,4	40,50	47,5	10,54	44,2	24,09	38,3
31	[25] 1,27	26,1	[26] 25,28	44,1	[26] 40,59	45,9	[27] 10,62	42,4	[28] 24,17	36,4
Febbr. 10	1,39	24,4	25,40	42,0	40,71	44,5	10,73	40,7	24,27	34,7
20	1,55	22,9	25,55	40,2	40,86	43,3	10,88	39,1	24,41	33,1
Marzo 2	1,73	21,7	25,73	38,7	41,04	42,3	11,06	37,8	24,59	31,8
12	1,94	20,8	25,94	37,6	41,25	41,7	11,26	36,9	24,79	30,9
22	2,18	20,3	26,18	36,8	41,43	41,4	11,49	36,5	25,02	30,3
Aprile 1	2,44	20,2	26,44	36,5	41,74	41,4	11,75	36,4	25,27	30,2
11	2,72	20,6	26,73	36,7	42,02	41,3	12,03	36,7	25,55	30,4
21	3,02	21,3	27,03	37,3	42,31	42,6	12,32	37,4	25,85	31,1
Maggio 1	3,32	22,4	27,34	38,3	42,61	43,8	12,63	38,5	26,15	32,2
11	3,63	23,8	27,65	39,8	42,92	45,2	12,94	40,0	26,46	33,6
21	3,93	25,6	27,96	41,6	43,22	46,9	13,25	41,7	26,76	35,3
31	4,22	27,6	28,25	43,6	43,52	48,8	13,55	43,6	27,06	37,3
Giugno 10	4,50	29,8	28,53	45,9	43,80	50,9	13,82	45,8	27,34	39,5
20	4,75	32,1	28,78	48,4	44,05	53,0	14,07	48,1	27,60	41,9
30	4,96	34,4	29,01	51,0	44,27	55,1	14,30	50,4	27,83	44,3
Luglio 10	5,15	36,9	29,19	53,5	44,45	57,2	14,49	52,7	28,02	46,6
20	5,29	39,1	29,30	56,0	44,59	59,2	14,63	55,0	28,17	48,9
30	5,39	41,1	29,43	58,4	44,69	61,3	14,74	57,2	28,28	51,2
Agosto 9	5,44	42,9	29,48	60,7	44,75	62,8	14,80	59,2	28,34	53,3
19	5,45	44,6	29,48	62,8	44,77	64,3	14,81	61,0	28,36	55,1
29	5,41	46,1	29,44	64,6	44,74	65,6	14,78	62,5	28,35	56,7
Sett. 8	5,34	47,4	29,36	66,2	44,67	66,7	14,71	63,7	28,26	58,0
18	5,23	48,4	29,24	67,4	44,57	67,5	14,61	64,7	28,16	59,1
28	5,09	49,1	29,10	68,4	44,44	68,0	14,48	65,5	28,03	59,9
Ottobre 8	4,90	49,5	28,93	69,0	44,29	68,3	14,33	66,0	27,88	60,4
18	4,76	49,6	28,76	69,3	44,13	68,3	14,16	66,2	27,72	60,7
28	4,60	49,4	28,58	69,2	43,97	68,1	13,99	66,0	27,56	60,6
Nov. 7	4,44	49,0	28,41	68,8	43,82	67,7	13,85	65,6	27,40	60,2
17	4,30	48,3	28,25	68,1	43,68	67,0	13,70	64,9	27,25	59,5
27	4,17	47,3	28,12	67,0	43,56	66,1	13,57	64,0	27,12	58,5
Dic. 7	4,07	46,0	28,01	65,6	43,46	64,9	13,46	62,8	27,01	57,3
17	4,01	44,5	28,93	64,0	43,40	63,6	13,39	61,3	26,93	55,9
27	3,98	42,8	29,88	62,1	43,37	62,2	13,35	59,6	26,89	54,3
37	3,98	41,1	29,87	60,1	43,38	60,6	13,35	57,9	26,89	52,4
Posizione media	20h.31m.3s,28 +14°.21′.35″,1		20h.34m.27s,32 +20°.52′.52″,8		20h.34m.42s,59 +9°.45′.55″,0		20h.39m.12s,64 +14°.44′.51″,2		20h.42m.26s,18 +15°.47′.45″,3	

GIORNO DEL MESE	6 (Hev.) Cephei gr. : 4,6		18 ω Capricorni gr. : 4,4		7 Aquarii gr. : 5,7		59 f^1 Cygni gr. : 4,8		62 ξ Cygni gr. : 3,9	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. australe	Ascens. retta	Declinaz. australe	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1909	$20^h.43^m$	57°.14′	$20^h.46^m$	27°.15′	$20^h.51^m$	10°.2′	$20^h.56^m$	47°.9′	$21^h.1^m$	43°.33′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	2,96	74,4	21,09	47,0	56,80	56,9	41,55	57,6	34,96	54,6
11	2,84	71,6	21,12	46,5	56,82	57,4	41,47	54,9	35,88	51,9
21	2,78	63,4	21,18	45,9	56,86	57,8	41,43	51,9	34,85	48,9
31	[28] 2,79	65,0	[29] 21,29	45,2	[30] 56,94	58,1	[31] 41,44	48,8	[31] 34,87	45,9
Febbr. 10	2,87	61,7	21,43	44,3	57,06	58,3	41,52	45,7	34,94	43,0
20	3,03	58,6	21,60	43,3	57,21	58,4	41,64	42,9	35,06	40,3
Marzo 2	3,25	55,8	21,81	42,3	57,39	58,2	41,82	40,3	35,23	37,8
12	3,53	53,4	22,04	41,1	57,60	57,9	42,05	38,1	35,44	35,6
22	3,87	51,4	22,30	39,8	57,83	57,3	42,32	36,3	35,68	35,9
Aprile 1	4,26	50,0	22,59	38,5	58,08	56,6	42,63	35,1	35,98	32,8
11	4,68	49,3	22,90	37,2	58,36	55,6	42,97	34,4	36,30	32,2
21	5,12	49,2	23,22	35,8	58,65	54,4	42,34	34,3	36,65	32,2
Maggio 1	5,58	49,7	23,56	34,5	58,95	53,1	43,72	34,9	37,02	32,7
11	6,04	50,8	23,21	33,2	59,27	51,7	44,11	36,0	37,39	33,8
21	6,48	52,4	24,26	32,0	59,59	50,2	44,49	37,6	37,75	35,4
31	6,89	54,6	24,60	31,0	59,90	48,7	44,85	39,7	38,11	37,5
Giugno 10	7,27	57,2	24,93	30,1	60,20	47,2	45,19	42,2	38,44	40,0
20	7,61	60,1	25,23	29,4	60,48	45,7	45,50	45,0	38,74	42,8
30	7,88	63,3	25,50	28,9	60,73	44,4	45,77	48,1	39,00	45,8
Luglio 10	8,09	60,8	25,74	28,7	60,94	43,3	45,99	51,4	39,22	49,0
20	8,24	70,3	25,93	28,7	61,12	42,3	46,15	54,8	39,39	52,3
30	8,32	73,5	26,08	28,9	61,26	41,4	46,25	58,1	39,50	55,5
Agosto 9	8,31	77,2	26,18	29,2	61,05	40,7	46,29	61,4	39,56	58,8
19	8,24	80,5	26,23	29,9	61,39	40,3	46,28	64,6	39,56	61,8
29	8,10	83,7	26,22	30,6	61,39	40,0	46,20	67,5	39,51	64,7
Sett. 8	7,90	86,6	26,17	31,4	61,34	40,0	46,08	70,2	39,40	67,3
18	7,64	89,0	26,08	32,3	61,27	40,1	45,91	72,6	39,25	69,6
28	7,34	91,1	25,96	33,1	61,17	40,3	45,70	74,6	39,07	71,5
Ottobre 8	7,00	92,8	25,81	33,9	61,04	40,6	45,46	76,2	38,85	73,1
18	6,64	94,0	25,65	34,7	60,59	41,0	44,20	77,3	38,61	74,2
28	6,26	94,6	25,48	35,3	60,73	41,5	44,93	77,9	38,56	74,8
Nov. 7	5,88	94,8	25,31	35,8	60,59	42,1	44,65	78,1	38,11	74,9
17	5,52	94,3	25,16	36,1	60,45	42,7	44,39	77,7	37,87	74,5
27	5,18	93,2	25,04	36,2	60,34	43,2	44,13	76,8	37,64	73,7
Dic. 7	4,87	91,7	24,94	36,2	60,25	43,6	43,91	75,4	37,44	72,3
17	4,60	89,6	24,88	36,1	60,20	44,1	43,72	73,5	37,27	70,5
27	4,38	87,1	24,85	35,8	60,17	44,7	43,57	71,2	37,13	68,3
37	4,20	84,3	24,84	35,3	60,17	45,2	43,46	68,6	37,04	65,8
Posizione media	$20^h.43^m.5^s,64$ $+57°.15′.11″,3$		$20^h.46^m.23^s,56$ $-27°.15′.36″,1$		$20^h.51^m.59^s,02$ $-10°.2′.48″,7$		$20^h.56^m.43^s,90$ $+47°.9′.55″,1$		$21^h.1^m.37^s,22$ $+43°.33′.52″,3$	

Giorno del mese	63 f^2 Cygni gr.: 6,2		5 γ Equulei gr.: 4,7		3 Piscis Australis gr.: 5,6		96 (Bode) Cephei gr.: 5,5		66 υ Cygni gr.: 4,6	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. australe	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1909	$21^h.3^m$	47°.16′	$21^h.5^m$	9°.45′	$21^h.9^m$	27°.59′	$21^h.9^m$	59°.36′	$21^h.14^m$	34°.30′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	25,84	58,9	52,91	47,5	51,32	39,5	26,65	49,1	8,40	51,6
11	25,74	56,2	52,90	46,0	51,31	39,0	26,47	46,2	8,35	49,3
21	25,70	53,2	52,93	44,5	51,35	38,3	26,36	43,1	8,32	46,8
31	$_2$25,71	50,2	$_2$52,98	43,0	$_3$51,43	37,5	$_3$26,31	39,9	$_4$ 8,34	44,1
Febbr. 10	25,77	47,2	53,07	41,6	51,55	36,5	26,34	36,6	8,40	41,6
20	25,88	44,3	53,20	40,5	51,70	35,4	26,45	33,4	8,51	39,2
Marzo 2	26,05	41,7	53,55	39,6	51,88	34,2	26,64	30,5	8,65	37,0
12	26,27	39,4	53,53	39,0	52,10	32,9	26,89	27,9	8,83	35,2
22	26,53	37,6	53,74	38,7	51,34	31,5	27,21	25,7	9,06	33,8
Aprile 1	26,84	36,3	53,98	38,6	52,61	30,0	27,59	24,0	9,32	32,8
11	27,18	35,6	54,24	39,0	52,91	28,4	28,02	22,9	9,60	32,3
21	27,54	35,5	54,52	39,7	53,23	26,9	28,47	22,5	9,91	32,4
Maggio 1	27,92	35,9	54,82	40,8	53,57	25,4	28,94	22,6	10,24	33,1
11	28,31	36,9	55,13	42,2	53,91	23,9	29,42	23,4	10,58	34,2
21	27,70	38,5	55,44	43,9	54,27	22,6	29,90	24,8	10,93	35,8
31	29,67	40,6	55,74	45,8	54,61	21,4	30,37	26,7	11,26	37,8
Giugno 10	29,42	43,2	56,03	47,8	54,95	20,4	30,80	29,1	11,58	40,2
20	29,73	46,0	56,30	50,0	55,27	19,6	31,18	31,8	11,81	42,8
30	30,00	49,0	56,55	52,2	55,56	19,0	31,51	34,9	12,13	45,6
Luglio 10	30,23	52,2	56,77	54,3	55,81	18,7	31,77	38,3	12,35	48,6
20	30,40	55,5	56,95	56,3	56,03	18,6	31,97	41,8	12,53	51,7
30	30,51	58,9	57,08	58,2	56,20	18,8	32,09	45,4	12,66	54,7
Agosto 9	30,57	62,2	57,17	60,0	56,32	19,2	32,13	48,9	12,75	57,6
19	30,57	65,4	57,21	61,6	56,39	19,8	32,10	52,4	12,78	60,4
29	30,50	68,4	57,21	63,0	56,41	20,5	32,00	55,8	12,76	63,0
Sett. 8	30,38	71,1	57,17	64,2	56,38	21,4	31,83	58,9	12,69	65,4
18	30,22	73,5	57,09	65,1	56,31	22,3	31,59	61,7	12,59	67,4
28	30,02	75,6	56,99	65,7	56,21	23,3	31,30	64,1	12,45	69,1
Ottobre 8	29,79	77,3	56,86	66,0	56,08	24,2	30,97	66,1	12,28	70,5
18	29,53	78,5	56,71	66,0	55,92	25,1	30,60	67,7	12,09	71,5
28	29,26	79,2	56,56	66,2	55,75	25,8	30,21	68,8	11,89	72,0
Nov. 7	28,98	79,4	56,41	65,9	55,58	26,4	29,81	69,3	11,68	72,1
17	28,71	79,1	56,27	65,4	55,43	26,8	29,42	69,3	11,48	71,8
27	28,46	78,3	56,15	64,6	55,30	27,0	29,04	68,7	11,30	71,0
Dic. 7	28,24	77,0	56,04	63,5	55,19	27,1	28,69	67,5	11,13	69,8
17	28,04	75,2	55,96	62,3	55,12	27,0	28,57	65,8	10,99	68,2
27	27,88	73,0	55,91	60,9	55,08	26,7	28,10	63,6	10,89	66,3
37	27,77	70,4	55,89	59,5	55,06	26,3	27,89	61,0	10,81	64,1
Posizione media	$21^h.3^m.28^s,16$ +47°.16′.56″,2		$21^h.5^m.54^s,98$ +9°.45′.51″,9		$21^h.9^m.53^s,70$ −27°.59′.27″,4		$21^h.9^m.29^s,33$ +59°.36′.44″,2		$21^h.14^m.10^s,52$ +34°.30′.50″,9	

Giorno del mese	69 Cygni gr. : 6,2		61 *g* Cygni gr. : 5,3		73 ρ Cygni gr. : 4,2		72 Cygni gr. : 5,0		13 (Hev.) Cephei gr. : 5,5	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1909	$21^h.22^m$	36°.16′	$21^h.26^m$	46°.8′	$21^h.30^m$	45°.11′	$21^h.31^m$	38°.7′	$21^h.36^m$	57°.4′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	1,72	26,9	3,24	24,0	31,26	24,6	1,36	34,6	5,73	44,3
11	1,65	24,5	3,11	21,5	31,15	22,0	1,28	32,2	5,53	41,8
21	1,61	22,0	3,04	18,7	31,08	19,3	1,23	29,7	5,40	38,9
31	6 1,62	19,4	7 3,02	15,7	9 31,06	16,5	9 1,22	27,0	10 5,32	35,8
Febbr. 10	1,67	16,8	3,06	12,8	31,09	13,6	1,26	24,4	5,31	32,7
20	1,76	14,3	3,14	10,0	31,16	10,8	1,34	21,9	5,37	29,6
Marzo 2	1,90	12,1	3,28	7,4	31,29	8,2	1,47	19,5	5,50	26,6
12	2,08	10,2	3,46	5,1	31,47	5,9	1,64	17,5	5,70	23,9
22	2,30	8,6	3,70	3,2	31,70	4,0	1,85	15,9	5,97	21,6
Aprile 1	2,55	7,5	3,98	1,8	31,97	2,6	2,10	14,7	6,29	19,8
11	2,83	7,0	4,29	0,9	32,28	1,7	2,38	14,1	6,66	18,5
21	3,14	7,0	4,64	0,6	32,62	1,4	2,70	14,0	7,08	17,8
Maggio 1	3,48	7,6	5,01	0,9	32,99	1,7	3,03	14,4	7,52	17,8
11	3,83	8,6	5,40	1,7	33,36	2,5	3,38	15,3	7,98	18,3
21	4,17	10,1	5,78	3,1	33,74	3,8	3,74	16,8	8,44	19,4
31	4,51	12,1	6,16	5,9	34,11	5,7	4,09	18,7	8,89	21,1
Giugno 10	4,84	14,4	6,52	7,3	34,48	7,9	4,42	21,0	9,33	23,3
20	5,15	17,0	6,85	10,0	34,82	10,6	4,73	23,6	9,72	25,9
30	5,62	19,9	7,14	13,0	35,11	13,5	5,02	26,4	10,07	28,8
Luglio 10	5,65	22,9	7,39	16,2	35,36	16,7	5,27	29,4	10,37	32,0
20	5,84	26,0	7,60	19,4	35,56	19,9	5,47	32,5	10,60	35,4
30	5,98	29,0	7,75	22,7	35,72	23,2	5,62	35,6	10,77	38,9
Agosto 9	6,07	32,0	7,83	26,0	35,82	26,5	5,72	38,7	10,87	42,5
19	6,10	34,9	7,86	29,3	35,85	29,7	5,76	41,7	10,90	46,1
29	6,09	37,7	7,84	32,4	36,83	32,8	5,76	44,5	10,86	49,5
Sett. 8	6,03	40,1	7,76	35,2	35,76	35,6	5,71	47,1	10,75	52,7
18	5,93	42,3	7,63	37,8	35,64	38,2	5,61	49,4	10,58	55,6
28	4,79	44,2	7,45	40,0	35,48	40,4	5,47	51,3	10,36	58,3
Ottobre 8	5,62	45,6	7,25	41,8	35,29	42,3	5,31	52,9	10,09	60,6
18	5,43	46,7	7,02	43,2	35,06	43,7	5,12	54,2	9,78	62,4
28	5,23	47,3	6,77	44,2	34,82	44,7	4,91	55,0	9,45	63,7
Nov. 7	5,02	47,6	6,52	44,7	34,58	45,2	4,70	55,4	9,11	64,5
17	4,83	47,4	6,26	44,6	34,33	45,2	4,49	55,5	8,76	64,8
27	4,62	46,7	6,01	44,1	34,09	44,6	4,29	54,7	8,41	64,5
Dic. 7	4,45	45,5	5,79	43,0	33,87	43,6	4,11	53,6	8,08	63,7
17	4,30	44,0	5,59	41,5	33,67	42,1	3,95	52,2	7,78	62,4
27	4,18	42,1	5,42	39,5	33,50	40,2	3,82	50,4	7,52	60,5
37	4,10	39,9	5,29	37,2	33,37	37,9	3,72	49,2	7,31	58,2
Posizione media	$21^h.22^m.3^s,82$ +36°.16′.25″,6		$21^h.26^m.5^s,44$ +46°.8′.20″,7		$21^h.30^m.33^s,45$ +45°.11′.21″,3		$21^h.31^m.3^s,45$ +38°.7′.32″,7		$21^h.36^m.8^s,17$ +57°.4′.38″,8	

Giorno del mese	43 κ Capricorni gr. : 4,8		10 κ Pegasi gr. : 4,2		48 λ Capricorni gr. : 5,4		10 ν Cephei gr. : 4,4		14 Pegasi gr. : 5,4	
	Ascens. retta	Declinaz. australe	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. australe	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1909	$21^h.37^m$	19°.16′	$21^h.40^m$	25°.13′	$21^h.41^m$	11°.46′	$21^h.42^m$	60°.41′	$21^h.45^m$	29°.44′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	32,57	64,8	29,47	34,4	36,23	79,5	46,80	68,8	47,17	61,3
11	32,56	64,8	29,40	32,4	36,21	79,8	46,56	66,3	47,10	59,3
21	32,57	64,6	29,38	30,3	36,22	80,0	46,38	63,4	47,06	57,1
31	32,62	64,3	29,39	28,2	36,25	80,1	46,28	60,4	47,05	54,8
Febbr. 10	10 32,69	63,8	11 29,43	26,1	11 36,32	80,1	12 46,24	57,2	12 47,08	52,5
20	32,80	63,1	29,51	24,2	36,42	79,9	46,28	54,0	47,15	50,3
Marzo 2	32,94	62,3	29,62	22,5	36,55	79,5	46,41	50,9	47,26	48,4
12	33,11	61,3	29,77	21,0	36,70	78,9	46,61	48,1	47,41	46,7
22	33,31	60,1	29,96	19,9	46,90	78,1	46,88	45,7	47,59	45,4
Aprile 1	33,54	58,8	30,19	19,2	37,12	77,1	47,22	43,8	47,82	44,5
11	33,80	57,3	30,44	19,0	37,36	75,9	47,62	42,4	48,08	44,1
21	34,09	55,7	30,72	19,2	37,64	74,5	48,07	41,5	48,36	44,1
Maggio 1	34,40	54,1	31,02	19,9	37,23	73,0	48,55	41,3	48,67	44,7
11	34,72	52,5	31,34	21,0	38,24	71,4	49,05	41,7	48,99	45,7
21	35,05	50,8	31,67	22,4	38,56	69,7	49,55	42,7	49,33	47,1
31	35,38	49,2	31,99	24,3	38,88	68,0	50,04	44,2	49,66	48,9
Giugno 10	35,71	47,8	32,30	26,6	39,20	66,3	50,51	46,2	49,98	51,1
20	36,02	46,5	32,60	29,0	39,51	64,7	50,95	48,7	50,29	53,6
30	36,31	45,3	32,88	31,6	39,79	63,3	51,33	51,6	50,58	56,3
Luglio 10	36,58	44,4	33,12	34,3	40,04	62,0	51,66	54,8	50,83	59,1
20	36,81	43,7	33,03	37,0	40,27	60,9	51,92	58,2	51,04	61,9
30	36,99	42,2	33,49	39,7	40,46	60,1	52,11	61,8	51,20	64,8
Agosto 9	37,13	43,0	33,60	42,3	40,59	59,4	52,22	65,4	51,32	67,6
19	37,23	43,1	33,67	44,7	40,68	58,9	52,25	69,0	51,39	70,2
29	37,28	43,4	33,69	47,0	40,73	58,7	52,21	72,5	51,42	72,7
Sett. 8	37,28	43,8	33,67	49,1	40,73	58,7	52,10	75,9	51,40	75,0
18	37,24	44,3	33,61	50,9	49,69	58,8	51,92	79,0	51,33	77,1
28	37,16	44,9	33,52	52,4	40,61	59,1	51,67	81,8	51,24	78,8
Ottobre 8	37,05	45,6	33,39	53,6	40,51	60,6	51,37	84,2	51,11	81,2
18	36,92	46,4	33,24	54,4	40,40	60,1	51,04	86,2	50,96	81,2
28	36,78	47,1	33,08	54,9	40,27	60,7	50,67	87,7	50,79	81,9
Nov. 7	36,64	47,8	32,92	55,0	40,13	61,3	50,28	88,7	50,64	82,2
17	36,50	48,4	32,76	54,7	40,00	61,9	49,88	89,2	50,44	82,1
27	36,37	48,9	32,60	54,2	39,88	62,4	49,49	89,1	50,27	81,6
Dic. 7	36,26	49,3	32,46	53,3	39,77	63,0	49,11	88,4	50,10	80,7
17	36,17	49,6	32,34	52,0	39,68	63,5	48,75	87,1	49,97	79,4
27	37,11	49,7	32,24	50,4	39,62	63,9	48,44	85,3	49,86	77,8
37	36,08	49,7	32,17	48,6	39,59	64,3	48,18	83,1	49,78	75,9
Posizione media	$21^h.37^m.34^s,70$ −19°.16′.53″,1		$21^h.40^m.31^s.44$ +25°.13′.35″,1		$21^h.41^m.38^s,27$ −11°.47′.9″,4		$21^h.42^m.49^s,35$ +60°.42′.2″,4		$21^h.45^m.49^s,14$ +29°.45′.1″,0	

Giorno del mese	27 Pegasi gr.: 5,8		28 Pegasi gr.: 6,6		46 ρ Aquarii gr.: 5,3		31 Pegasi gr.: 5,1		27 δ Cephei gr.: 4,3	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. australe	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1909	$22^h.5^m$	$32°.43'$	$22^h.6^m$	$20°.31'$	$22^h.15^m$	$8°.16'$	$22^h.17^m$	$11°.44'$	$22^h.25^m$	$57°.56'$
	s	"	s	"	s	"	s	"	s	"
Genn. 1	9,77	40,0	10,20	47,7	22,85	52,5	60,55	42,7	45,20	64,6
11	9,68	38,0	10,13	46,0	22,80	53,0	60,49	41,4	44,94	62,5
21	9,61	35,9	10,09	44,3	22,78	53,4	60,45	40,1	44,73	60,1
31	9,58	33,6	10,08	42,5	22,78	53,6	60,43	38,8	44,57	57,4
Febbr. 10	[17] 9,58	31,3	[18] 10,10	40,8	[20] 22,81	53,3	60,45	37,5	44,48	54,4
20	9,62	29,0	10,15	39,1	22,87	53,7	[21] 60,50	36,3	[23] 44,45	51,4
Marzo 2	9,71	26,9	10,24	37,6	22,96	53,5	60,58	35,3	44,49	48,4
12	9,84	25,1	10,36	36,4	23,08	53,0	60,69	34,6	44,61	45,6
22	10,01	23,6	10,52	35,5	23,24	52,3	60,84	34,2	44,80	43,1
Aprile 1	10,22	22,5	10,72	35,0	23,43	51,4	61,02	34,1	45,06	40,9
11	10,47	21,8	10,95	34,8	23,65	50,2	61,24	34,3	45,38	39,2
21	10,75	21,6	11,21	35,1	23,90	48,8	61,49	34,9	45,76	38,0
Maggio 1	11,05	22,0	11,50	35,8	24,17	47,3	61,76	35,9	46,18	37,4
11	11,38	22,8	11,80	36,9	24,47	45,6	62,06	37,2	46,63	37,3
21	11,72	24,1	12,12	38,4	24,78	43,8	62,37	38,7	47,11	38,0
31	12,06	25,8	12,44	40,2	25,10	42,0	62,69	40,5	47,59	39,1
Giugno 10	12,40	27,8	12,76	42,2	25,42	40,2	63,00	42,5	48,06	40,8
20	12,73	30,2	13,07	44,5	25,73	38,4	63,30	44,7	48,51	43,0
30	13,03	32,9	13,36	47,0	26,03	36,6	63,59	47,0	48,93	45,5
Luglio 10	13,29	35,7	13,62	49,5	26,30	35,0	63,86	49,3	49,30	48,4
20	13,52	38,7	13,84	52,0	26,54	33,6	64,09	51,5	49,62	51,6
30	13,71	41,5	14,03	54,5	26,75	32,4	64,29	53,6	49,88	55,0
Agosto 9	13,85	44,4	14,17	57,0	26,92	31,4	64,45	55,6	50,07	58,5
19	13,95	47,3	14,27	59,3	27,04	30,7	64,56	57,5	50,19	62,1
29	14,00	50,0	14,33	61,4	27,12	30,3	64,63	59,2	50,25	65,6
Sett. 8	13,99	52,5	14,34	63,3	27,16	30,0	64,66	60,6	50,23	69,1
18	13,94	54,7	14,31	64,9	27,15	30,0	64,65	61,8	50,15	72,4
28	13,86	56,6	14,24	66,3	27,11	30,1	64,60	62,8	50,01	75,4
Ottobre 8	13,74	58,3	14,15	67,4	27,04	30,4	64,53	63,5	49,81	78,1
18	13,60	59,6	14,03	68,2	26,94	30,8	64,43	63,9	49,57	80,5
28	13,44	60,5	13,89	68,7	26,83	31,3	64,31	64,1	49,30	82,5
Nov. 7	13,27	61,0	13,74	68,9	26,71	31,9	64,18	64,1	48,99	84,0
17	13,09	61,1	13,60	68,7	26,58	32,5	64,08	63,9	48,66	84,9
27	12,91	60,8	13,45	68,3	26,46	33,2	63,92	63,4	48,32	85,3
Dic. 7	12,74	60,1	13,32	67,5	26,35	33,8	63,80	62,6	47,98	85,2
17	12,59	59,0	13,20	66,5	25,25	34,4	63,69	61,7	47,66	84,5
27	12,46	57,5	13,10	65,2	26,17	35,0	63,60	60,7	47,36	83,2
37	12,35	57,7	13,02	63,7	26,11	35,5	63,53	59,5	47,08	81,5
Posizione media	$22^h.5^m.11^s,67$ $+32°.43'.38'',6$		$22^h.6^m.12^s,05$ $+20°.31'.49'',5$		$22^h.15^m.24^s,70$ $-8°.16',42'',5$		$22^h.17^m.2^s,34$ $+11°.44'.46'',9$		$22^h.25^m.47^s,39$ $+57°.56'.57'',2$	

Giorno del mese	Cephei gr.: 7,2		13 Cephei gr.: 6,1		12 η Piscis Australis gr.: 5,4		20 Pegasi gr.: 5,6		22 Pegasi gr.: 5,1	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. australe	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1909	$21^h.50^m$	55°.47′	$21^h.51^m$	56°.10′	$21^h.55^m$	28°.53′	$21^h.56^m$	12°.41′	$22^h.1^m$	4°.36′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	0,58	66,0	47,29	53,7	34,60	40,9	37,46	57,2	3,56	42,3
11	0,38	63,5	47,08	51,3	34,56	40,3	37,41	55,9	3,51	41,2
21	0,23	60,8	46,93	48,6	34,56	39,5	37,39	54,4	3,50	40,2
31	0,14	57,9	46,83	45,6	34,58	38,6	37,39	53,0	3,51	39,2
Febbr. 10	0,11	54,8	14 46,80	42,5	15 34,63	37,5	15 37,43	51,6	3,54	38,3
20	14 0,15	51,7	46,84	39,4	34,73	36,2	37,49	50,3	16 3,61	37,5
Marzo 2	0,26	48,8	36,94	36,5	34,86	34,7	37,59	49,3	3,71	37,9
12	0,43	46,2	47,11	33,8	35,02	33,1	37,73	48,5	3,84	36,6
22	0,67	43,8	47,35	31,4	35,22	31,4	37,90	48,0	4,01	36,6
Aprile 1	0,97	41,8	47,64	29,5	35,45	29,6	38,10	47,9	4,20	36,9
11	1,32	40,5	47,99	28,1	35,72	27,7	38,33	47,8	4,43	37,4
21	1,71	39,7	48,39	27,3	36,01	25,8	38,59	48,1	4,69	38,3
Maggio 1	2,13	39,5	48,82	27,1	36,32	23,9	38,88	48,7	4,97	39,5
11	2,57	40,0	49,27	27,5	36,66	22,0	39,18	49,6	5,26	40,9
21	3,03	41,0	49,73	28,5	37,01	20,4	39,49	50,9	5,57	42,6
31	3,48	42,5	50,18	30,0	37,37	18,9	39,80	52,5	5,89	44,5
Giugno 10	3,91	44,5	50,61	32,0	37,72	17,5	40,11	54,4	6,20	46,5
20	4,31	47,0	51,02	34,5	38,06	16,3	40,41	56,4	6,50	48,5
30	4,67	49,9	51,38	37,3	38,38	15,4	40,69	58,6	6,78	50,5
Luglio 10	4,98	53,0	51,70	40,4	38,68	14,9	40,94	60,9	7,04	52,5
20	5,24	56,3	51,96	43,8	38,94	14,6	41,16	63,2	7,26	54,5
30	5,43	59,8	51,15	47,3	39,15	14,6	41,34	65,4	7,44	56,3
Agosto 9	5,55	63,4	52,28	50,8	39,32	14,8	41,48	67,6	7,59	57,9
19	5,61	67,0	52,34	54,4	39,44	15,5	41,58	69,6	7,69	59,3
29	5,60	70,4	52,33	57,8	39,51	16,1	41,62	71,5	7,75	60,5
Sett. 8	5,52	73,6	52,25	61,1	39,53	17,0	41,63	73,2	7,77	61,5
18	5,39	76,6	52,12	64,1	39,51	18,1	41,60	74,6	7,75	62,3
28	5,20	79,4	51,93	66,9	39,44	19,3	41,53	76,8	7,70	62,8
Ottobre 8	4,96	81,8	51,69	69,3	39,33	20,4	41,44	76,8	7,61	63,2
18	4,68	83,7	51,41	71,3	39,20	21,6	41,32	77,5	7,50	63,3
28	4,38	85,2	51,11	72,8	39,06	22,6	41,19	77,9	7,37	63,2
Nov. 7	4,06	86,2	51,78	73,8	38,91	23,5	41,05	78,0	7,24	62,9
17	3,73	86,6	50,45	74,3	38,76	24,2	40,91	77,7	7,11	62,5
27	3,41	86,5	50,12	74,2	38,61	24,7	40,78	77,1	6,99	61,9
Dic. 7	3,09	85,9	49,81	73,6	38,48	25,0	40,66	76,3	6,88	61,1
17	2,80	84,6	49,52	72,4	38,37	25,0	40,56	75,3	6,78	60,2
27	2,54	82,9	49,25	70,7	38,29	24,8	40,47	74,1	6,69	59,3
37	2,32	80,8	49,01	68,5	38,24	24,4	40,41	72,8	6,63	58,3
Posizione media	$21^h.50^m.2^s,91$ +55°.47′.0″,2		$21^h.51^m.49^s,62$ +56°.10′.47″,7		$21^h.55^m.36^s,75$ −28°.53′.26″,2		$21^h.56^m.39^s,34$ +12°.41′.1″,2		$22^h.1^m.5^s,43$ +4°.36′.48″,5	

Giorno del mese	38 Pegasi gr.: 4,3		30 Cephei gr.: 5,2		13 Lacertac gr.: 5,1		52 Pegasi gr.: 6,1		55 Pegasi gr.: 4,6	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz boreale
1909	22h.25m	32°.6′	22h.35m	63°.6′	22h.39m	41°.20′	22h.54m	1°.14′	23h.2m	8°.53′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	50,17	25,1	22,97	49,0	60,03	33,6	37,03	27,0	23,61	58,6
11	50,07	23,4	22,64	47,1	59,88	31,8	36,94	25,9	23,52	57,6
21	49,99	21,4	22,35	44,8	59,75	29,8	36,88	24,8	23,45	56,6
31	49,94	19,2	22,13	42,1	59,66	27,4	36,83	23,6	23,40	55,5
Febbr. 10	49,92	17,0	21,98	39,2	59,61	25,0	36,81	22,4	23,38	54,5
20	49,94	14,8	21,91	36,1	59,60	22,5	36,82	21,4	23,38	53,6
	2		25		2					
Marzo 2	50,00	12,8	21,93	33,0	59,64	20,1	3 36,87	20,5	5 23,42	52,9
12	50,11	11,0	22,03	30,0	59,72	17,8	36,94	19,9	23,49	52,4
22	50,25	9,5	22,22	27,3	59,86	15,8	37,05	19,5	23,59	52,1
Aprile 1	50,44	8,3	22,50	24,9	60,05	14,2	37,20	19,4	23,73	52,1
11	50,67	7,6	22,85	23,0	60,28	13,0	37,39	19,6	23,92	52,4
21	50,94	7,4	23,27	21,6	60,56	12,3	37,61	20,1	24,13	53,0
Maggio 1	51,24	7,6	23,74	20,8	60,88	12,1	37,87	21,0	24,38	54,0
11	51,56	8,2	24,25	20,5	61,22	12,5	38,15	22,2	24,66	55,3
21	51,90	9,4	24,79	20,8	61,58	13,3	38,45	23,7	24,95	56,9
31	52,24	11,0	25,33	21,7	61,96	14,6	38,76	25,4	25,26	58,7
Giugno 10	52,58	13,0	25,87	23,2	62,33	16,4	39,08	27,4	25,58	60,6
20	52,91	15,3	26,39	25,2	62,69	18,4	39,40	29,5	25,89	62,7
30	53,22	17,8	26,87	27,6	63,03	21,0	39,70	31,7	26,20	64,9
Luglio 10	53,51	20,5	27,30	30,4	63,35	23,8	39,98	33,9	26,49	67,1
20	53,76	23,4	27,67	33,5	63,63	26,8	40,24	36,1	26,75	69,2
30	53,97	26,3	27,97	36,9	63,86	29,9	40,47	38,3	26,99	71,3
Agosto 9	54,13	29,2	28,20	40,5	64,05	33,0	40,67	40,3	27,19	73,2
19	54,25	32,0	28,35	44,2	64,19	36,2	40,82	42,2	27,35	74,9
29	54,32	34,7	28,42	47,8	64,27	39,2	40,93	43,9	27,47	76,4
Sett. 8	54,35	37,2	28,41	51,4	64,31	42,1	41,00	45,4	27,54	77,8
18	54,33	39,5	28,33	54,8	64,30	44,9	41,02	46,6	27,58	79,0
28	54,27	41,6	28,17	58,0	64,24	47,4	41,01	47,6	27,58	79,9
Ottobre 8	54,17	43,3	27,95	61,0	64,14	49,6	40,97	48,4	28,55	80,5
18	54,05	44,6	27,68	63,6	64,01	51,5	40,90	48,9	27,49	80,9
28	53,91	45,6	27,35	65,8	63,84	52,9	40,81	49,2	27,40	81,1
Nov. 7	53,75	46,3	26,98	67,6	63,66	54,1	40,71	49,2	27,30	81,1
17	53,58	46,6	26,59	68,8	63,47	54,8	40,59	49,0	27,19	80,9
27	50,41	46,5	26,19	69,4	63,28	55,0	40,47	48,7	27,01	80,5
Dic. 7	50,25	45,9	25,78	69,6	63,08	54,7	40,35	48,2	26,95	79,9
17	53,10	45,0	25,37	69,1	62,88	54,0	40,24	47,4	26,84	79,2
27	52,96	43,7	24,98	68,0	62,70	52,8	40,13	46,5	26,74	78,4
37	52,84	42,1	24,64	66,4	62,54	51,3	40,05	47,5	26,65	77,4
Posizione media	22h.25m.51s,98 +32°.6′.23″,6		22h.35m.25s,27 +63°.6′.40″,4		22h.40m.1s,83 +41°.20′.29″,4		22h.54m.38s,64 +11°.14′.31″,4		23h.2m.25s,18 +8°.53′.3″,7	

Giorno del mese	5 Andromedae gr. : 5,8		91 ψ' Aquarii gr. : 4,5		1 (Hev.) Cassiopejae gr. : 4,9		15 Andromedae gr. : 6,0		19 κ Andromedae gr. : 4,4	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. australe	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1909	$23^h.3^m$	$48^\circ.47'$	$23^h.11^m$	$9^\circ.35'$	$23^h.25^m$	$58^\circ.2'$	$23^h.30^m$	$39^\circ.44'$	$23^h.35^m$	$43^\circ.49'$
	s	"	s	"	s	"	s	"	s	"
Genn. 1	35,42	65,2	5,96	71,9	48,03	59,8	8,76	68,9	53,85	53,7
11	35,22	63,7	5,88	72,3	47,63	58,5	8,59	67,7	53,65	52,5
21	35,04	61,7	5,82	72,6	47,46	56,7	8,44	66,0	53,48	50,9
31	34,89	59,4	4,77	72,7	47,22	54,5	8,31	64,1	53,33	49,0
Febbr. 10	34,78	56,9	5,74	72,7	47,80	52,0	8,21	62,0	53,21	46,8
20	34,73	54,2	5,74	72,5	46,90	49,3	8,14	59,8	53,13	44,5
Marzo 2	5 34,73	51,5	7 5,78	72,1	11 48,84	46,5	12 8,12	57,6	53,09	42,1
12	34,78	49,0	5,85	71,4	46,85	43,7	8,15	55,5	14 53,10	39,8
22	34,89	46,7	5,95	70,6	46,98	41,0	8,22	53,5	53,17	37,7
Aprile 1	35,07	44,7	6,08	69,5	47,05	38,6	8,35	51,8	53,29	35,8
11	35,30	43,1	6,26	68,2	47,33	36,5	8,53	50,5	53,47	34,3
21	35,58	42,0	6,47	66,7	47,64	34,9	8,76	49,6	53,71	33,1
Maggio 1	35,91	41,3	6,71	65,0	48,00	33,7	9,03	49,1	53,99	32,4
11	36,28	41,2	6,98	63,1	48,41	33,0	9,34	49,1	54,31	32,2
21	36,67	41,6	7,28	61,2	48,87	32,9	9,68	49,6	54,66	32,5
31	37,08	42,5	7,59	59,2	49,35	33,4	10,04	50,5	55,04	33,3
Giugno 10	37,49	44,0	7,91	57,1	49,84	34,4	10,41	51,9	55,43	34,5
20	37,90	45,9	8,23	55,2	50,33	35,9	10,78	53,6	55,02	36,2
30	38,29	48,2	8,55	53,3	50,81	37,9	11,15	55,7	56,20	38,2
Luglio 10	38,65	50,9	8,85	51,6	51,25	40,3	11,50	58,2	56,56	40,6
20	38,98	53,7	9,13	50,1	51,65	43,1	11,81	60,9	56,90	43,3
30	39,20	56,9	9,39	48,8	52,01	46,2	12,10	63,7	57,20	46,2
Agosto 9	39,49	60,1	9,60	47,7	52,31	49,5	12,34	66,7	57,46	49,3
19	39,67	63,4	9,77	46,9	51,54	52,9	12,54	69,7	57,68	52,3
29	39,79	66,7	9,90	46,4	51,72	56,4	12,70	72,7	57,85	55,4
Sett. 8	39,86	70,0	9,99	46,2	52,83	59,9	12,80	75,6	57,96	58,5
18	39,87	73,1	10,05	46,1	52,87	63,3	12,86	78,4	58,03	61,4
28	39,83	76,0	10,06	46,3	52,85	66,6	12,87	81,0	58,05	64,1
Ottobre 8	39,74	78,7	10,03	46,7	52,77	69,7	12,85	83,3	58,02	66,7
18	39,62	81,0	9,98	47,3	52,64	72,6	12,78	85,4	57,95	69,0
28	39,45	83,0	9,91	47,9	52,45	75,1	12,68	87,2	57,85	71,0
Nov. 7	39,26	84,6	9,82	48,6	52,22	77,2	12,56	88,6	57,72	72,7
17	39,05	85,8	9,71	49,4	51,96	78,8	12,41	89,6	57,56	73,9
27	38,82	86,4	9,60	50,1	51,67	80,0	12,25	90,2	57,38	74,7
Dic. 7	38,58	86,5	9,49	50,8	51,37	80,7	12,07	90,4	57,19	75,1
17	38,35	86,2	9,38	51,5	51,05	80,8	11,89	90,2	57,00	75,0
27	38,12	85,3	9,28	52,0	50,73	80,4	11,71	89,5	56,80	74,4
37	38,91	84,0	9,20	52,5	50,42	79,3	11,54	88,5	56,61	73,4
Posizione media	$23^h.3^m.37^s,18$ $+48^\circ.47'.58'',7$		$23^h.11^m.7^s,51$ $-9^\circ.35'.0'',7$		$23^h.25^m.49^s,80$ $+58^\circ.2'.50'',8$		$23^h.30^m.10^s,28$ $+39^\circ.44'.4'',3$		$23^h.35^m.55^s,36$ $+43^\circ.49'.47'',8$	

Giorno del mese	20 ψ Andromedae gr. : 5,0		25 Piscium gr. : 6,6		7 ρ Cassiopejae gr. : 4,8					
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1909	$23^h.41^m$	$45°.54'$	$23^h.48^m$	$1°.34'$	$23^h.49^m$	$56°.59'$				
	s	"	s	"	s	"				
Genn. 1	29,77	60,4	23,77	62,3	48,30	44,5				
11	29,56	59,2	23,67	61,3	48,00	43,5				
21	29,37	57,6	23,58	60,2	47,72	42,1				
31	29,20	55,7	23,50	59,1	47,47	40,1				
Febbr. 10	29,07	53,5	23,44	57,9	47,26	37,8				
20	28,98	51,1	23,41	56,7	47,10	35,3				
Marzo 2	28,93	48,7	23,40	55,7	47,00	32,6				
12	28,93	46,4	23,42	54,8	46,97	29,9				
22	[15]28,99	44,2	[17]23,48	54,1	[17]47,01	27,2				
Aprile 1	29,11	42,2	23,58	53,7	47,13	24,8				
11	29,29	40,5	23,72	53,6	47,33	22,7				
21	29,52	39,3	23,89	53,8	47,59	20,9				
Maggio 1	29,80	38,5	24,10	54,4	47,92	19,5				
11	30,12	38,1	24,35	55,3	48,31	18,7				
21	30,48	38,3	24,62	56,5	48,74	18,4				
31	30,87	38,9	24,92	58,0	49,20	18,6				
Giugno 10	31,27	40,0	25,23	59,7	49,68	19,4				
20	31,67	41,6	25,55	61,7	50,16	20,7				
30	32,06	43,6	25,87	63,8	50,64	22,5				
Luglio 10	32,44	45,9	26,17	66,1	51,09	24,7				
20	32,79	48,6	26,46	68,4	51,51	27,2				
30	33,11	51,5	26,73	70,6	51,90	30,1				
Agosto 9	33,38	54,5	26,96	72,8	52,23	33,2				
19	33,61	57,6	27,16	74,9	52,50	36,5				
29	33,78	60,8	27,33	76,9	52,72	39,9				
Sett. 8	33,91	63,9	27,46	78,7	52,87	43,3				
18	33,99	66,9	27,55	80,3	52,96	46,7				
28	34,01	69,8	27,59	81,6	53,00	50,1				
Ottobre 8	33,99	72,5	27,60	82,7	52,97	53,2				
18	33,92	74,9	27,58	83,6	52,89	56,1				
28	33,82	77,0	27,54	84,2	52,75	58,8				
Nov. 7	33,69	78,8	27,47	84,6	52,57	61,0				
17	33,53	80,2	27,39	85,0	52,36	62,9				
27	33,35	81,1	27,30	84,7	52,10	64,3				
Dic. 7	33,15	81,6	27,20	84,4	51,82	65,2				
17	32,94	81,6	27,09	83,9	51,53	65,7				
27	32,73	81,1	26,99	83,2	51,23	65,4				
37	32,52	80,2	26,89	82,3	50,93	64,6				
Posizione media	$23^h.41^m31^s,26$ $+45°.54'.53'',8$		$23^h.48^m.25^s,09$ $+1°.35'.4'',8$		$23^h.49^m.49^s,87$ $+56°.59'.35'',3$					

1 (Bode) Ursae Minoris Gr. 6,5.

Giorno del mese	Gennaio		Febbraio		Marzo		Aprile		Maggio		Giugno	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
	$0^h.57^m$	$88^\circ.32'$	$0^h.57^m$	$88^\circ.32'$	$0^h.57^m$	$88^\circ.32'$	$0^h.57^m$	$88^\circ.32'$	$0^h.57^m$	$88^\circ.31'$	$0^h.57^m$	$88^\circ.31'$
	s	"	s	"	s	"	s	"	s	"	s	"
1	57,60	24,5	31,43	24,2	12,52	18,9	3,63	10,0	9,77	60,9	28,55	55,0
2	56,85	24,6	30,65	24,1	12,01	18,7	3,51	9,7	10,21	60,6	29,40	54,9
3	56,10	24,7	29,82	24,0	11,46	18,5	3,41	9,3	10,69	60,4	30,25	54,8
4	55,32	24,8	28,97	23,9	10,90	18,2	3,35	9,0	11,22	60,1	31,07	54,7
5	54,50	24,9	28,11	23,8	10,34	17,9	3,35	8,6	11,80	59,8	31,86	54,7
6	53,63	25,0	27,25	23,6	9,80	17,7	3,40 / 3,50	8,3 / 7,9	12,39	59,6	32,59	54,6
7	52,73	25,1	26,39	23,4	9,28	17,4	3,66	7,6	12,97	59,4	33,28	54,6
8	51,78	25,1	25,58	23,3	8,81	17,1	3,85	7,3	13,55	59,2	33,94	54,5
9	50,82	25,2	24,78	23,1	8,39	16,8	4,05	7,0	14,07	59,0	34,60	54,5
10	49,85	25,2	24,03	22,9	8,02	16,4	4,25	6,7	14,55	58,8	35,29	54,4
11	48,90	25,2	23,34	22,7	7,71	16,1	4,42	6,5	15,00	58,6	36,03	54,3
12	47,97	25,2	22,70	22,5	7,45	15,8	4,55	6,2	15,43	58,4	36,84	54,2
13	47,07	25,2	22,10	22,3	7,21	15,5	4,64	6,0	15,89	58,2	37,71	54,1
14	46,22	25,1	21,51	22,1	6,97	15,3	4,71	5,7	16,39	58,0	38,62	54,0
15	45,40	25,1	20,91	22,0	6,72	15,0	4,78	5,4	16,96	57,7	39,54	54,0
16	44,62	25,1	20,27	21,8	6,43	14,7	4,89	5,1	17,61	57,5	40,45	54,0
17	43,87	25,0	19,59	21,6	6,11	14,5	5,07	4,8	18,30	57,3	41,33	54,0
18	43,11	25,0	18,87	21,5	5,74	14,2	5,32	4,4	19,03	57,1	42,16	54,0
19	42,32	25,0	18,12	21,3	5,38	13,9	5,64	4,1	19,78	56,9	42,95	54,0
20	41,48	25,0	17,37	21,1	5,03	13,6	6,01	3,8	20,51	56,8	43,70	54,0
21	40,59	25,1	16,65	20,9	4,73	13,3	6,41	3,5	21,20	56,7	44,43	54,0
22	39,65	25,1	15,98	20,6	4,50	13,0	6,82	3,2	21,85	56,5	45,15	54,0
23	38,68	25,0	15,37	20,3	4,34	12,6	7,21	2,9	22,47	56,4	45,89	54,0
24	37,72	25,0	14,84	20,1	4,25	12,3	7,56	2,9	23,07	56,3	46,65	54,0
25	36,79	24,9	14,36	19,8	4,20	12,0	7,88	2,5	23,65	56,1	47,45	54,0
26	35,91	24,8	13,91	19,6	4,17	11,7	8,18	2,3	24,25	56,0	48,28	54,0
27	35,09	24,7	13,47	19,4	4,14	11,4	8,46	2,0	24,86	55,8	49,16	54,0
28	34,33	24,5	13,01	19,1	4,09	11,1	8,75	1,8	25,51	55,6	50,07	54,0
29	33,61	24,4	12,52	18,9	4,00	10,8	9,05	1,5	26,21	55,4	51,00	54,0
30	32,90	24,3			3,89	10,5	9,30	1,2	26,95	55,3	51,94	54,1
31	32,18	24,2			3,76	10,3	9,77	0,9	27,73	55,1	52,86	54,1
32	31,43	24,2			3,63	10,0			28,55	55,0		

1909 Posizione media $\begin{cases} \alpha = 0^h.\,57^m.\,59^s,64. \\ \delta = +88^\circ.\,32'.\,10'',6. \end{cases}$

I (Bode) Ursae Minoris Gr. 6,5.

Giorno del mese	Luglio Ascens. retta	Luglio Declinaz. boreale	Agosto Ascens. retta	Agosto Declinaz. boreale	Settembre Ascens. retta	Settembre Declinaz. boreale	Ottobre Ascens. retta	Ottobre Declinaz. boreale	Novembre Ascens. retta	Novembre Declinaz. boreale	Dicembre Ascens. retta	Dicembre Declinaz. boreale
	$0^h.57^m$	88°.31′	$0^h.58^m$	88°.31′	$0^h.58^m$	88°.32′	$0^h.58^m$	88°.32′	$0^h.58^m$	88°.32′	$0^h.58^m$	88°.32′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
1	52,86	54,1	17,54	58,5	36,42	7,1	46,13	17,9	44,68	29,9	31,04	39,7
2	53,74	54,2	18,15	58,7	36,90	7,4	46,39	18,3	44,43	30,3	30,32	40,0
3	54,56	54,3	18,76	58,9	37,44	7,7	46,63	18,7	44,11	30,6	29,57	40,2
4	55,33	54,4	19,39	59,1	38,01	8,0	46,84	19,1	43,73	31,0	28,81	40,5
5	56,05	54,5	20,08	59,3	38,58	8,3	46,99	19,5	43,32	31,4	28,08	40,7
6	56,76	54,6	20,81	59,5	39,13	8,7	47,06	19,9	43,90	31,8	27,37	40,9
7	57,48	54,7	21,59	59,7	39,63	9,1	47,08	20,4	42,47	32,1	26,68	41,1
8	58,24	54,8	22,40	60,0	40,07	9,4	47,06	20,8	42,06	32,4	26,02	41,3
9	59,06	54,8	23,21	60,2	40,45	9,8	47,00	21,2	41,67	32,8	25,38	41,5
10	59,93	54,9	23,98	60,5	40,78	10,2	46,93	21,6	41,31	33,1	24,77	41,7
11	60,85	55,0	24,71	60,8	41,07	10,6	46,87	21,9	40,97	33,4	24,16	41,9
12	61,79	55,1	25,38	61,1	41,34	11,0	46,82	22,3	40,65	33,7	23,52	42,2
13	62,72	55,2	26,00	61,4	41,61	11,3	46,80	22,6	40,34	34,0	22,84	42,4
14	63,61	55,3	26,57	61,7	41,89	11,6	46,81	23,0	40,02	34,3	22,10	42,6
15	64,46	55,5	27,11	61,9	42,19	11,9	46,85	23,3	39,66	34,7	21,31	42,9
16	65,21	55,7	27,65	62,2	42,52	12,2	46,89	23,7	39,25	35,1	20,46	43,1
17	66,01	55,8	28,19	62,5	42,88	12,6	46,94	24,1	38,78	35,4	19,57	43,3
18	66,73	56,0	28,75	62,7	43,26	12,9	46,96	24,5	38,24	35,8	18,67	43,5
19	67,43	56,2	29,33	63,0	43,65	13,3	46,95	24,9	37,65	36,1	17,79	43,6
20	68,13	56,3	29,95	63,2	44,04	13,7	46,86	25,3	37,03	36,5	16,97	43,8
21	68,85	56,4	30,60	63,5	44,40	14,1	46,72	25,7	36,40	36,7	16,20	43,9
22	69,59	56,6	31,27	63,8	44,71	14,5	46,52	26,2	35,81	37,0	15,47	44,0
23	70,36	56,7	31,94	64,1	44,96	14,9	46,26	26,5	35,26	37,3	14,78	44,1
24	71,17	56,8	32,61	64,4	45,14	15,3	45,99	26,9	34,77	37,6	14,09	44,3
25	72,01	57,0	33,24	64,7	45,26	15,7	45,73	27,3	34,31	37,8	13,38	44,5
26	72,88	57,1	33,82	65,1	45,35	16,1	45,50	27,6	33,87	38,1	12,62	44,6
27	73,75	57,3	34,34	65,4	45,43	16,5	45,32	28,0	33,42	38,4	11,79	44,8
28	74,60	57,5	34,80	65,8	45,52	16,8	45,20	28,3	32,92	38,7	10,91	45,0
29	75,42	57,8	35,21	66,1	45,68	17,2	45,09	28,7	32,33	39,1	9,99	45,1
30	76,19	58,0	35,66	66,4	45,89	17,6	45,00	29,0	31,73	39,4	9,04	45,2
31	76,89	58,3	35,99	66,7	46,13	17,9	44,86	29,4	31,04	39,7	8,09	45,3
32	77,54	58,5	36,42	67,1			44,68	29,9			7,16	45,4

1909 Posizione media $\begin{cases} \alpha = 0^h.57^m.59^s,64. \\ \delta = +88°.32'.10''.6. \end{cases}$

44 (Hev.) Cephei Gr. 5,7.

Giorno del mese	Ascens. retta	Declin. bor.	Giorno del mese	Ascens. retta	Declin. bor.	Giorno del mese	Ascens. retta	Declin. bor.	Giorno del mese	Ascens. retta	Declin. bor.	Giorno del mese	Ascens. retta	Declin. bor.	Giorno del mese	Ascens. retta	Declin. bor.
	Gennaio			Marzo			Maggio			Luglio			Settembre			Novembre	
	h m	° ′		h m	° ′		h m	° ′		h	° ′		h m	° ′		h m	° ′
	1.4	79.11		1.4	79.11		1.4	79.11		1.4	79.11		1.4	79.11		1.4	79.11
	s	″		s	″		s	″		s	″		s	″		s	″
1	21,49	36,8	2	15,70	30,6	1	15,54	13,5	2	22,01	7,8	2	28,50	21,4	1	30,10	43,2
3	21,30	37,0	4	15,56	30,2	3	15,67	13,0	4	22,25	8,1	4	28,67	22,0	3	30,04	44,0
5	21,11	37,1	6	15,41	29,6	5	15,83	12,5	6	22,46	8,3	6	28,84	22,7	5	29,96	44,7
7	21,89	37,3	8	15,28	29,0	7	16,00	12,1	8	22,69	8,4	8	28,98	23,4	7	29,87	45,4
9	20,65	37,4	10	15,18	28,4	9	16,16	11,7	10	23,94	8,6	10	29,10	24,2	9	29,78	46,0
11	20,41	37,4	12	15,10	27,8	11	16,30	11,4	12	23,21	8,8	12	29,19	24,9	11	29,71	46,5
13	20,18	37,3	14	15,04	27,3	13	16,43	11,0	14	23,47	9,1	14	29,28	25,6	13	29,64	47,2
15	19,97	37,2	16	14,97	26,8	15	16,59	10,6	16	23,72	9,5	16	29,39	26,2	15	29,57	47,8
17	19,78	37,2	18	14,88	26,3	17	16,79	10,2	18	23,94	9,8	18	29,50	26,9	17	29,47	48,5
19	19,58	37,2	20	14,79	25,7	19	17,00	9,8	20	24,16	10,1	20	29,63	27,6	19	29,34	49,2
21	19,37	37,2	22	14,72	25,0	21	17,20	9,6	22	24,38	10,4	22	29,74	28,4	21	29,19	49,7
23	19,12	37,1	24	14,70	24,4	23	17,39	9,4	24	24,61	10,7	24	29,81	29,2	23	29,07	50,2
25	18,89	36,9	26	14,69	23,8	25	17,58	9,1	26	24,86	11,0	26	29,86	30,0	25	28,96	50,6
27	18,67	36,7	28	14,67	23,3	27	17,75	8,8	28	25,12	11,4	28	29,90	30,7	27	28,87	51,3
29	18,48	36,5	30	14,65	22,7	29	17,95	8,5	30	25,36	11,9	30	29,96	31,4	29	28,74	51,9
31	18,30	36,3				31	18,17	8,2									
	Febbraio			Aprile			Giugno			Agosto			Ottobre			Dicembre	
	h m	° ′		h m	° ′		h m	° ′		h m	° ′		h m	° ′		h m	° ′
	1.4	79.11		1.4	79.11		1.4	79.11		1.4	79.11		1.4	79.11		1.4	79.11
	s	″		s	″		s	″		s	″		s	″		s	″
2	18,10	36,1	1	14,62	22,1	2	18,41	8,0	1	25,56	12,4	2	30,05	32,1	1	28,59	52,5
4	17,89	35,9	3	14,59	21,5	4	18,65	7,9	3	25,75	12,9	4	30,13	32,9	3	28,41	52,9
6	17,67	35,6	5	14,59	20,9	6	18,88	7,8	5	25,95	13,3	6	30,18	33,7	5	28,24	53,4
8	17,45	35,2	7	14,61 / 14,64	20,2 / 19,9	8	19,08	7,8	7	26,17	13,7	8	30,19	34,5	7	28,07	53,8
10	17,25	34,8	9	14,69	19,3	10	19,29	7,6	9	26,38	14,2	10	30,20	35,3	9	27,92	54,2
12	17,08	34,4	11	14,75	18,8	12	19,52	7,5	11	26,57	14,8	12	30,20	36,0	11	27,78	54,6
14	16,93	34,1	13	14,78	18,3	14	19,78	7,4	13	26,79	15,4	14	30,22	36,6	13	27,62	55,0
16	16,77	33,7	15	14,81	17,7	16	20,04	7,4	15	27,00	15,9	16	30,24	37,3	15	27,43	55,4
18	16,59	33,4	17	14,85	17,1	18	20,29	7,4	17	27,17	16,5	18	30,25	38,1	17	27,22	55,8
20	16,40	33,0	19	14,94	16,5	20	20,52	7,5	19	27,34	17,0	20	30,28	38,9	19	27,01	56,1
22	16,21	32,5	21	15,04	16,0	22	20,74	7,5	21	27,53	17,5	22	30,25	39,7	21	26,82	56,3
24	16,07	32,0	23	15,16	15,5	24	20,96	7,5	23	27,73	18,1	24	30,20	40,4	23	26,65	56,5
26	15,92	31,6	25	15,26	15,0	26	21,21	7,5	25	27,93	18,7	26	30,15	41,1	25	26,48	56,8
28	15,83	31,1	27	15,35	14,5	28	21,47	7,5	27	28,10	19,4	28	30,13	41,8	27	26,29	57,1
30	15,70	30,7	29	15,43	14,0	30	21,74	7,6	29	28,24	20,1	30	30,12	42,5	29	26,06	57,3
			31	15,54	13,5	32	22,01	7,8	31	28,36	20,8	32	30,10	43,2	31	25,83	57,6
									33	28,50	21,4				33	25,64	57,9

1909 Posizione media $\begin{cases} \alpha = 1^h.\ 4^m.\ 22^s,49. \\ \delta = +79^\circ.\ 11'.\ 23'',5. \end{cases}$

158 (Heis) Cephei Gr. 6,4

Giorno del mese	Gennaio		Febbraio		Marzo		Aprile		Maggio		Giugno	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
	$5^h.32^m$	$85°.9'$	$5^h.32^m$	$85°.9'$	$5^h.32^m$	$85°.9'$	$5^h.32^m$	$85°.9'$	$5^h.32^m$	$85°.9'$	$5^h.32^m$	$85°.9'$
	s	"	s	"	s	"	s	"	s	"	s	"
1	51,97	17,5	49,14	26,4	43,40	31,1	35,98	31,1	30,33	26,1	28,12	17,7
2	51,95	17,8	49,00	26,7	43,18	31,3	35,74	31,0	30,16	25,9	28,14	17,4
3	51,94	18,1	48,85	26,9	42,95	31,4	35,49	31,0	30,01	25,6	28,18	17,1
4	51,94	18,4	48,68	27,2	42,71	31,5	35,24	30,9	29,87	25,4	28,23	16,8
5	51,93	18,7	48,50	27,4	42,46	31,6	34,99	30,7	29,73	25,1	28,29	16,5
6	51,91	19,0	48,31	27,7	42,20	31,6	34,74	30,6	29,61	24,8	28,35	16,2
7	51,88	19,4	48,10	27,9	41,93	31,7	34,41	30,4	29,52	24,5	28,39	15,9
8	51,83	19,7	47,89	28,1	41,65	31,8	34,29	30,3	29,43	24,2	28,43	15,7
9	51,76	20,1	47,67	28,3	41,38	31,8	34,09	30,1	29,36	24,0	28,45	15,4
10	51,68	20,4	47,45	28,5	41,11	31,8	33,90	29,9	29,29	23,7	28,47	15,2
11	51,59	20,7	47,23	28,7	40,85	31,8	33,73	29,8	29,22	23,5	28,48	14,9
12	51,49	21,1	47,02	28,8	40,61	31,8	33,56	29,6	29,13	23,3	28,51	14,6
13	51,39	21,4	46,83	29,0	40,38	31,8	33,39	29,5	29,03	23,1	28,55	14,3
14	51,28	21,6	46,64	29,1	40,16	31,8	33,21	29,4	28,93	22,8	}28·61 }28·63	}14·0 }13·6
15	51,18	21,9	46,47	29,3	39,95	31,8	33,01	29,2	28,82	22,6	28,71	13,3
16	51,09	22,2	46,29	29,5	39,73	31,8	32,81	29,1	28,72	22,3	28,82	13,0
17	51,01	22,4	46,11	29,6	39,51	31,9	32,59	29,0	28,63	22,0	28,93	12,7
18	50,93	22,7	45,91	29,8	39,28	31,9	32,38	28,8	28,56	21,7	29,04	12,4
19	50,86	23,0	45,70	30,0	39,03	31,9	32,18	28,6	28,51	21,4	29,14	12,2
20	50,79	23,3	45,47	30,2	38,77	31,9	31,99	28,4	28,48	21,1	29,24	11,9
21	50,70	23,6	45,23	30,4	38,50	31,8	31,81	28,1	28,46	20,8	29,33	11,7
22	50,60	23,9	44,98	30,5	38,24	31,8	31,66	27,9	28,45	20,5	29,41	11,5
23	50,48	24,2	44,72	30,7	37,98	31,8	31,52	27,7	28,43	20,2	29,49	11,1
24	50,33	24,5	44,48	30,7	37,73	31,7	31,38	27,5	28,41	20,0	29,57	10,9
25	50,17	24,8	44,25	30,8	37,50	31,6	31,25	27,3	28,38	19,7	29,66	10,7
26	50,01	25,1	44,03	30,9	37,28	31,5	31,11	27,1	28,34	19,5	29,75	10,4
27	49,85	25,3	43,81	31,0	37,07	31,4	30,97	26,9	28,29	19,2	29,85	10,1
28	49,69	25,5	43,61	31,0	36,87	31,3	30,82	26,7	28,25	19,0	29,97	9,8
29	49,54	25,8	43,40	31,1	36,66	31,3	30,66	26,5	28,21	18,7	30,11	9,4
30	49,40	26,0			36,44	31,2	30,49	26,3	28,17	18,4	30,26	9,1
31	49,27	26,2			36,22	31,2	30,33	26,1	28,14	18,1	30,42	8,9
32	49,14	26,4			35,98	31,1			28,12	17,7		

1909 Posizione media $\begin{cases} \alpha = 5^h.32^m.42^s,76 \\ \delta = +85°.9'.12'',1. \end{cases}$

158 (Heis) Cephei Gr. 6,4

Giorno del mese	Luglio		Agosto		Settembre		Ottobre		Novembre		Dicembre	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
	$5^h.32^m$	$85^\circ.9'$	$5^h.32^m$	$85^\circ.8'$	$5^h.32^m$	$85^\circ.8'$	$5^h.32^m$	$85^\circ.8'$	$5^h.33^m$	$85^\circ.9'$	$5^h.33^m$	$85^\circ.9'$
	s	''	s	''	s	''	s	''	s	''	s	''
1	30,42	8,9	36,58	62,1	45,12	58,8	54,31	59,4	3,15	4,3	9,16	12,6
2	30,60	8,6	36,82	62,0	45,39	58,8	54,62	59,5	3,42	4,5	9,30	12,9
3	30,77	8,4	37,05	61,8	45,68	58,7	57,95	59,5	3,69	4,8	9,42	13,3
4	30,94	8,1	37,27	61,7	45,99	58,6	55,29	59,6	3,94	5,1	9,52	13,6
5	31,10	7,9	37,49	61,5	46,31	58,6	55,62	59,7	4,17	5,3	9,62	14,0
6	31,25	7,7	37,73	61,3	46,64	58,5	55,95	59,9	4,39	5,6	9,70	14,3
7	31,38	7,5	37,98	61,1	46,98	58,4	56,26	60,0	4,60	5,9	9,79	14,6
8	31,52	7,3	38,25	60,9	47,32	58,4	56,56	60,1	4,80	6,1	9,88	14,9
9	31,66	7,0	38,53	60,8	47,64	58,4	56,85	60,3	4,99	6,4	9,97	15,2
10	31,81	6,7	38,82	60,6	47,96	58,4	57,12	60,5	5,19	6,6	10,07	15,5
11	31,98	6,5	39,12	60,5	48,26	58,4	57,39	60,6	5,39	6,8	10,18	15,8
12	32,18	6,2	39,42	60,3	48,56	58,5	57,65	60,8	5,60	7,1	10,29	16,1
13	32,38	5,9	39,71	60,2	48,84	58,5	57,91	60,9	5,82	7,3	10,41	16,4
14	32,60	5,7	39,98	60,2	49,12	58,5	58,17	61,0	6,05	7,5	10,52	16,7
15	32,82	5,4	40,25	60,1	49,40	58,6	58,45	61,2	6,28	7,8	10,62	17,1
16	33,04	5,2	40,51	60,0	49,68	58,6	58,73	61,3	6,51	8,1	10,70	17,5
17	33,25	5,0	40,77	59,9	49,97	58,6	59,02	61,4	6,74	8,4	10,76	17,9
18	33,45	4,8	41,02	59,8	50,27	58,6	59,32	61,5	6,95	8,7	10,80	18,3
19	33,64	4,7	41,27	59,7	50,58	58,6	59,64	61,7	7,14	9,0	10,82	18,6
20	33,83	4,5	41,53	59,6	50,91	58,6	59,95	61,9	7,32	9,3	10,84	18,9
21	34,01	4,3	41,80	59,4	51,25	58,6	60,25	62,1	7,48	9,7	10,86	19,2
22	34,19	4,1	42,08	59,3	51,59	58,6	60,54	62,3	7,63	10,0	10,89	19,5
23	34,38	3,9	42,38	59,2	51,83	58,7	60,81	62,5	7,77	10,3	10,93	19,8
24	34,58	3,6	42,69	59,1	52,26	58,8	61,06	62,8	7,93	10,5	10,98	20,1
25	34,79	3,4	43,01	59,0	52,57	58,9	61,31	63,0	8,09	10,8	11,04	20,4
26	35,02	3,1	43,34	58,9	52,87	59,0	61,54	63,2	8,27	11,0	11,10	20,7
27	35,26	2,9	43,67	58,9	53,16	59,1	61,78	63,4	8,46	11,3	11,14	21,1
28	35,52	2,7	43,98	58,8	53,44	59,2	62,04	63,5	8,65	11,6	11,17	21,5
29	35,79	2,5	44,28	58,8	53,72	59,3	62,30	63,7	8,84	11,9	11,18	21,8
30	36,06	2,3	44,57	58,8	54,01	59,4	62,57	63,9	9,01	12,2	11,17	22,2
31	36,32	2,2	44,84	58,8	54,31	59,4	62,86	64,1	9,16	12,6	11,14	22,9
32	36,58	2,1	45,12	58,8			63,15	64,3				

1909 Posizione media $\begin{cases} \alpha = 5^h.32^m.42^s,76 \\ \delta = +85^\circ.9'.12'',1. \end{cases}$

30 (Hev.) Cameleopardi Gr. 5,3.

Giorno del mese	Ascens. retta	Declin. bor.	Giorno del mese	Ascens. retta	Declin. bor.	Giorno del mese	Ascens. retta	Declin. bor.	Giorno del mese	Ascens. retta	Declin. bor.	Giorno del mese	Ascens. retta	Declin. bor.	Giorno del mese	Ascens. retta	Declin. bor.
	Gennaio			Marzo			Maggio			Luglio			Settembre			Novembre	
	h m	° ′		h m	° ′		h m	° ′		h m	° ′		h m	° ′		h m	° ′
	10.20	83.1		10.20	83.1		10.20	83.1		10.19	83.1		10.19	83.1		10.20	83.0
	s	″		s	″		s	″		s	″		s	″		s	″
1	8,12	8,8	2	14,08	23,6	1	8,79	37,8	2	59,94	33,8	2	58,04	14,0	1	5,20	54,9
3	8,46	9,0	4	14,10	24,2	3	8,47	38,1	4	59,76	33,3	4	58,10	13,3	3	5,60	54,4
5	8,82	9,2	6	14,10	24,9	5	8,13	38,3	6	59,62	32,8	6	58,19	12,5	5	6,01	54,0
7	9,20	9,5	8	14,05	25,6	7	7,79	38,4	8	59,45	32,4	8	58,32	11,7	7	6,41	53,6
9	9,56	9,8	10	13,97	26,3	9	7,49	38,4	10	59,25	32,0	10	58,49	10,9	9	6,78	53,2
11	9,90	10,3	12	13,86	26,9	11	7,23	38,5	12	59,04	31,4	12	58,66	10,2	11	7,13	52,9
13	10,20	10,7	14	13,76	27,4	13	6,96	38,6	14	58,85	30,8	14	58,82	9,6	13	7,48	52,6
15	10,47	11,1	16	13,69	27,9	15	6,66	38,8	16	58,71	30,2	16	58,96	9,0	15	7,86	52,2
17	10,73	11,5	18	13,63	28,5	17	6,31	38,9	18	58,59	29,6	18	59,09	8,3	17	8,29	51,8
19	11,01	11,8	20	13,55	29,1	19	5,96	38,8	20	58,49	29,1	20	59,25	7,5	19	8,75	51,6
21	11,33	12,2	22	13,41	29,8	21	5,64	38,7	22	58,37	28,6	22	59,45	6,8	21	9,18	51,4
23	11,63	12,7	24	13,22	30,3	23	5,36	38,7	24	58,23	28,1	24	59,68	6,0	23	9,57	51,2
25	11,91	13,2	26	13,04	30,8	25	5,09	38,6	26	58,08	27,5	26	59,94	5,4	25	9,94	51,0
27	12,12	13,7	28	12,88	31,3	27	4,81	38,6	28	57,95	26,8	28	60,18	4,8	27	10,33	50,7
29	12,30	14,2	30	12,72	31,8	29	4,50	38,6	30	57,86	26,1	30	60,38	4,1	29	10,76	50,5
31	12,50	14,7				31	4,17	38,5									

Giorno del mese	Ascens. retta	Declin. bor.	Giorno del mese	Ascens. retta	Declin. bor.	Giorno del mese	Ascens. retta	Declin. bor.	Giorno del mese	Ascens. retta	Declin. bor.	Giorno del mese	Ascens. retta	Declin. bor.	Giorno del mese	Ascens. retta	Declin. bor.
	Febbraio			Aprile			Giugno			Agosto			Ottobre			Dicembre	
	h m	° ′		h m	° ′		h m	° ′		h m	° ′		h m	° ′		h m	° ′
	10.20	83.1		10.20	83.1		10.19	83.1		10.19	83.1		10.20	83.1		10.20	83.0
	s	″		s	″		s	″		s	″		s	″		s	″
2	12,72	15,2	1	12,57	32,3	2	63,82	38,4	1	57,82	25,4	2	0,58	63,4	1	11,21	50,3
4	12,94	15,7	3	12,39	32,9	4	63,52	38,1	3	57,80	24,8	4	0,81	62,7	3	11,66	50,2
6	13,14	16,3	5	12,17	33,4	6	63,25	37,9	5	57,76	24,2	6	1,10	62,0	5	12,08	50,2
8	13,30	17,0	7	11,92	33,9	8	63,01	37,7	7	57,68	23,5	8	1,40	61,4	7	12,48	50,2
10	13,42	17,6	9	11,65	34,3	10	62,76	37,5	9	57,60	22,8	10	1,70	60,8	9	12,85	50,1
12	13,52	18,2	11	11,41	34,7	12	62,47	37,3	11	57,55	22,1	12	1,99	60,3	11	13,23	50,1
14	13,60	18,8	13	11,20	35,0	14	62,17	37,1	13	57,55	21,3	14	2,25	59,7	13	13,65	50,0
16	13,72	19,3	15	11,00	35,4	16	61,86	36,8	15	57,58	20,6	16	2,51	59,1	15	14,09	50,0
18	13,86	19,9	17	10,76	35,9	18	61,60	36,4	17	57,61	20,0	18	2,80	58,5	17	14,55	50,0
20	13,98	20,5	19	10,46	36,3	20	61,38	36,0	19	57,62	19,4	20	3,14	57,9	19	14,96	50,2
22	14,04	21,2	21	10,16	36,6	22	61,16	35,7	21	57,62	18,7	22	3,51	57,3	21	15,33	50,3
24	14,05	21,9	23	9,86	36,9	24	60,93	35,4	23	57,61	18,0	24	3,88	56,9	23	15,68	50,4
26	14,04	22,5	25	0,59	37,1	26	60,69	35,1	25	57,63	17,2	26	4,22	56,4	25	16,05	50,5
28	14,05	23,0	27	9,34	37,3	28	60,42	34,7	27	57,70 / 57,75	16,4 / 16,0	28	4,52	55,9	27	16,46	50,6
30	14,08	23,6	29	9,08	37,5	30	60,16	34,3	29	57,87	15,3	30	4,84	55,4	29	16,87	50,8
			31	8,79	37,8	32	59,94	33,8	31	57,97	14,7	32	5,20	54,9	31	17,27	51,0
									33	58,04	14,0				33	17,64	51,3

1909 Posizione media $\begin{cases} \alpha = 10^h.20^m.4^s,01. \\ \delta = +83^\circ.1'.19'',4. \end{cases}$

24 Ursae Minoris Gr. 5,9.

Giorno del mese	Gennaio		Febbraio		Marzo		Aprile		Maggio		Giugno	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
	$18^h.4^m$	$86°.59'$	$18^h.4^m$	$86°.59'$	$18^h.4^m$	$86°.59'$	$18^h.4^m$	$86°.59'$	$18^h.4^m$	$86°.59'$	$18^h.4^m$	$86°.59'$
	s	''	s	''	s	''	s	''	s	''	s	''
1	14,13	39,6	16,61	29,7	23,35	23,7	32,85	22,5	40,86	26,8	45,02	35,2
2	14,11	39,3	16,76	29,4	23,61	23,6	33,19	22,5	41,12	27,0	45,06	35,5
3	14,07	39,0	16,92	29,1	23,89	23,4	33,53	22,6	41,36	27,2	45,07	35,9
4	14,02	38,7	17,11	28,8	24,19	23,3	33,88	22,6	41,59	27,5	45,06	36,2
5	13,99	38,3	17,31	28,5	24,51	23,1	34,23	22,7	41,80	27,8	45,03	36,5
6	13,97	38,3	17,54	28,2	24,85	23,0	34,56	22,9	41,98	28,1	45,00	36,8
7	13,97	37,6	17,79	27,9	25,19	22,9	34,88	23,0	42,13	28,3	44,97	37,1
8	14,00	37,2	18,04	27,7	25,55	22,8	35,18	23,1	42,26	28,6	44,96	37,4
9	14,05	36,8	18,31	27,4	25,91	22,7	35,45	23,3	42,38	28,8	44,97	37,6
10	14,12	36,4	18,58	27,2	26,25	22,7	35,70	23,4	42,50	29,1	45,00	37,9
11	14,21	36,1	18,83	27,0	26,57	22,6	35,93	23,5	42,63	29,3	45,04	38,2
12	14,31	35,7	19,07	26,8	26,88	22,6	36,16	23,6	42,79	29,5	45,07	38,5
13	14,42	35,4	19,29	26,6	27,16	22,6	36,39	23,7	42,96	29,7	45,09	38,9
14	14,52	35,1	19,49	26,4	27,43	22,5	36,64	23,8	43,15	29,9	45,08	39,2
15	14,62	34,8	19,68	26,2	27,69	22,5	36,92	23,9	43,34	30,2	45,03	39,6
16	14,70	34,5	19,87	26,0	27,95	22,4	37,22	24,0	43,52	30,5	44,95	39,9
17	14,75	34,2	20,08	25,7	28,22	22,3	37,53	24,2	43,68	30,8	44,86	40,2
18	14,80	33,9	20,30	25,5	28,52	22,3	37,84	24,3	43,80	31,1	44,76	40,6
19	14,84	33,6	20,55	25,3	28,85	22,2	38,13	24,5	43,90	31,4	44,66	40,9
20	14,89	33,3	20,84	25,0	29,20	22,1	38,40	24,7	43,98	31,7	44,57	41,1
21	14,96	32,9	21,15	24,8	29,55	22,1	38,64	24,9	44,04	32,0	44,49	41,4
22	15,06	32,6	21,46	24,7	29,91	22,1	38,86	25,1	44,09	32,3	44,43	41,7
23	15,19	32,2	21,77	24,5	30,25	22,2	39,06	25,3	44,15	32,6	44,38	42,0
24	15,35	31,9	22,06	24,4	30,57	22,2	39,25	25,5	44,23	32,9	44,33	42,3
25	15,53	31,6	22,34	24,3	30,86	22,3	39,45	25,7	44,32	33,1	44,29	42,6
26	15,71	31,3	22,60	24,1	31,14	22,3	39,65	25,9	44,42	33,4	44,24	42,9
27	15,89	31,0	22,85	24,0	31,41	22,4	39,87	26,0	44,53	33,6	44,18	43,2
28	16,06	30,7	23,10	23,9	31,67	22,4	40,10	26,2	44,64	33,9	44,10	43,5
29	16,21	30,5	23,35	23,7	31,94	22,4	40,35	26,4	44,75	34,2	43,99	43,9
30	16,35	30,2			32,23	22,4	40,61	26,6	44,86	34,5	43,86	44,2
31	16,48	30,0			32,54	22,5	40,86	26,8	44,95	34,9	43,70	44,6
32	16,61	29,7			32,85	22,5			45,02	35,2		

1909 Posizione media $\begin{cases} \alpha = 18^h.4^m.27^s,13. \\ \delta = +86°.59'.43'',6. \end{cases}$

24 Ursae Minoris Gr. 5,9.

Giorno del mese	Luglio		Agosto		Settembre		Ottobre		Novembre		Dicembre	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
	$18^h.4^m$	$86^\circ.59'$	$18^h.4^m$	$86^\circ.59'$	$18^h.4^m$	$86^\circ.59'$	$18^h.4^m$	$86^\circ.59'$	$18^h.3^m$	$86^\circ.59'$	$18^h.3^m$	$86^\circ.59'$
	s	"	s	"	s	"	s	"	s	"	s	"
1	43,70	44,6	37,14	52,9	26,99	58,0	15,38	59,1	63,56	55,6	54,78	48,0
2	43,52	44,9	36,85	53,1	26,66	58,1	14,99	59,1	63,16	55,4	54,55	47,6
3	43,32	45,2	36,57	53,3	26,32	58,3	14,57	59,1	62,77	55,2	54,34	47,3
4	43,13	45,4	36,32	53,5	25,97	58,4	14,13	59,1	62,40	54,9	54,16	46,9
5	42,96	45,7	36,08	53,7	25,58	58,5	13,68	59,0	62,06	54,7	54,00	46,6
6	42,81	45,9	35,83	53,9	25,17	58,7	13,24	59,0	61,74	54,4	53,86	47,3
7	42,68	46,2	35,57	54,1	24,75	58,8	12,81	58,9	61,45	54,2	53,72	45,9
8	42,56	46,5	35,28	54,4	24,32	58,8	12,40	58,7	61,17	54,0	53,58	45,6
9	42,44	46,8	34,96	54,6	23,89	58,9	12,01	58,6	60,89	53,7	53,44	45,3
10	42,31	47,1	34,62	54,9	23,47	58,9	11,64	58,5	60,62	53,5	53,28	45,0
11	42,16	47,4	34,26	55,1	23,08	58,9	11,28	58,4	60,35	53,3	53,11	44,7
12	41,98	47,7	33,89	55,3	22,70	59,0	10,94	58,3	60,07	53,1	52,93	44,4
13	41,77	48,1	33,53	55,4	22,34	59,0	10,60	58,2	59,77	52,9	52,73	44,1
14	41,53	48,4	33,19	55,6	21,99	59,0	10,26	58,1	59,45	52,7	52,53	43,8
15	41,28	48,6	32,86	55,7	21,64	59,0	9,91	58,0	59,12	52,5	52,35	43,4
16	41,03	48,9	32,55	55,9	21,30	59,1	9,55	58,0	58,78	52,2	52,19	43,1
17	40,79	49,2	32,25	56,0	20,95	59,1	9,17	57,9	58,45	52,0	52,05	42,7
18	40,56	49,4	31,96	56,1	20,59	59,2	8,77	57,8	58,12	51,7	51,95	42,3
19	40,35	49,6	31,67	56,3	20,20	59,3	8,35	57,7	57,82	51,4	51,87	41,9
20	40,15	49,9	31,37	56,5	19,80	59,3	7,93	57,5	57,54	51,1	51,81	41,6
21	39,96	50,1	31,07	56,7	19,37	59,4	7,51	57,4	57,29	50,7	51,76	41,2
22	39,78	50,4	30,75	56,8	18,93	59,4	7,10	57,2	57,07	50,4	51,70 / 51,62	40,9 / 40,6
23	39,59	50,6	30,40	57,0	18,49	59,4	6,71	57,0	56,86	50,2	51,52	40,3
24	39,39	50,9	30,03	57,2	18,04	59,4	6,35	56,8	56,64	49,9	51,40	40,0
25	39,18	51,2	29,64	57,4	17,61	59,3	6,02	56,7	56,41	49,6	51,28	39,7
26	38,95	51,4	29,23	57,5	17,20	59,3	5,70	56,5	56,16	49,4	51,17	39,3
27	38,69	51,7	28,82	57,6	16,82	59,2	5,38	56,3	55,89	49,1	51,06	38,9
28	38,41	52,0	28,41	57,7	16,46	59,1	5,05	56,2	55,61	48,9	50,98	38,6
29	38,10	52,3	28,02	57,8	16,11	59,1	4,71	56,0	55,32	48,6	50,94	38,2
30	37,78	52,5	27,66	57,9	15,75	59,1	4,34	55,9	55,04	48,3	50,92	38,8
31	37,45	52,7	27,32	57,9	15,38	59,1	3,95	55,8	54,78	48,0	50,93	37,4
32	37,14	52,9	26,99	58,0			3,56	55,6			50,95	37,0

1909 Posizione media $\begin{cases} \alpha = 18^h.4^m.27^s,13 \\ \delta = +86^\circ.59'.43'',6 \end{cases}$

40 Draconis Gr. 5,2.

Giorno del mese	Ascens. retta	Declin. bor.	Giorno del mese	Ascens. retta	Declin. bor.	Giorno del mese	Ascens. retta	Declin. bor.	Giorno del mese	Ascens. retta	Declin. bor.	Giorno del mese	Ascens. retta	Declin. bor.	Giorno del mese	Ascens. retta	Declin. bor.
	Gennaio			Marzo			Maggio			Luglio			Settembre			Novembre	
	h m 18.6	° ′ 79.59		h m 18.6	° ′ 79.59		h m 18.6	° ′ 79.59		h m 18.6	° ′ 79.59		h m 18.6	° ′ 79 59		h m 18.6	° ′ 79.59
	s	″		s	″		s	″		s	″		s	″		s	″
1	45,07	19,4	2	49,34	2,7	1	56,40	5,9	2	58,26	24,6	2	52,60	38,6	1	44,36	36,2
3	45,07	18,7	4	49,58	2,4	3	56,61	6,4	4	58,15	25,2	4	52,36	38,9	3	44,10	35,8
5	45,08	18,0	6	49,84	2,1	5	56,79	6,9	6	58,06	25,8	6	52,08	39,2	5	43,85	35,3
7	45,10	17,2	8	50,11	1,8	7	56,94	7,5	8	57,99	26,3	8	51,78	39,4	7	43,63	34,8
9	45,16	16,4	10	50,38	1,7	9	57,07	8,0	10	57,91	27,0	10	51,48	39,5	9	43,43	34,3
11	45,24	15,7	12	50,64	1,6	11	57,20	8,4	12	57,81	27,6	12	51,20	39,5	11	43,24	33,9
13	45,33	15,0	14	50,87	1,5	13	57,34	8,9	14	57,67	28,3	14	50,94	39,6	13	43,04	33,5
15	45,43	14,4	16	51,09	1,4	15	57,51	9,4	16	57,52	28,9	16	50,69	39,7	15	42,82	33,0
17	45,51	13,8	18	51,33	1,3	17	57,65	10,0	18	57,38	29,4	18	50,43	39,8	17	42,60	32,5
19	45,58	13,1	20	51,59	1,2	19	57,77	10,7	20	57,24	29,9	20	50,15	39,9	19	42,39	31,9
21	45,66	12,4	22	51,87	1,2	21	57,85	11,3	22	57,12	30,4	22	49,84	40,0	21	42,22	31,3
23	45,77	11,7	24	52,14	1,2	23	57,93	11,9	24	56,99	30,9	24	49,53	40,0	23	42,07	30,7
25	45,91	11,0	26	52,37	1,3	25	58,02	12,4	26	56,85	31,5	26	49,23	39,9	25	41,92	30,1
27	46,06	10,4	28	52,60	1,4	27	58,12	12,9	28	56,67	32,1	28	48,96	39,8	27	41,75	29,6
29	46,21	9,9	30	52,83	1,5	29	58,23	13,5	30	56,46	32,6	30	48,70	39,7	29	41,57	29,0
31	46,34	9,3				31	58,33	14,2									
	Febbraio			Aprile			Giugno			Agosto			Ottobre			Dicembre	
	h m 18.6	° ′ 79.59		h m 18.6	° ′ 79.59		h m 18.6	° ′ 79.59		h m 18.6	° ′ 79.59		h m 18.6	° ′ 79.59		h m 18.6	° ′ 79.59
	s	″		s	″		s	″		s	″		s	″		s	″
2	46,47	8,7	1	53,08	1,5	2	58,40	14,9	1	56,25	33,1	2	48,42	39,7	1	41,40	28,4
4	46,63	8,1	3	53,35	1,6	4	58,43	15,6	3	56,07	33,5	4	48,12	39,7	3	41,26	27,7
6	46,81	7,5	5	53,62	1,7	6	58,44	16,2	5	55,89	33,9	6	47,80	39,6	5	41,15	27,0
8	47,01	6,9	7	53,88	2,0	8	58,46	16,8	7	55,72	34,4	8	47,51	39,4	7	41,06	26,3
10	47,23	6,4	9	54,12	2,3	10	58,50	17,4	9	55,51	34,9	10	47,23	39,2	9	40,98	25,7
12	47,43	6,0	11	54,33	2,5	12	58,55	18,0	11	55,27	35,4	12	46,98	39,0	11	40,88	25,1
14	47,62	5,6	13	54,53	2,8	14	58,58	18,7	13	55,03	35,7	14	46,73	38,8	13	40,77	24,4
16	47,79	5,2	15	54,75	3,0	16	58,56	19,5	15	54,79	36,1	16	47,47	38,6	15	40,66	23,7
18	47,98	4,7	17	54,99	3,2	18	58,53	20,2	17	54,58	36,4	18	46,19	38,4	17	40,58	23,0
20	48,20	4,2	19	55,23	3,5	20	58,49	20,8	19	54,37	36,7	20	45,90	38,2	19	40,54	22,2
22	48,44	3,8	21	55,45	4,0	22	58,47	21,3	21	54,16	37,1	22	45,61	37,9	21	40,51	21,5
24	48,69	3,5	23	55,63	4,4	24	58,46	21,9	23	53,92	37,5	24	45,35	37,5	23	40,48 40,46	20,8 20,5
26	48,91	3,3	25	55,81	4,8	26	58,44	22,6	25	53,66	37,8	26	45,11	37,1	25	40,41	19,8
28	49,12	3,0	27	55,99	5,1	28	58,41	23,3	27	53,37	38,1	28	44,88	36,8	27	40,36	19,1
30	49,34	2,7	29	56,19	5,5	30	58,35	24,0	29	53,10	38,3	30	44,63	36,5	29	40,34	18,3
			31	56,40	5,9	32	58,26	24,6	31	52,84	38,4	32	44,46	36,2	31	40,36	17,6
									33	52,60	38,6						

1909 Posizione media $\begin{cases} \alpha = 18^h.6^m.51^s,32 \\ \delta = +79^\circ.59'.23'',3. \end{cases}$

L'Accademico Segretario: Lorenzo Camerano.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 22 Novembre 1908.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Boselli, Vice-presidente dell'Accademia, Rossi, Graf, Brusa, Renier, Pizzi, Chironi, Ruffini, Stampini, Brondi, Sforza e De Sanctis Segretario. — Scusano l'assenza i Soci Manno, Direttore della Classe, e Carle.

È approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente.

Il Presidente commemora brevemente con sentite parole il defunto Socio nazionale non residente Tancredi Canonico.

Si comunicano i ringraziamenti per la nomina a Soci nazionali non residenti dei professori I. Guidi, Tocco, Pigorini; a Soci stranieri dei professori Foerster, Saleilles, Jellineck, Duchesne; a Soci corrispondenti dei professori Flamini, Parodi, Patroni.

Si dà notizia che l'Accademia essendo stata invitata a partecipare al Congresso storico internazionale che si tenne a Berlino nello scorso agosto, vi si fece rappresentare dal Socio nazionale non residente Rajna.

Si comunica l'invito al secondo Congresso internazionale d'archeologia che si terrà al Cairo nell'aprile e maggio 1909. La Presidenza si darà cura affinchè vi sia affidata a qualche nostro Socio la rappresentanza dell'Accademia.

Sono presentate d'ufficio le seguenti pubblicazioni offerte in omaggio all'Accademia:

del Socio residente Sforza: *I più antichi protocolli del-*

l'Archivio notarile dell'Aulla (Genova, tip. della Gioventù, 1908) e *Gli scrittori della Lunigiana estense* (Modena, Vincenzi, 1908);

del Socio corrispondente A. VENTURI: *Storia dell'arte italiana,* vol. IV-VI (Milano, Hoepli, 1906-1908);

di Ugo OXILIA e G. BOFFITO, *Un trattato inedito di Egidio Colonna* (Firenze, Seeber, 1908);

di Federico KIRCHHEISEN, *Bibliographie du temps de Napoléon,* tome I (Paris-Genève-London, 1908).

Il Socio CHIRONI offre con parole di vivo encomio gli *Appunti didattici di diritto romano,* di Cesare BERTOLINI (fasc. 5°-8°, Torino, 1907-1908).

Il Socio RUFFINI presentando gli *Studi storici e note sopra alcune iscrizioni medievali* di Federico PATETTA (Modena, Società tipografica, 1907), mette in rilievo la bontà del metodo e la copia della erudizione che vi dimostra l'Autore e si trattiene sulla importanza dei resultati a cui egli perviene.

Per la inserzione negli *Atti* accademici vengono presentati

dal Socio ROSSI una sua nota sulla *Origine e sviluppo degli studi egittologici in Europa;*

dal Socio RENIER uno studio di Pietro GAMBÈRA: *Sulla topografia di Malebolge. Note dantesche.*

Per le *Memorie* viene offerto dal Socio RENIER uno scritto di Edmondo SOLMI: *Leonardo da Vinci come fondatore della embriologia.* Il Presidente delega i Soci GRAF e RENIER a riferirne in una prossima adunanza.

È pure presentato un lavoro del Socio CIPOLLA intitolato: *Note petrarchesche desunte dall'archivio Vaticano.* La Classe con voto unanime ne delibera l'inserzione nelle *Memorie* accademiche.

Il Socio DE SANCTIS a nome anche del Socio CIPOLLA legge la relazione intorno alle *Ricerche sulla potenza marittima degli Spartani e sulla cronologia dei navarchi,* di Luigi PARETI. La Classe, approvata la relazione, delibera con pienezza di voti segreti che lo studio del PARETI sia inserito nelle *Memorie.*

LETTURE

Origine e sviluppo degli Studi Egittologici in Europa.

Nota del Socio FRANCESCO ROSSI.

Fra tutti i popoli del mondo antico quello che alla meditazione del filosofo, alle ricerche dell'archeologo apre il più vasto campo, è incontestabilmente l'egiziano. Dall'Egitto vennero in Europa le prime norme del vivere civile, e per comune consenso, è posta nella Valle del Nilo la culla delle scienze e delle arti.

La Grecia stessa sì orgogliosa della sua civiltà, venerava fra i suoi primi legislatori un Inaco, un Danao, un Lelege, un Cecrope, che la tradizione fa tutti oriundi dall'Egitto; ed i suoi più nobili figli non disdegnavano di recarsi sulle sponde del Nilo per istruirsi alla scuola di quei sacerdoti, la cui alta sapienza è così bene delineata da quelle parole, che Platone fa dire da uno di essi a Solone, che visitava l'Egitto: " Oh! Solone, Solone! Voi Greci non siete che fanciulli; non vi ha in tutta la Grecia un solo vegliardo „.

Per la sua posizione geografica intermediaria fra l'Asia, l'Affrica e l'Europa, non vi fu avvenimento di qualche importanza nel mondo antico, a cui l'Egitto non abbia preso parte, dominando ora colle armi sotto i Faraoni, ora colle idee sotto i Greci ed i Romani, e fu nelle scuole filosofiche di Alessandria che formossi quel grande movimento intellettuale, da cui sorse il mondo moderno.

Non è quindi meraviglia se già fin dal risorgimento delle lettere portassero i Dotti la loro attenzione sull'Egitto, e cercassero di leggere le numerose iscrizioni, che nella loro misteriosa scrittura coprivano le pareti e le colonne de' suoi colossali templi e delle sue splendide Necropoli. Ma fuorviati dal falso concetto, che la scrittura dei geroglifici fosse stata inventata dai sacerdoti per nascondere agli occhi dei profani quelle dottrine, che erano solo da comunicarsi agli iniziati del santuario, cercarono nel simbolismo la soluzione dell'arduo problema.

Così nel decimoquinto secolo Valeriano Bolzano, chiamato *Pierius*, per allusione al nome *Pieridi* dato alle Muse, fondandosi su alcune citazioni di autori greci venuti in tarda età, che confondendo le scene rappresentative e gli anaglifi colla scrittura, davano quasi sempre ai segni geroglifici significazioni simboliche, si fece a spiegare nella sua opera che ha per titolo: *Hieroglyphica, sive de sacris œgyptiorum literis commentarii*, il senso dei geroglifici per mezzo dei soli simboli. Così lo sparviero, immagine del Dio *Horo*, significava secondo lui *l'anima del mondo*, il coccodrillo *l'uomo malvagio*, l'ibis posto sopra un'insegna, immagine del Dio *Thoth*, il *simbolo della vigilanza*, dando via via la spiegazione solo di segni isolati senza mai imprendere a tradurre qualche testo.

Il primo, che abbia tentato la traduzione di un testo geroglifico fu il Padre Atanasio Kircher, il quale nel suo *Ædipus Ægyptiacus* pubblicato nel 1650 professa di voler dare una nuova interpretazione dei varii obelischi, che si trovano in Roma. E se vi fu persona, che pe' suoi precedenti studi fosse stata meglio in grado di riuscire nell'arduo problema era certamente questo erudito Gesuita, che colle sue due opere: *prodromus Ægyptiacus*, e *Lingua œgyptiaca restituta*, pochi anni prima da lui pubblicate, aveva dimostrato quanto fosse versato nel copto, ultima trasformazione dell'antica lingua dei Faraoni. Ma movendo egli pure dall'idea preconcetta, che la scrittura geroglifica si componesse di segni puramente simbolici e mitici, cercò di risolvere il problema per mezzo di una mescolanza di scienza cabalistica e di demonismo, riempiendo di tali esagerazioni e di tali stranezze il suo scritto, che ne rimase non poco offuscato il merito, che si era giustamente acquistato colle precedenti sue opere copte (1).

Più strani ancora erano quei sistemi, che non solo tenevano per segni simbolici e mitici i geroglifici, ma volevano che questi

---

(1) Basterà citare l'interpretazione, che egli dà del nome *autocrator* contenuto in un cartello reale dell'obelisco *Pamfilio*, per dimostrare in quali stranezze possa cadere chi sulle ali piuttosto dell'immaginazione, che dietro la guida di una sana critica si accinge a questi studi. Quella parola, che come straniera all'antica lingua egiziana, era scritta sul monumento in tutte lettere alfabetiche, è da lui così interpretata: *Osiris foecunditatis auctor est, cuius generationis facultatem e coelo in suum regnum Sacer Mophta trahit.*

fossero ricavati da un più ristretto ordine di idee, e non vedevano quindi nei geroglifici che emblemi relativi all'astronomia, al calendario ed ai lavori dell'agricoltura. Onde le loro ricerche progredirono sì poco, che alla fine del secolo decimottavo si confondevano ancora colla scrittura quelle scene e rappresentazioni che anaglifi sono dette, e si trovano in grande numero nei papiri colla medesima scrittura mescolate.

Il dotto illustratore dei manoscritti copti del Museo Borgiano, lo Zoega nella sua erudita ôpera *de origine et usu obeliscorum*, pubblicata in Roma nel 1797, fu il primo, che abbia stabilito in modo chiaro e preciso la distinzione tra i geroglifici e le rappresentazioni puramente simboliche mescolate e confuse nei testi con quelli, e sostenne che i geroglifici contenevano segni di suoni articolati contro l'inveterato pregiudizio, che loro attribuiva un valore esclusivamente simbolico e mitico. Ed a lui spetta principalmente il merito di avere presagito che quegli ovali, che costituiscono i cartelli reali, e che egli vedeva frequentemente ripetuti sugli obelischi di Roma, contenessero realmente nomi di Re. Ma questi così scarsi risultati dopo tanti anni di ricerche dovevano naturalmente scoraggiare i cultori di tali studi, e distoglierli dal continuare le ricerche in questo campo, che dava così pochi frutti, quando un avvenimento inaspettato nel principio dell'ora scorso secolo ridestò la speranza di poter finalmente risolvere il grave problema del deciframento dei geroglifici, che aveva per sì lunghi anni indarno affaticato la mente dei dotti.

Tutti sanno come la grande spedizione militare del Bonaparte in Egitto negli ultimi anni del secolo decimottavo fosse accompagnata da una schiera di scienziati, che durante il breve possesso francese di quella contrada si diedero attivamente a raccogliere e copiare quanti più monumenti poterono, preparando in tal modo il materiale per quella grande opera *La Description de l'Égypte*, che rimarrà per tutti i tempi una corona d'imperituro alloro per quella nobile nazione. Ma quella splendida spedizione, che pareva dover realizzare il grande concetto della colonizzazione dell'Egitto per mezzo degli Europei, già proposta dal Leibnitz a Luigi XIV, ed urgentemente raccomandata dal Bossuet nel suo discorso sulla storia universale, dopo una lunga e sanguinosa lotta, in cui milioni di tesori ed

innumerevoli ecatombe di vite umane furono sacrificate, sarebbe passata come una meteora, se la scienza colle sue immortali conquiste non ne perpetuasse la memoria.

Il monumento più importante di tutti, e per cui i tesori raccolti nella grande opera della *Description de l'Égypte* furono resi utili alla scienza ed alla storia, è il frammento di una pietra di basalto nero trovato nel 1799 da un uffiziale francese per nome *Bouchart*, mentre dirigeva alcuni lavori di difesa nel ridotto di S. Giuliano presso Rosetta. E ben ne conobbero l'importanza quegli scienziati, che lo fecero tosto trasportare in Alessandria, donde già stava per essere spedito in Francia ad ornare le sale del Louvre, quando la vittoria degli Inglesi ad Alessandria e la resa della città lo fecero cadere nelle mani di uno de' più rinomati e zelanti dotti di quei tempi, il sig. William Hamilton, autore dell'*Ægyptiaca*, allora commissario presso l'armata Inglese, che lo portò a Londra, ove forma uno dei più preziosi ornamenti del Museo britannico; fattone quindi trarre un numero straordinario di copie, le diffuse per tutto il mondo scientifico.

Questa pietra, conosciuta ora nella scienza sotto il nome di *tavola di Rosetta*, fu quella che diede la chiave a sciogliere la lingua dei monumenti e rendere la scienza capace di penetrare per l'oscurità di migliaia d'anni, estendendo i limiti della storia, e, per esprimermi colle parole del Bunsen, *aprire anche una possibilità di spiegare i primitivi segreti della razza umana.*

L'Egitto infatti sta oggi innanzi a noi come un libro, che in colossali lettere di pietra ci rivela la sua vita di più migliaia d'anni. Tutto in quella monumentale contrada è parlante; le mura de' suoi templi, le sue camere sepolcrali, le piramidi, gli obelischi, le colonne, gli architravi, le stele funerarie, i sarcofagi, i colossi reali, le statue degli Dei, colle lunghe iscrizioni ci narrano nella loro meravigliosa scrittura, come migliaia di anni prima che i Romani ed i Greci, e prima eziandio che i Medi ed i Persiani, gli Israeliti ed i Fenicî, gli Assiri ed i Babilonesi, cominciassero la loro missione nel mondo, nella Valle del Nilo un popolo altamente formato alle arti ed alle scienze, spiegò una tale attività, per cui non solo s'innalzò al di sopra di tutti i suoi contemporanei, ma esercitò ancora nei tempi posteriori un evidente influsso fra le razze aspiranti a più alti fini.

Questa tavola di Rosetta porta incise tre iscrizioni; le due prime, in lingua egiziana, sono scritte nelle due scritture più in uso a quei tempi, la geroglifica cioè, riservata principalmente ai monumenti e la demotica adoperata invece dal popolo; la terza è in lingua greca. Lo studio di quest'ultima fatta dai dotti Ellenisti Heyne e Porson, dimostrò, che il testo greco non è altro che la versione dell'iscrizione egiziana fatta in quelle due scritture, e contiene una ricognizione dei più alti onori a Ptolomeo Epifane fatta dai sacerdoti di tutto l'Egitto radunatisi a Memfi.

Colla scoperta di un tal monumento rinacque tosto nei dotti la speranza di poter finalmente trovare col confronto di quei tre testi il filo, che li guidasse nel complicato labirinto di quella misteriosa scrittura. Ma sgraziatamente, per rottura della pietra mancavano in quel prezioso monumento il principio dell'iscrizione geroglifica ed il fine della greca. L'unico testo compiuto era quello di mezzo, in iscrittura demotica, ed i primi tentativi di deciframento cominciarono appunto da questo. Il francese Silvestro De-Sacy e lo svedese Akerblad rivolsero i primi la loro attenzione al testo demotico. Ma partendo entrambi dalla falsa credenza, che la scrittura demotica si componesse di segni puramente alfabetici, viziarono sin da principio con tale errore le loro ricerche. Tuttavia il De-Sacy, presupponendo che la lingua della iscrizione fosse la copta o qualche dialetto affine dell'Egiziano, prese ad identificare i nomi proprii, che trovò più frequentemente ripetuti nell'iscrizione. Da questo esame egli veniva a segnalare i tre gruppi che contenevano i nomi di Ptolomeo, di Berenice e di Alessandro. Il sig. Akerblad ripigliando il lavoro del De-Sacy, confermava la verità di questa scoperta, e dimostrò ancora che quei gruppi erano capaci di essere decomposti in lettere, e con questi, e con altri gruppi, fra cui vi erano delle parole copte, egli formò un alfabeto demotico di circa quindici lettere, ma non potè andar più oltre, perchè aveva creduto che fosse tutta alfabetica la scrittura demotica, e voleva inoltre ritrovare nei gruppi anche le vocali delle parole copte.

L'inglese D^re^ Tommaso Young prendendo per punto di partenza l'alfabeto di Akerblad, conchiuse con molta sagacia, dal fatto dell'esistenza dei segni alfabetici nella scrittura demotica, alla possibilità di segni consimili nella geroglifica per trascri-

vere i nomi stranieri. Questo dotto medico ed insigne matematico non si limitò a studiare l'iscrizione demotica, ma rivolse anche la sua attenzione alla geroglifica, ed applicò ad entrambe un metodo che rivela piuttosto la sagacità dell'esperto matematico che il genio del filologo. Egli divise coll'aiuto della versione greca i due testi geroglifico e demotico in gruppi, e conoscendo ciò che era sfuggito ad Akerblad, che anche nel demotico si contenevano segni ideografici, si fece a suddividere ancora il testo geroglifico in paragrafi, e paragonando i vari gruppi, di cui questi si componevano con le parole e sentenze ripetute nel testo greco, e con i segni demotici, a cui erano supposti corrispondere, egli potè ben presto rettificare ed estendere l'alfabeto dello svedese, e scoprire circa 150 gruppi, dei quali trovò le corrispondenti parole nell'iscrizione greca, ed in alcuni casi, ma non sempre con esattezza ne indicò la parola copta.

Fin qui però non era ancora nel terreno dei geroglifici; ma avendo poscia osservato che i papiri funerari, che si trovano a lato delle mummie, talora scritti in carattere geroglifico e talora in jeratico, portavano tutti le medesime rappresentazioni o scene, ne conchiudeva che i testi non dovevano essere diversi, epperò applicando a questi papiri il metodo sovrariferito, egli venne col loro paragone a formarsi una tavola di corrispondenza dei segni geroglifici e jeratici.

Ora per l'analogia che vi è tra il demotico ed il jeratico, che secondo il Young costituivano una sola scrittura non avente altra differenza che quella di una maggior corruzione nei segni del primo, ne inferiva dover essere cosa facile il convertire il gruppo demotico in un gruppo jeratico, e per mezzo di questo in un geroglifico. Prendendo quindi il gruppo demotico, che conteneva il nome di Ptolomeo, datogli dall'iscrizione, riducendolo in jeratico, e questo in geroglifico per mezzo della tavola di corrispondenza, doveva riuscire alla formazione di un gruppo, che si trovasse nel testo geroglifico della tavola di Rosetta. La riuscita compieva le sue speranze, poichè il gruppo geroglifico era il medesimo di quello contenuto nell'ovale che è serbato ai nomi reali. Per mezzo delle lettere geroglifiche ottenute coll'analisi di questo nome leggeva poi quello di Berenice, che si trovava scritto sopra una porta del tempio di Karnak l'antica Tebe. Ma da queste sue luminose scoperte non seppe poi trarre

alcun profitto, e l'analisi da lui fatta fu così infelice, che di trenta segni undici solo furono da lui spiegati più o meno correttamente, nè era ancor ben certo della natura dei segni fonetici, ed ignorava affatto l'esistenza dei segni omofoni, onde le sue ulteriori ricerche rimasero affatto sterili, ed il sig. Visconte de Rougé potè con ragione affermare, che il misterioso libro di geroglifici era ancor chiuso a più sigilli quando lo Champollion vi stese la mano per romperli.

Questo peregrino ingegno nato nel 1790 a *Figeac*, piccola città della Francia, mostrò fin dalla fanciullezza una speciale predilezione per la storia e le dottrine dell'Antico Egitto, poichè narrano i suoi biografi, che si dilettava a raccogliere, come meglio poteva, nozioni dell'Egitto, e quelle forme di caratteri geroglifici, che gli avveniva di vedere, disegnavali puerilmente sui libri e sui cartolari della scuola.

Mandato dalla famiglia a continuare i suoi studii nel Liceo di *Grenoble*, presentava alla Società di Scienze ed arti di quella città il progetto di un'opera tutta consacrata ad illustrare l'Egitto sotto il dominio dei Faraoni, con una carta generale della valle del Nilo secondo le divisioni di quella remota epoca, opera che egli poi compì a Parigi, ove si recò nel 1807, e la pubblicò in due volumi nel 1814. In questo lavoro, dettato con quella lucidità di idee, che è propria degli scritti di questo grande Francese, egli stabilisce le posizioni, i nomi e le etimologie delle città, dei villaggi e degli altri luoghi notabili della Valle del Nilo nei più antichi tempi, cominciando dal Mediterraneo e risalendo ordinatamente sino alla prima cataratta, naturale confine dell'Egitto.

Dopo questo primo lavoro si accinse a trattare della lingua e della scrittura degli antichi egiziani. Gli studi del De-Sacy, dell'Akerblad e del Young sull'iscrizione demotica della tavola di Rosetta, avevano confermata l'opinione già emessa dal Salmatius, che il copto fosse la rappresentazione moderna dell'antica lingua dei Faraoni. Lo Champollion quindi si preparò al suo nuovo lavoro con un profondo studio del Copto, nel quale compose anche una grammatica ed un dizionario, che sebbene scritto solo per uso suo proprio, non rifiutava tuttavia di comunicare a quanti glie ne facevano richiesta. E già nel 1821 pubblicava una sua memoria sulla scrittura jeratica degli an-

tichi egiziani, ove dimostrava, che essendo questa scrittura una semplice modificazione della geroglifica, dalla quale immediatamente formossi per la comodità di scrivere più speditamente, dovevano i segni jeratici avere gli stessi valori dei geroglifici; errava però nel sostenere, che i segni jeratici esprimessero idee di cose e non lettere, fossero cioè segni ideografici e non fonetici. Ma non tardò a ricredersi del suo errore, poichè avendo in quel frattempo l'inglese Bankes fatto distribuire fra i dotti parecchie copie dell'iscrizione geroglifica del piccolo obelisco di File da lui acquistato, con l'iscrizione greca del piedestallo, in cui trovavansi i nomi di Ptolomeo e di Cleopatra, una di queste venne nelle mani dello Champollion, e fu per lui il faro, che lo guidò al porto. Imperocchè dal confronto dei due cartelli avendo riconosciuto che quello che conteneva il nome di Ptolomeo corrispondeva al cartello decifrato dal Young, ne conchiuse tosto che l'altro doveva corrispondere egualmente col nome di Cleopatra, epperciò le lettere che sono eguali nei due nomi dovevano trovarsi nello stesso ordine, col quale si succedono nei nomi greci, e le lettere, che sono proprie ad un solo nome non trovarsi nell'altro. Il fatto comprovava la verità della sua illazione, e così otteneva con questi due cartelli 12 segni alfabetici. Applicando poscia questi segni ad altri cartelli reali dati dalla grande opera francese la *Description de l'Égypte*, egli trovava il nome di Alessandro che lo forniva di tre nuovi segni. I nomi di Ptolomeo (Ptolmis) e di Berenice già trovati dal Young oltre a dargli una nuova lettera, la *B*, lo guidarono a scoprire i segni omofoni per le lettere *K* e *S*. Questi risultati erano decisivi, nè più potevasi dubitare dell'esistenza, almeno per i nomi dei Re Lagidi, di un alfabeto geroglifico. Ripudiando quindi il suo primitivo errore di considerare cioè i geroglifici come segni puramente simbolici, ripetè la sua prova sopra altri cartelli della stessa sovracitata opera, e riuscì a decifrare ancora i nomi di *Cesare*, di *Tiberio*, di *Traiano* e di *Adriano*. Allora scrisse la celebre lettera all'illustre Dacier, per la quale dimostrava, che gli egiziani si servirono dei geroglifici, come di caratteri alfabetici, a scrivere sui loro monumenti i nomi ed i titoli degli imperatori Greci e Romani, ed alla lettera andava congiunto un alfabeto, per mezzo del quale leggevansi facilmente tutti questi nomi e quanti altri si possono sugli egiziani monumenti incontrare.

Da questo momento il filo, che doveva guidarlo nell'intricato labirinto di quella misteriosa scrittura era nelle sue mani. Il Dr. Young nel suo tentativo di deciframento trovava un primo ostacolo nell'assenza delle vocali brevi nella scrittura, lo Champollion vide invece in quest'assenza l'applicazione del principio, che regge tutte le scritture semitiche. Un secondo ostacolo pel filologo inglese fu la presenza dei segni omofoni fra questi elementi. Lo Champollion avendo scorto che certe lettere erano rappresentate qualche volta con segni differenti, afferma tosto il principio degli omofoni, cioè l'uso libero nella scrittura di diverse figure, possedenti il valore della medesima articolazione, e può addurre per mezzo de' suoi lunghi studi comparativi sui monumenti riprodotti nella grande opera francese della *Description de l'Égypte*, prove materiali della sua asserzione.

Progredendo poscia sempre più in queste indagini dalla scoperta delle lettere alfabetiche, usate a scrivere i nomi stranieri, egli viene pure a riconoscere che i nomi stessi ed i titoli dei Faraoni e di ogni altro indigeno dell'Egitto, potevansi scrivere ugualmente con questi segni alfabetici, e che coi segni medesimi aventi lo stesso valore si esprimevano i nomi, le qualità ed attribuzioni degli Dei dell'Egiziana mitologia, e che similmente per caratteri alfabetici significavansi i nomi comuni, gli aggettivi e tutte le forme grammaticali che costituivano la lingua parlata dagli antichi egiziani. Da tutti questi esami fu quindi condotto ad ammettere non solo l'esistenza nella scrittura geroglifica dei segni alfabetici, ideografici, simbolici ed omofoni, ma ancora (contrariamente a quanto egli stesso ed i suoi predecessori opinavano) che i caratteri alfabetici erano usati nelle iscrizioni egiziane simultaneamente coi simbolici e figurativi, e spesso associati insieme per iscrivere uno stesso vocabolo, così che da queste variate combinazioni lo Scriba congiungendo ai simboli i suoni, poteva presentare nel medesimo tempo agli occhi ed alle orecchie del lettore una vivente espressione del pensiero. Dimostrato infine essere la scrittura demotica derivata per abbreviazione di forma dalla jeratica, allo stesso modo con cui questa era proceduta dalla geroglifica, ne determinava i principali caratteri, e tutti questi risultati delle sue splendide ricerche riassumeva con grande corredo di prove nella sua opera pubblicata nel 1824 sotto il modesto titolo di *Précis du système hjéroglyphique des anciens Égyptiens*.

Svelata l'arcana dottrina e sviluppato il modo delle egiziane scritture, abbisognava allo Champollion gran copia di monumenti originali, che gli prestassero materia a confermare ed estendere le sue scoperte ed a farne l'applicazione a profitto della storia.

L'acquisto fatto in quei tempi dal Re Carlo Felice della preziosa collezione delle antichità egiziane, che il nostro Drovetti, già Console generale della Francia in Egitto, aveva radunato in lunghi anni di sapienti ricerche, procacciò alla città di Torino il vanto di possedere la più ricca e splendida collezione di antichità egiziane di Europa. Attratto quindi dalla ben meritata fama del suo Museo venne lo Champollion a Torino, e nello studiare la sua celebrata collezione, rivolse in modo speciale l'attenzione ai monumenti regii, ossia portanti cartelli reali, che Egli illustrò colle dotte lettere, che di qui scriveva al suo protettore il Duca di *Blacas*. Ed a lui spetta principalmente il merito di avere salvato dall'oblio, in cui forse sarebbe rimasto, il celebre nostro papiro cronologico, conosciuto oggi nella scienza col nome di *papiro jeratico regio di Torino*. Imperocchè questo prezioso documento per incuria di chi soprintendeva alla spedizione dall'Egitto della collezione del Drovetti, giunse a Torino rotto in mille pezzi, e tutti ammucchiati e confusi tra loro. Questo deplorevole stato del papiro ingannò i Dotti, che componevano la Commissione nominata a ricevere ed ordinare la preziosa collezione, i quali tenendoli come frammenti di diversi papiri li posero a parte. Lo Champollion vide per caso questi frammenti, ed avendo esaminati quelli di maggior mole, trovò che contenevano cartelli reali, e riconosciutane tosto l'alta importanza, li segnalò ai Dotti. Onde l'illustre Seyffarth ne fece poscia oggetto di speciale studio. Questo dotto e paziente tedesco raccolse con somma cura tutti questi frammenti, e paragonandoli gli uni cogli altri, e studiandone attentamente le fibre del papiro, il colore ed il modo di scrittura, e colla fortunata scoperta di altri frammenti portanti in carattere jeratico nomi reali, riuscì dopo tre mesi di pazientissimo lavoro a metterli tutti insieme nell'ordine in cui si trovano ora esposti nel Museo. Tale papiro pubblicato poscia dal Wilkinson e quindi dal Lepsius, fu continuamente studiato dagli Egittologi, che trovarono in esso la più autentica conferma del maggior numero

dei Re dati da Manetone nel suo compendio delle dinastie Faraoniche, tenute per tanto tempo come favolose.

Da Torino lo Champollion si recava a Livorno per esaminare e riferire sopra una collezione di antichità egiziane, che il Governo francese si era proposto di acquistare per diminuire il rimprovero, che gli si faceva di essersi lasciato fuggire la bella collezione del Drovetti. Colà gli fu presentato il giovane professore di lingue orientali nell'Università di Pisa Ippolito Rosellini. E tosto nacque fra i due scienziati, così simili per ingegno e per bontà d'animo, quella dolce e fraterna amicizia, che li tenne per più di quattro anni inseparabili, e fece loro per amor della scienza dividere tanti pericoli e travagli nel viaggio, che essi fecero nell'Egitto e nella Nubia, dirigendo la scientifica spedizione in quelle regioni, iniziata nel 1828 sotto gli auspici dei due governi di Francia e di Toscana associatisi a quel nobile fine.

L'immenso tesoro da essi raccolto in quindici mesi di continue e sapienti ricerche, fu poscia pubblicato in due splendide opere, una in francese e l'altra in italiano sotto lo stesso titolo di *Monumenti dell'Egitto e della Nubia.*

Mentre attendeva per la sua parte a quest'importante lavoro, dettava pure lo Champollion la grammatica egiziana, che sarà sempre in ogni tempo il monumento più insigne degli studi fatti sulla scrittura dell'antico Egitto. Ma la sua salute già fortemente scossa dalle fatiche sostenute in quelle remote ed infocate regioni, non potè reggere alle lunghe e prolungate veglie, e quel nobile ingegno, soprappreso da un accesso di paralisia, moriva ai 5 di marzo del 1832, quando contava appena quarantadue anni di vita, lasciando a suo fratello la cura di pubblicare colla grammatica il dizionario che contiene molte centinaia di gruppi geroglifici con la loro traduzione, appoggiata il più sovente a saldissime ragioni, sempre poi a validissime congetture. Ma non ostante questi splendidi risultati le dottrine dello Champollion incontrarono da principio degli oppositori in uomini di non comune ingegno e coltura, come furono Klaproth, Sickler ed altri, che vollero per altra via trovare il deciframento dei geroglifici, ma rimasero le loro ricerche del tutto infruttuose. Le dottrine invece dello Champollion ebbero ben presto seguaci in tutta l'Europa.

Così in Francia si fece a diffondere dalla cattedra e colla stampa i principî dello Champollion il Visconte de Rougé, formando intorno a sè una numerosa schiera di Egittologi, che tutti illustrano coi loro scritti la novella scienza, e ricordo specialmente il Maspero, che italiano di nascita, seguì giovinetto il padre a Parigi, ove compì i suoi studi, e presa la cittadinanza francese, ottenne alla morte del de Rougé, avvenuta nel 1876, di succedergli nella carica al Collegio di Francia, la rinomata Università di Parigi, ed oggi dirige il grande Museo di Boulaq, ove continua con splendidi risultati gli scavi iniziati dal suo predecessore Mariette-Bey, il felice scopritore del famoso *Serapeum* o tempio di *Serapide*, con cui venne ad accrescere di un ricco tesoro la già splendida collezione del Museo-egizio del *Louvre*.

E fra i primi seguaci delle dottrine dello Champollion merita di essere specialmente ricordato l'illustre egittologo di *Chalons*, Francesco Chabas, il quale dal fondo del suo villaggio natìo, senz'altro appoggio che la sua ferrea volontà, seppe elevarsi a principe in questi studî. Egli più d'ogni altro egittologo ci avviò nella conoscenza dei papiri jeratici, e ci lasciò nelle numerose sue pubblicazioni, veri modelli del metodo analitico e comparativo, che è il solo mezzo per arrivare ad una sincera intelligenza dei testi.

In Germania il primo a diffondere le dottrine dello Champollion fu il Dr. Riccardo Lepsius, il dotto editore ed illustratore delle *tavole Eugubine*, e con l'insegnamento e con gli scritti concorse più di tutti a porre sopra salda base la novella Scienza.

Il Museo d'Antichità di Torino, arricchito della splendida collezione del Drovetti, e quella che il Rosellini aveva portato a Pisa dalla sua Spedizione scientifica in Egitto, avevano fatto dell'Italia il principal centro per lo studio delle antichità egiziane. La fama quindi delle nostre collezioni indusse la Reale Accademia delle Scienze di Berlino a mandare in missione presso di noi il Dr. Lepsius perchè le esaminasse e le studiasse. Quanto rallegrasse l'animo del buon Rosellini la deliberazione dell'Accademia Berlinese lo dimostra nella sua nobile lettera del 4 febbraio 1835 al Bunsen, l'illustre autore dell'*Ægyptens Stelle in der Weltgeschichte*, il quale gliene aveva dato comunicazione. In questa lettera, senza gelosia del nuovo compagno negli studi nuovi, scrivevagli: “ La Comunicazione da V. S. Ill.ma favoritami

" che la Reale Accademia delle Scienze di Berlino abbia deciso
" di mandare il Dr. Lepsius in Italia e segnatamente a Pisa,
" per profittare dei materiali da me raccolti, spettanti allo studio
" della filologia e archeologia egiziana, è stata per me una
" faustissima novella, poichè veggo in questa decisione il più
" certo e il più efficace mezzo d'incremento e di perfezione a
" questi interessanti studi. Io non istarò a dire quanto alta-
" mente mi abbia lusingato una tale deliberazione, la quale in
" virtù dell'illustre Consesso, che ha stimato bene di prenderla,
" diviene il più solenne ed il più autorevole voto di approva-
" zione, che darsi potesse in tutta l'Europa ai nuovi studi delle
" cose d'Egitto. Ma solo mi restringerò ad esprimere tutta la
" mia soddisfazione ed il giubilo che ho provato, e che provo
" nel pensiero dell'utilità grandissima, che va risultarne a questa
" scienza; lo che viene necessariamente accertato per la scelta
" fatta nella persona del sig. Dr. Lepsius, il quale ha ormai
" dato con sue opere pubblico e chiaro argomento della rara
" attitudine e dottrina sua negli studi filologici intesi e diretti
" a debito scopo „.

Ed in conformità di quanto aveva scritto al Bunsen faceva al Lepsius in Pisa la più affettuosa accoglienza, comunicandogli colla massima liberalità e documenti e studî, onde ne serbò poi sempre il dotto tedesco grata memoria, e gli attestava pubblicamente la sua riconoscenza nell'importante lettera sull'alfabeto geroglifico, che pubblicò al suo indirizzo negli annali dell'Istituto archeologico di Roma dell'anno 1837, ove teneva allora l'ufficio di Segretario redattore (1).

(1) Lo Champollion, che aveva tratto il suo alfabeto geroglifico in gran parte dai monumenti dell'epoca Ptolomaica e Romana, ove nei nomi specialmente degli Imperatori molti segni sillabici erano stati adoperati alfabeticamente, contrappone nella sua grammatica geroglifica ai 15 suoni (12 consonanti e 3 vocali) dell'antica lingua egizia, 132 caratteri fonetici, e per dar ragione di questo straordinario numero di segni alfabetici, dovette assegnare a ciascuno dei suoni egiziani un numero stragrande di segni omofoni. Ora ognun vede la confusione che avrebbe naturalmente ingenerato una scrittura, in cui ogni parola avesse potuto essere espressa in tante maniere diverse, senza alterarne punto la pronunzia. Ma questo non era il caso nel sistema geroglifico, poichè da uno studio più accurato dei monumenti antichi si vide, che a misura che si saliva verso l'antichità il metodo si semplificava, e l'alfabeto dei tempi primitivi non ammetteva

Da Pisa il Lepsius si portava a Torino ove aveva non meno benevole accoglienze dal professore di Storia antica Francesco Barucchi, che allora dirigeva il nostro Museo d'Antichità. Nella lunga dimora che fece in questa città per istudiare la nostra preziosa collezione, secondato costantemente dal Barucchi, prese i disegni ed i calchi dei più notevoli monumenti, e trascrisse tutto il grande papiro funerario, che poscia pubblicò in fac-simile con dotta prefazione nel 1842 a Lipsia. Lo Champollion che primo esaminò questo testo, lo designò col titolo di *Rituel funéraire*, titolo, che il Lepsius dimostrò non corrispondere esattamente al contenuto di questi papiri, poichè, come egli giustamente osserva nella sovracitata prefazione, non riferisce il testo alcuna istruzione per il culto dei morti, nessun inno o preghiera, che venisse pronunziata dai sacerdoti nel seppellimento, ma è il defunto stesso, che parla e narra le cose che vede ed ode, le preghiere e le invocazioni, che rivolge ai diversi Dei, presso i quali egli giunge, riguarda in una parola lui solo, e le sue avventure nel lungo errare dopo la morte terrestre. Poichè, secondo questo libro, la lotta iniziata sulla terra tra il principio buono ed il principio cattivo perdura ancora dopo la morte, e l'anima prima d'entrare nella pura regione degli spiriti, deve percorrere un lungo viaggio, in cui lo spirito maligno cerca suscitarle ogni sorta di ostacoli, che il defunto riesce però a superare colla protezione di Osiride. Per queste ragioni e per la conoscenza specialmente di alcuni capitoli di questo grande testo, che si scrivevano ora sul sarcofago, ora in

---

che un piccolo numero di segni omofoni, richiesti dal bisogno calligrafico di quella scrittura.

E fu appunto questo che si propose il dottor Lepsius, di dimostrare nella sua lettera al Rosellini. Egli infatti, pur seguendo il principio del grande Maestro, già si fece a separare con profonda critica tutti quei segni, che s'incontrano con valore fonetico solamente al tempo dei Ptolomei e dei Romani, da quelli usati nei tempi Faraonici, divise l'alfabeto dello Champollion in due grandi classi, cioè in segni puramente alfabetici ed in segni sillabici, assegnando alla prima classe solo 34 segni, e ponendo tutti gli altri nella seconda classe, ed in tal modo ridusse questo immenso alfabeto, ove abbondano troppo gli omofoni a quel puro numero di segni, che la natura monumentale della loro scrittura, ed il loro amore di simmetria, imposero agli Egiziani di impiegare per dar forma artistica e grazia a ciascun gruppo di parole.

rotoli di papiro, che si ponevano fra le fascie delle mummie od in cassette con esse, il Lepsius propose di sostituire al titolo di *Rituale funerario* quello di *Libro dei morti*; ed il nostro Museo possiede in questo grande papiro funerario, che misura in lunghezza dicianove metri e dodici centimetri, il più esteso *libro dei morti*, che finora si conosca; testo, che dopo la pubblicazione fattane dal Lepsius serve di norma alla classificazione di tutti i papiri di tal genere.

Nel 1843 fu il Lepsius scelto da Federico Guglielmo IV a dirigere la grande spedizione Prussiana in Egitto; e nelle sue lettere dall'Egitto, dall'Etiopia e dalla penisola del Sinai descrive minutamente i luoghi visitati e tutti i lavori compiti dalla Commissione nei tre anni occupati a studiare e rilevare i piani ed i monumenti di quelle regioni.

Gli immensi materiali raccolti in questa scientifica spedizione furono poscia pubblicati con ordine cronologico in dodici colossali e magnifici volumi dal Lepsius col titolo: *Denkmäler aus Ægypten und Æthiopien*, che è la più splendida illustrazione, che siasi mai fatta dell'Egitto, e forma colle tre altre non meno grandi pubblicazioni, la *Descrizione* cioè *dell'Egitto* fatta dal governo Francese, *I monumenti dell'Egitto e della Nubia* del Rosellini e quelli pubblicati dallo Champollion con lo stesso titolo in francese, un'inesauribile fonte per lo studio della storia dell'arte e della coltura di quella rinomatissima nazione.

Nel 1863 fondava ancora il Lepsius colla cooperazione del Brugsch, l'autore della celebre grammatica demotica e del grande dizionario geroglifico, composto di circa cinquemila vocaboli, il primo giornale che si occupasse in modo speciale dell'antico Egitto e della sua lingua, col titolo di *Zeitschrift für Ægyptische Sprache und Alterthumskunde*, in cui apparvero numerosi i loro scritti sino agli ultimi giorni della loro vita.

Educati alla scuola di questi due luminari della scienza egittologica si segnalarono poi il Wiedemann, che illustrò colla scorta dei monumenti il regno di *Thotmes* III, il più potente monarca dell'Egitto, e dettò poscia una pregevolissima storia dell'antico Egitto; il Dümichen che nella sua opera: *La flotta di una regina egiziana nel XVII secolo avanti Cristo*, ci riproduce le scene scolpite nel tempio di *Deir el Bahari* in *Tebe* a ricordare la splendida spedizione marittima sulle coste meridionali dell'Arabia,

compita dalla regina *Hata-Sou*, sorella maggiore di *Thotmes* III, designata nei monumenti col cartello di trono *Ra-ma-ka*; il Lauth, che prese a tradurre e commentare il papiro Prisse, tenuto dal Chabas come il più antico libro del mondo; l'Ebers, a cui la scienza va debitrice della splendida pubblicazione di uno dei papiri jeratici di maggior estensione, pervenutici dall'Egitto, conosciuto oggi col nome di *papiro medicale Ebers*, ove sono indicati i vari rimedî contro le malattie usati dalla terapeutica egizia, e il Bergmann che diresse il Museo delle antichità egiziane fondato, non sono molti anni ancora, in Vienna per munificenza dell'Imperatore d'Austria, e questi con Stern, con Erman e con Steindorff, diedero all'Egittologia in Germania il massimo incremento e sviluppo.

Al Lepsius infine spetta ancora la gloria di avere scoperto il monumento che venne a dare la più luminosa conferma della verità dei principii dello Champollion. Ritornando egli nel 1866 nella valle del Nilo ebbe in questo secondo viaggio la fortuna di trovare presso *San*, nell'antica *Tani* una grande stela di basalto, recante, come la famosa tavola di *Rosetta*, nelle tre foggie di scrittura in uso a quei tempi, un decreto dei sacerdoti di tutto l'Egitto radunatisi nel santuario di Canopo presso Alessandria per onorare Ptolomeo Evergete I. Ma mentre in quella di Rosetta, innalzata dai sacerdoti radunatisi a Menfi per onorare Ptolomeo Epifane, manca tutto il principio dell'iscrizione geroglifica ed il fine della greca, questa di *San* ha tutte tre le iscrizioni in perfetto stato di conservazione. Ora lo studio di essa ha dimostrato che le parole tutte che la compongono, paragonate con quelle del decreto di Rosetta e con l'aiuto di altre iscrizioni e del copto, non solo sono state interpretate nel loro vero senso, ma che l'intiero testo non può essere tradotto su altra base che quella della grammatica e del dizionario quale ci è oggi dato dai seguaci dello Champollion. Ha quindi con ciò l'Egittologia ricevuto la prova della giustezza del suo metodo di deciframento, e noi dobbiamo quindi considerarla come scienza perfettamente fondata.

Ed invero questa scienza creata dal genio dello Champollion, ha già dato per mezzo dei numerosi cultori che conta in tutta Europa, così copiosi frutti, che nel periodo di pochi lustri si potè colla scorta dei monumenti liberare dagli errori che l'at-

torniavano e ricostruire tutta la storia politica, religiosa e civile di quell'antichissimo popolo.

Nè solo la storia dell'Egitto illustrano i monumenti che si vanno giornalmente decifrando, ma gettano ancora non poca luce su quella dei popoli limitrofi. Infatti per mezzo di questi noi siamo già venuti a conoscere come, ad un periodo in cui tacciono i monumenti italici, i popoli della Sardegna, della Sicilia e dell'Etruria, spinti dai Libii, che già avevano avuto da sostenere parecchie battaglie cogli Egiziani, ai tempi del glorioso Re Seti I, formassero verso il XIV secolo avanti Cristo, lega con essi, ed uniti venissero ad attaccare le frontiere egiziane nei primi anni del regno di Menefta, figlio e successore del grande Ramesse. Ma furono con grande strage da questo Faraone respinti, e caddero prigioniere degli Egiziani le donne stesse del Re dei Libii, come viene attestato dall'iscrizione di un monumento in onore di questo Faraone trovato nelle rovine di *Karnak*, l'antica Tebe, ove è pomposamente celebrata tale vittoria.

In Inghilterra, oltre il Goodwin, che collaborò molte volte con lo Chabas nei suoi *Mélanges égyptologiques*, e lo precedette di pochi anni nella tomba, abbiamo a segnalare fra i seguaci delle dottrine del grande francese, Samuele Birch, autore di parecchi scritti pubblicati in massima parte negli " Atti della Società di Archeologia di Londra „, illustranti non solo monumenti del celebre Museo Britannico, di cui fu sino agli ultimi suoi giorni l'illustre direttore, ma anche quelli di altri Musei d'Europa, ed a lui dobbiamo la prima traduzione che siasi fatta del nostro grande papiro funerario, o *Libro dei morti*, che egli pubblicò in appendice alla sua traduzione inglese della sovra citata opera del Bunsen *Aegyptens Stelle in der Weltgeschichte*. Merito ancora del Birch è la splendida edizione riveduta e corretta della grande opera del Wilkinson: *The Manners and Customs of the ancient Egyptians*. Un altro illustre cultore di questi studi fu Lepage Renouf, il successore di Birch nella direzione del grande Museo Britannico, il quale oltre la pubblicazione della *Novella dei due fratelli*, del papiro d'Orbiney, e quella delle osservazioni siderali tolte dalla tomba di Ramesse X, ci ha anche lasciato un succinto compendio di grammatica geroglifica. Ed oggi abbiamo in Cook e Lushington due distinti egittologi,

il primo dei quali ci ha tradotto l'iscrizione del Re *Pinaki* della XXV[a] dinastia etiopica, ed il secondo il poema di *Pentaur* celebrante le vittorie di Ramesse il grande contro i *Xeta*, conservatoci nel papiro *Sallier*. Il rappresentante delle dottrine dello Champollion in Olanda è stato il Dr. C. Leemans, che iniziato a questi studi dal nostro Salvolini nella sua dimora a Leida nel 1834 per istudiare la collezione egizia di quel rinomato Museo, già pubblicava nel 1842 la sua lettera sui monumenti egiziani portanti cartelli reali dei Musei di Londra e di Leida; direttore poscia del Museo Neerlandese si fece ad illustrarne i monumenti nella magnifica pubblicazione con tanto splendore da lui incominciata sotto gli auspicii di quell'illuminato Governo, e, dopo la sua morte, continuata dal suo discepolo William Pleyte. Questo distinto egittologo cominciò la sua carriera scientifica con uno studio sul papiro *Harris*, stampato nel 1862, a cui tennero ben presto dietro i suoi *Études égyptologiques*, ove illustra varii testi magici ed alcuni capitoli del grande *Libro dei morti*. Al ritorno nel 1866 da un suo viaggio in Italia, in cui visitò il nostro Museo, si fece a pubblicare a Leida, sulle mie trascrizioni, i papiri jeratici non funerari della nostra ricca collezione, formando un grande volume in foglio con 158 tavole litografiche col titolo: *Papyrus jératique de Turin, fac-similé* par *F. Rossi, publié* par *W. Pleyte.*

Questi papiri, che dalle lettere famigliari agli inni, abbracciano tutti i generi di letteratura dell'antico Egitto, per lo stato loro frammentario giacevano in massima parte ignorati in scaffali del Museo. Ora con questa pubblicazione, noi facemmo conoscere non solo un tesoro poco noto del nostro Museo, ma somministrammo ancora alla scienza un ampio materiale per gli studi di Filologia egiziana (1).

(1) Dopo la nostra pubblicazione il Direttore A. Fabretti, per meglio assicurare alla scienza questi fragili papiri tutti opistografi, li fece porre in quadri fra due vetri, come il mezzo tenuto da tutti più adatto alla loro conservazione; e questi furono per così dire il perno intorno al quale egli formò la grande sala dei papiri. Poichè, avendo il Governo decretato il trasporto della Pinacoteca dal *Palazzo Madama* in quello del Museo d'Antichità, il quale dovette cedere alla Galleria dei quadri le sale al quarto piano in massima parte occupate dalle antichità egiziane, il Direttore, per dare il maggior rilievo possibile alla nostra tanto ricca e preziosa collezione dei

Cultore di questi studi abbiamo nella Norvegia il professore Lieblein, che illustrò parecchi monumenti egiziani, che si trovano a Pietroburgo, e fra i suoi scritti meritano particolare menzione quelli riguardanti la cronologia egizia colla composizione di un dizionario di nomi proprii egiziani, che è di somma utilità per le ricerche cronologiche, e rese un segnalato servigio a tutti gli egittologi colla diligente ed accurata compilazione pubblicata nel 1875 dell' Indice alfabetico di tutti i vocaboli contenuti nel nostro *Rituale funerario* o *Libro dei morti*, indicandone tutte le pagine in cui questi si trovano.

Rappresentante degli studi egittologici nella Svizzera è il Sig. Naville, che compì con tanta lode il difficile incarico affidatogli da una Commissione di dotti inglesi, della pubblicazione del grande *Libro dei morti*, dietro un confronto dei numerosi testi geroglifici di questo grande repertorio delle dottrine religiose egizie esistenti nei Musei d'Europa e dell'Egitto. Ed a lui la scienza è pure debitrice della bella pubblicazione dei testi del Mito di Horo, che ci fanno conoscere numerosi episodii della storia dei tempi favolosi dell'Egitto, e di quella non meno importante dell'iscrizione mitologica, trovata nella tomba di Seti ove è narrata la distruzione degli uomini per opera degli Dei.

---

papiri, che nel precedente ordinamento del Museo era solo in piccolissima parte esposta al pubblico, fece porre in quadri protetti da vetri, tutti i papiri della ricchissima collezione. E avendo scelto nel nuovo locale, accordato al Museo, la vasta sala a mezzanotte del primo piano, come quella, che per avere una luce più temperata meglio si addiceva ai papiri, distribuì questi per tutta l'immensa sala sopra altrettanti graziosi leggii, muniti di tiratoi scorrevoli, a comodità degli studiosi, che volessero prenderne copia. Nè bastando questi leggii a tutti contenerli, egli fece costrurre ancora un elegante ballatoio in bronzo, a cui si accedeva per una scaletta a chiocciola, il quale mentre serviva al collocamento dei rimanenti papiri, formava un gentile ornamento alla vasta e nuda parete della grande sala. Ne dettò quindi il catalogo, che fu pubblicato a spese del Ministero della Pubblica Istruzione nel 1888, in due grandi volumi in quarto di trecento e più pagine ciascuno, col titolo: *Regio Museo di Torino, ordinato e descritto da A. Fabretti, F. Rossi e R. V. Lanzone (Antichità egiziane)*. Ma la grande sala dei papiri, ammirata da quanti cultori di questi studi visitavano il Museo, nell'ultimo suo riordinamento, è stata totalmente abolita, e la maggior parte de' suoi papiri ritornò negli archivii del Museo, e quelli stessi opistografi, pubblicati dal Pleyte, furono tolti dai quadri in cui erano stati collocati per la migliore loro conservazione.

In Russia abbiamo pure due distinti egittologi, il primo nel Dr. Golenischeff, che tradusse con dotti commenti il grande testo magico della *Stela di Metternich*, e pubblicò nella *Zeitschrift f. Ægyptische Sprache* di Berlino alcuni estratti di un papiro jeratico del Museo Imperiale di Pietroburgo, di cui è Direttore, contenente, come il papiro *Prisse*, precetti morali, fra cui degna di nota è la raccomandazione che si fa ai figli di *imitare i loro padri ed i loro avi, le cui parole sono state conservate negli scritti*; ed il secondo nel Dr. Oscar von Lemm, il quale iniziò la sua carriera scientifica con la pubblicazione del *Rituale pel servizio d'Amone*, che è di grande sussidio alla storia delle forme del culto nell'antico Egitto.

Nè l'Italia rimase indietro in questi studi alle altre Nazioni, poichè fin da' loro primordii ne conta in Ippolito Rosellini ed in Francesco Salvolini due illustri cultori. Il primo di ritorno dal suo viaggio in Egitto si fece ad esporre dalla cattedra di Pisa le dottrine dello Champollion, confermandole colla traduzione di numerosi brani di testi geroglifici della sua grande opera: *I monumenti dell'Egitto e della Nubia*, che stava pubblicando sotto gli auspicii del Granduca di Toscana, ed i cui materiali egli aveva raccolto col grande scienziato francese nella valle del Nilo. Ma, come il maestro ed amico, moriva egli pure immaturamente a quaranta tre anni, senza aver potuto vedere compita la pubblicazione della sua grande opera, i cui due volumi furono dopo la morte stampati per cura dei suoi due discepoli, il Bardelli, distinto coptologo, ed il Migliarini. Quest'ultimo successe al maestro nella direzione del Museo di Firenze, alla cui formazione aveva, come procuratore del Nizzoli, già molto contribuito, facendo che non uscisse di Toscana la bella collezione egizia da questi raccolta, che fu, si può dire, il nucleo o fondamento dell' attuale pregiata collezione egizia di Firenze, e ne dettò anche un ragionato ed illustrativo catalogo.

Francesco Salvolini da Faenza, il discepolo prediletto dello Champollion, vedendo, dopo la morte del suo maestro, che il miglior modo di convertire gli increduli e gli avversari del suo sistema geroglifico, era di esporne e discuterne in modo solido e coscienzioso le varie parti, si fece a pubblicare le sue lettere all'abate Gazzera, ove trattando della notazione delle date sui monumenti egiziani, ci dà le modificazioni, le correzioni e le

prove che gli erano state, sia comunicate dalla bocca del suo maestro, sia da lui stesso scoperte, ed intanto lavorava indefessamente alla sua grande opera: *L'analisi grammaticale ragionata di differenti testi antichi egiziani*, di cui pubblicava coll'appoggio del Governo Sardo, la prima parte, ove colla spiegazione dell'iscrizione geroglifica della *tavola di Rosetta*, ci diede la prima filologica interpretazione di un testo egiziano. Ma la sua delicata costituzione non potè reggere ai continui e prolungati studi, e nel febbraio del 1838 soccombeva ad un'etisia, non compiuto ancora il sesto lustro di sua vita, lasciando non pochi scritti, che per malignità degli uomini non sono più stati pubblicati (1).

In Roma fra i cultori degli studi egittologici dobbiamo notare specialmente il padre Barnabita Ungarelli, il dotto interprete degli obelischi romani che rivolse i suoi studi archeologici quasi esclusivamente ad illustrare i geroglifici egiziani, perchè trovava nei monumenti dell'Egitto, come egli afferma nel suo saggio di archeologia egizia, di che *imporre silenzio agli oppositori della sacra storia del popolo di Dio.*

E qui in Torino furono indirizzati a questi studi dallo stesso Champollion nella dimora che fece nella nostra città per istudiare i monumenti del nostro preclaro Museo, il Cav. di San Quintino e l'abate Gazzera. Il primo che fu direttore del nostro Museo, pubblicò nella nostra Reale Accademia delle Scienze un suo lavoro per illustrare la graziosa cassetta funeraria in legno di sicomoro del periodo greco-egizio, con doppia iscrizione, una geroglifica e l'altra greca, contenente la mummia di un fanciullo chiamato nell' iscrizione greca: *Petamenofi, figlio di Proboto*, e nella geroglifica: *Pe-tu-amen-apt, nato da Ta-kui-tha*; così che nell'iscrizione greca abbiamo il nome del padre, e nella geroglifica quello della madre, la quale presso gli antichi egiziani ha sempre la precedenza; così che nelle iscrizioni funerarie il nome della madre è sempre ricordato, quello del padre invece è quasi sempre omesso. Ed il secondo con letture fatte nella stessa Accademia delle Scienze ne illustrò i monumenti regii.

---

(1) Vedi la nota pubblicata negli *Atti* della nostra Reale Accademia delle Scienze dell'anno 1907 col titolo: *Del copto come base degli studi egittologici, sua cultura in Europa e specialmente in Italia.*

Seguace delle dottrine dello Champollion presso di noi fu pure il professore di storia antica Francesco Barucchi, che successe al Cav. di San Quintino nella direzione del Museo. Questi pubblicava nel 1844 nelle Memorie della nostra Reale Accademia delle Scienze, di cui era socio nazionale residente, due suoi discorsi sopra la cronologia egiziana, e nella stessa Accademia leggeva pure una sua memoria sopra una moneta greco-egizia inedita del R. Museo d'antichità; ed a Lui succedeva nella direzione del Museo il professore Pier Camillo Orcurti che già aveva stampato nel 1852, a spese del Ministero, il *Catalogo illustrato dei monumenti egizii del Regio Museo di antichità* tanto giustamente lodato, e pochi anni dopo presentava alla Reale nostra Accademia delle Scienze una dotta dissertazione sopra una stela funeraria della XI^a^ dinastia tebana del nostro Museo che fu pubblicata nelle *Memorie* della stessa Accademia. E fornito come era delle più belle doti di mente avrebbe impresso ben più profonde orme in questo campo di studi, se la natura non gli fosse stata tanto matrigna da affliggerlo con quel malore, che molto prima della fisica doveva spegnere in lui la vita intellettuale.

E quando nel 1860 io entrai, col titolo di volontario, in questo insigne istituto, già la fatale malattia aveva cominciato il suo lavoro di distruzione, ed io ebbi il dolore di assistere allo sfacelo di quella nobile intelligenza, senza aver potuto trarre, nell' inizio di questi miei studi, quei sussidii, che mi ero lusingato, dalle sue vaste cognizioni.

E qui mi sia lecito ricordare come dalla scuola di Egittologia, che io ottenni di aprire nel 1872 per la prima volta nella Regia Università di Torino, sono usciti il professore Simeone Levi, che col grande suo vocabolario geroglifico-copto-ebraico vinse nell'anno 1886 il *grande premio reale di linguistica* conferito dalla Reale Accademia dei Lincei, ed il professore Ernesto Schiapparelli, che nel susseguente anno 1887 ottenne dalla stessa Accademia dei Lincei il grande premio reale pel suo lavoro: *Il libro dei funerali degli antichi egiziani.*

A termine infine di questa breve rassegna degli scritti egittologici, pubblicati in Italia mi rimane a citare il grande *Dizionario di mitologia egizia*, edito a Torino negli anni 1885-1886 in sei volumi con 1312 pagine di testo, ed un atlante di 408 ta-

vole del professore P. V. Lanzone, a cui faceva seguire pochi anni dopo un suo lavoro sul *Lago di Meri*. Ultimamente poi, a compimento del suo grande dizionario, stava scrivendo l'indice generale con ordine alfabetico di tutte le divinità in esso registrate, indicando le pagine nelle quali ciascuna di esse è menzionata, quando nel mese di agosto del 1907 improvvisa morte lo colse.

E nell'anno corrente perdeva ancora l'Italia un distinto cultore di questi studi nel professore Astorre Pellegrini, che avendo conseguita per titoli nell'Università di Torino la libera docenza in Egittologia, otteneva di aprire a Firenze, ove era preside del Regio Liceo Dante Alighieri, un corso libero in questa materia, su cui aveva già pubblicati parecchi scritti, quando nel mese di febbraio, ultimo scorso si spegneva immaturamente la sua nobile vita. E però a segnalare fra i cultori dell' Egittologia il suo nome ricorderò specialmente due suoi lavori, pubblicati il primo nel 1896 a Palermo, illustrante un monumento egizio di quel Museo, monumento già citato dal Wiedemann nella erudita sua storia dell'antico Egitto, col semplice nome di *Pietra di Palermo*, nella cui iscrizione geroglifica si fa menzione della fondazione di *Schepes-Kaf* con altri monumenti di *User-Kaf* e di *Snefru*, principi tutti delle prime dinastie memfitiche, e del primo è ricordato anche l'anno 24mo del suo regno. Nel secondo lavoro, pubblicato a Roma nel 1904, egli dà la trascrizione colla traduzione del papiro jeratico funerario del *libro II^{o} della respirazione* (*S'ai-en-S'in-S'en*) testo, che manca oggi pur troppo ancora alla pur tanto ricca collezione dei papiri funerari sia jeratici, sia geroglifici, del Museo egizio torinese.

E qui finalmente mi sia lecito ricordare ancora il nome del cav. Giovanni Kminek-Szedlo, che ottenuta per esame all'Università di Torino nel 1880 la *privata docenza*, fece, per parecchi anni di seguito nell'Università di Bologna, un corso libero di Egittologia, pubblicando un breve compendio di grammatica geroglifica. E come ispettore di quel Museo civico illustrò con una sua dotta memoria la magnifica *cassa di mummia* della bella collezione di antichità egiziane, che l'insigne scultore bolognese Pelagio Palagi aveva donato alla sua città natale.

Sulla topografia di Malebolge

Note dantesche

di PIETRO GAMBÈRA.

I.

Loco è in inferno detto Malebolge,
Tutto di pietra di color ferrigno,
Come la cerchia che d'intorno il volge.
(XVIII, 1-3).

Le dieci bolge dell'inferno dantesco sono valli circolari concentriche, scavate nel fondo del vastissimo pozzo di Gerione, fra la parete di questo pozzo e la centrale bocca del pozzo dei Giganti. Adunque la *cerchia* che circonda Malebolge è la parete circolare del pozzo di Gerione, accanto alla quale Dante e Virgilio furono deposti da quel mostro alato (XVII, 133-135).

Tale interpretazione è anche giustificata dal terzetto:

. . . . . Più che tu non speri
S'appressa un sasso, che dalla gran *cerchia*
Si move e varca tutti i vallon' feri.
(XXIII, 133-135).

Pertanto il verso (XVIII, 72):

Da *quelle cerchie eterne* ci partimmo,

contiene una lezione errata e deve essere corretto come segue:

Da quella cerchia eterna ci partimmo.

Virgilio e Dante si allontanarono appunto dalla parete del pozzo di Gerione, passando su scogli arcati sopra le bolge, per arrivare al pozzo dei Giganti.

II.

Ma perchè Malebolge in vêr la porta
Del bassissimo pozzo tutta pende,
Lo sito di ciascuna valle porta
Che l'una costa surge e l'altra scende.
(XXIV, 37-40).

I commentatori non hanno saputo spiegare il significato topografico di questi versi; e anzi taluni, per non aver tenuto conto che verso il centro terrestre *si traggon d'ogni parte i pesi*, sono caduti nel gravissimo errore di attribuire all'ottavo cerchio dell'inferno la forma della superficie convessa di un tronco di cono capovolto, nel qual caso esso cerchio non sarebbe più un cerchio. Tutti i cerchi o gironi dell'inferno e del purgatorio dantesco hanno grossamente la figura che i geometri chiamano *corona circolare* (fig. 1[a]), e la definiscono la porzione di piano compresa fra due circonferenze concentriche.

Fig. 1.

Per intendere i versi sopra citati occorre specialmente tener conto che l'ottavo cerchio *AB* dell'inferno (fig. 2[a], *rappresentante una sezione verticale del pozzo di Gerione e del pozzo dei Giganti*) è poco lontano dal centro *O* della terra ossia dal *punto in su che Dite siede*; e che quindi quel cerchio ha i suoi punti notevolmente tanto più vicini al centro terrestre, quanto più essi sono vicini dalla bocca del pozzo dei Giganti. Così è chiaro che, sebbene il predetto cerchio ottavo sia geometricamente

piano ed orizzontale, ciò non di meno *tutto pende* verso *la porta* (bocca) di quel *bassissimo pozzo.*

Anche un piano geometrico, tangente alla superficie del mare, sarebbe tutto pendente verso il luogo di contatto. La frase volgare: *camminare al piano*, non significa camminare sopra un piano orizzontale, ma bensì camminare sopra una superficie sferica, il cui centro sia il centro di gravità della terra.

Fig. 2.

Nella predetta fig. 2ª è segnata una bolgia *CDEF* ingrandita, col fondo *DE* rivolto al centro *O* della terra, perchè altrimenti non vi si potrebbe stare in piedi. Ora è evidente che la costa sinistra *CD* della bolgia *sorge* alta e quasi verticale, mentre la costa destra *EF* è corta ed inclinata, ossia è *la ripa che più giace* (XIX, 35). Ciò spiega perchè Virgilio e Dante, per scendere in una bolgia, ne varcassero prima il ponte.

III.

Dante dice della 9ª bolgia (XXIX, 9) che

Miglia ventiduo la valle volge,

per indicare che il suo diametro è sette miglia. Infatti, secondo il rapporto di Archimede, una circonferenza equivale a *ventidue* settimi del suo diametro.

Il Poeta dice inoltre della 10ª bolgia *ch'ella volge undici miglia* (XXX, 86).

Perciò, avendo la 9ª bolgia una lunghezza doppia di quella della 10ª, i commentatori credono che la 8ª bolgia volga 44 miglia, che la 7ª volga 88 miglia e così di seguito in progressione geometrica. Se così fosse, i circuiti delle bolge, a partire dalla decima, andrebbero crescendo enormemente e tutto l'inferno non potrebbe essere compreso in un emisfero terrestre.

Ma Dante ha invece immaginato che la distanza fra i circuiti di due bolge consecutive sia sempre la stessa ed eguale al raggio del circuito della decima bolgia. Perciò i circuiti delle bolge devono crescere in progressione aritmetica, come segue:

10ª	bolgia	. . .	miglia	11
9ª	„	. . .	„	22
8ª	„	. . .	„	33
7ª	„	. . .	„	44
6ª	„	. . .	„	55
5ª	„	. . .	„	66
4ª	„	. . .	„	77
3ª	„	. . .	„	88
2ª	„	. . .	„	99
1ª	„	. . .	„	110.

Adunque il fondo del pozzo di Gerione, nel quale sono scavate le bolge, ha non meno di 110 miglia di circuito, e però il suo diametro è almeno 35 miglia, giacchè 22 settimi di 35 miglia fanno appunto 110 miglia.

Chi vuol farsi un adeguato concetto della grandezza dell'inferno dantesco, deve anche considerare che la soprastante cupola terrestre ha per colmo il monte Sion e si estende, tutto all'intorno, tanto da passare per l'isola di Creta. Infatti il Poeta dice (XIV, 112-117) che le lagrime del gran veglio, il quale sta in piedi dentro il monte Ida, scendono a formare il fiume Acheronte sul vestibolo dell'inferno, cerchio dove sono puniti gli ignavi, ossia coloro *che visser senza infamia e senza lodo.*

Relazione sulla Memoria del Sig. Luigi Pareti, intitolata: *Ricerche sulla potenza marittima degli Spartani e sulla cronologia dei navarchi.*

Egregi Colleghi,

Il Sig. Luigi Pareti nella Memoria intorno a cui abbiamo l'onore di riferire alla Classe, raccoglie dapprima e discute gli scarsi dati che si hanno sulle origini della marineria spartana; studia poi le origini della magistratura a cui spettava a Sparta il comando supremo dell'armata, la navarchia, propendendo a ritenerla più antica di quel che comunemente si pensi; raccoglie in seguito tutti i dati che si hanno sulle attribuzioni del navarco e degli altri ufficiali addetti al comando dell'armata: cerca di determinare la serie cronologica dei navarchi spartani, e, accennato brevemente alle ultime vicende dell'armata spartana dopo che decadde la potenza marittima di Sparta, riassume mediante uno specchio cronologico i resultati di buona parte delle sue ricerche.

La parte più importante di queste ricerche è appunto quella che concerne la serie cronologica dei navarchi. È infatti la cronologia dei navarchi estremamente ardua a determinare per la scarsezza e le apparenti contraddizioni delle fonti; eppure il determinarla non sarebbe di piccolo momento per la conoscenza di alcuni periodi della storia greca. Il tentativo che fa il Pareti dimostra piena cognizione delle fonti e dei non pochi scrittori moderni che si eran cimentati prima di lui intorno all'arduo

problema. E checchè si pensi dei singoli resultati cui egli giunge, ha condotto sempre la sua ricerca con rigore di metodo e si è sempre tenuto lontano da congetture avventate. La cronologia dei navarchi spartani si collega con alcuni dei problemi cronologici più intricati della storia greca, p. e. quelli sulla cronologia degli ultimi anni della guerra del Peloponneso e quelli sul dominio dei Trenta in Atene. Di siffatte questioni il Pareti ha dovuto far cenno, e, pur discutendone con quella sobrietà che il tema specifico del suo lavoro richiedeva, si è dimostrato anche intorno ad esso pienamente informato. Egli ha avuto del resto sopra i suoi predecessori il vantaggio di poter usare sui navarchi spartani le notizie nuove che si desumono dal papiro storico di Oxyrhynchos recentemente scoperto, poche, ma in tanta scarsezza di documenti assai preziose.

In sostanza se i problemi concernenti la cronologia dei navarchi spartani non potranno avere forse una soluzione definitiva finchè nuove iscrizioni o nuovi papiri storici non ci diano più copiosi elementi di fatto, certo è che le soluzioni del Pareti vanno in ogni caso segnalate all'attenzione degli studiosi e non di rado meritano lode di acutezza e di originalità e che i materiali che possono giovare allo studio del problema sono stati raccolti da lui con ogni cura.

Per queste ragioni la Commissione propone che la Memoria del Sig. Luigi Pareti sia ammessa alla lettura nella Classe.

Carlo Cipolla.
Gaetano De Sanctis, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

Torino — Stabilimento Tipografico Vincenzo Bona.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 29 Novembre 1908.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti i Soci: Salvadori, Spezia, Segre, Jadanza, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Morera, Grassi, Somigliana, Fusari e Camerano, Segretario.

Si approva il verbale della seduta precedente.

Scusano la loro assenza i Soci Mattirolo e Naccari.

Il Presidente presenta in omaggio alla Classe le pubblicazioni seguenti:

dal Socio nazionale non residente prof. G. V. Schiaparelli: 1° *I primordi dell'Astronomia presso i Babilonesi*; 2° *I progressi dell'Astronomia presso i Babilonesi*;

dal Socio F. R. Helmert: *Unvollkommenheiten im Gleichgewichtszustande der Erdkruste.*

Il Socio Grassi presenta in omaggio alla Classe il vol. 1° del suo *Corso di Elettrotecnica.*

Il Presidente presenta alla Classe il manoscritto del signor Serge Soxolow di argomento astronomico. La Classe affida il manoscritto al Socio Jadanza per un esame preliminare.

Vengono presentate per l' inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° *Sull'accrescimento del quarzo;* nota del Socio Spezia;

2° G. Lignana, *Di alcune particolarità presentate dalle onde di forma complessa nei circuiti trifasi,* dal Socio Grassi.

Il Socio Parona, a nome anche del Socio Spezia, legge la relazione intorno alla Memoria del prof. Federico Sacco, intitolata: *Il gruppo della Majella, Studio geologico.* La relazione favorevole è approvata, e con votazione segreta la Classe delibera la stampa del lavoro del prof. Sacco nei volumi delle *Memorie.*

Il Socio Fusari, a nome anche del Socio Camerano, legge la relazione intorno al lavoro del dott. Mario Ponzo, intitolato: *Studio della localizzazione delle sensazioni tattili.* La relazione favorevole è approvata e la Classe con votazione segreta approva la stampa del lavoro del dott. Ponzo nei volumi delle *Memorie.*

LETTURE

Sull'accrescimento del quarzo.

Nota del Socio GIORGIO SPEZIA
Professore di Mineralogia nella R. Università di Torino.

(Con una Tavola).

In un precedente lavoro (1) io ho descritto alcune esperienze sull'accrescimento dei cristalli di quarzo basate sul fatto che il quarzo, essendo facilmente solubile ad alta temperatura in una soluzione di silicato sodico normale formando un silicato acido, può da questa per diminuzione di temperatura deporsi, dando luogo sia ad accrescimento di cristalli di quarzo preesistenti, sia trasformando dei frammenti in cristalli completi.

Nelle esperienze indicate nel precedente lavoro io avevo adoperato una soluzione acquosa contenente il 2 % di Na^2SiO^3; nelle presenti esperienze, invece, io feci una soluzione dello stesso silicato e vi aggiunsi una grande quantità di cloruro di sodio, facendo poi le rispettive analisi delle soluzioni.

Una prima esperienza fu eseguita con una soluzione acquosa che conteneva su 100 parti 12,7 di NaCl e 1,9 di Na^2SiO^3, e coll'unico scopo di avere un'idea sulla differenza di prodotto per l'aggiunta del NaCl.

La disposizione dell'esperienza fu la stessa di quella indicata nella prima nota, adoperando lo stesso apparecchio già descritto (2), nel quale vi erano superiormente nell'ambiente di soluzione dei frammenti di quarzo, ed inferiormente, ossia nell'ambiente di deposito, i pezzi preparati di quarzo sottoposti all'accrescimento.

Le esperienze essendo eseguite collo stesso apparecchio e con eguale disposizione, rimane tolta una causa di differente

(1) " Atti Acc. Scienze di Torino ,, vol. XLI, pag. 158.
(2) " Atti Acc. Scienze di Torino ,, vol. XL, pag. 254.

risultato, che potrebbe esser data dal diverso recipiente ove avviene la cristallizzazione, come fu osservato da Vogelsang, Harting e Vater (1), e circostanza già presa in considerazione prima di tutti dal Beudant (2) nelle sue interessanti esperienze, le quali, come bene osservò lo Zirkel (3), sono obliate da chi si occupa delle cause del diverso aspetto dei cristalli.

I preparati di quarzo posti nell'ambiente di deposito consistevano in prismi esagoni ottenuti con tagli normali all'asse di simmetria principale di cristalli allungati di quarzo, dei quali si ha un'idea nella fig. 5. Nei prismi poi, per tutte le esperienze presenti e passate, feci sempre due piccole tacche normali agli spigoli del prisma, nelle quali entrava il filo d'argento della legatura.

L'esperienza durò 5 mesi colla temperatura di 327° a 340° nell'ambiente di soluzione e quella di 168° a 180° nell'ambiente di deposito.

Da questa esperienza ottenni il consueto accrescimento con la trasformazione dei prismi in cristalli colle facce terminali, nelle quali prevalgono quelle di un romboedro; ed anche ora, come nelle esperienze eseguite colla soluzione senza cloruro sodico, comparve il fatto che di due prismi, l'uno molto più grosso dell'altro, legati allo stesso filo e posti quindi allo stesso livello nell'ambiente di deposito, il più piccolo diventava un cristallo perfettamente completo ai due capi, mentre il più grosso si presentava incompleto e colla presenza di pseudo-facce basali a superficie affatto irregolare. Ciò dipende quindi soltanto dalla durata dell'esperienza. Infatti essendo la superficie di taglio del prisma normale alla direzione di accrescimento, ne avviene che questo accrescimento, che risulta dal deposito quarzoso uniforme, fatto in egual tempo, sarà proporzionale all'area della superficie di taglio del prisma; perciò il prisma più grosso avente area maggiore non potrà completarsi nello stesso tempo del prisma più piccolo.

E conferma di ciò si ha osservando la fig. 1, la quale rappresenta con ingrandimento di due volte l'accrescimento contem-

---

(1) " Zeit. f. Krystallographie „ vol. XXI, pag. 440.

(2) " Annales des Mines „ T. III, pag. 258.

(3) " Tschermak's Min. u. Pet. Mitt. „ vol. XXV, N. F., pag. 351.

poraneo, avvenuto in eguali condizioni di tempo e di ambiente di cristallizzazione, su due prismi aventi area di taglio diversa.

Dalla figura si scorge come il prisma più piccolo siasi trasformato in un cristallo completo ai due capi, mentre nel più grosso vi sono facce pseudobasali.

Ora è evidente che, se dette facce pseudobasali fossero da considerarsi come vere facce di pinacoidi, esse si dovrebbero ritenere prodotte per influenza dell'ambiente di cristallizzazione; ma in tale caso non vi sarebbe ragione perchè il piccolo cristallo non avesse anch'esso dette facce, nello stesso modo che l'ambiente di cristallizzazione dell'esperienza influisce sul maggiore sviluppo delle facce di un romboedro e ciò sia nel cristallo grosso che nel piccolo.

Noto poi che tale fatto fu sempre da me osservato anche nelle esperienze con soluzione di silicato sodico solo, ogni qual volta avevo posto in eguali condizioni di accrescimento prismi con area di taglio molto diversa.

In conseguenza io debbo confermare quanto scrissi nel precedente lavoro (1) a proposito della esistenza del pinacoide nei cristalli di quarzo, cioè che ritengo abbia ragione Tschermak di asserire esplicitamente che le facce basali del quarzo sono di deformazione, intendendo io però sotto queste parole non soltanto le facce prodotte da un contatto che impedisca l'accrescimento del cristallo, ma anche prodotte da incompleto libero accrescimento, come si hanno bellissimi esempi nei quarzi incompleti di Fenillaz descritti da Colomba (2).

D'altronde si possono facilmente distinguere le pseudofacce basali causate da contatto da quelle originate per l'incompleto libero accrescimento.

La differenza essenziale osservata paragonando i cristalli ottenuti colla presenza del NaCl con quelli avuti senza di esso, fu nei primi una maggiore limpidezza, speciali striature sulle facce del prisma e diverso sviluppo delle facce del romboedro.

Ossia la presenza del NaCl ha fatto sì che la limpidezza dei cristalli fosse identica a quella dei migliori cristalli di quarzo

(1) " Atti Acc. Scienze di Torino ", vol. XLI, pag. 158.
(2) " Atti Acc. Scienze di Torino ", vol. XLII, pag. 908.

che si trovano nelle geodi del calcare di Carrara; inoltre le striature sulle facce del prisma invece di essere quelle comuni normali agli spigoli del prisma erano in grande prevalenza quelle parallele all'intersezione delle facce del prisma con facce plagioedriche, ed a questo proposito trovai cristalli sia levogiri che destrogiri.

Infine per la soluzione clorurata prevalevano e talvolta erano sole le facce di un romboedro come per le soluzioni senza cloruro di sodio, ma osservai che in qualche cristallo l'estensione di una delle facce del romboedro era tale da fare quasi scomparire le altre due, come si presentano talvolta i cristalli del Delfinato.

La fig. 2 rappresenta appunto con l'ingrandimento di due volte un cristallo col sopraindicato aspetto.

Una seconda esperienza analoga per la soluzione fu eseguita con altri scopi di ricerca.

La soluzione acquosa conteneva su 100 parti 11,33 di NaCl e 1,24 di Na^2SiO^3, ed i preparati di quarzo, consistenti sempre in prismi tagliati normalmente all'asse furono posti nell'ambiente di deposito per conoscere:

1° l'influenza della posizione dell'asse di simmetria, che nel quarzo coincide con la direzione di massimo accrescimento, rispetto alla corrente di diffusione;

2° per conoscere come avviene l'accrescimento in cristalli deformati per diverso sviluppo di facce;

3° infine per conoscere se la soluzione potesse influire sul predominio delle facce plagioedriche, che io avevo già osservato nell'altra esperienza per le quali avevo adoperato i prismi senza fare caso che i cristalli di quarzo, coi quali furono preparati, avessero già facce plagioedriche e di quale natura.

Tutte tre le ricerche furono eseguite contemporaneamente con la stessa esperienza, la quale durò 5 mesi con la temperatura dell'ambiente di soluzione oscillante da 320° a 350° e quella dell'ambiente di deposito da 145° a 165°.

Le oscillazioni di temperatura in queste esperienze che durano molto tempo sono inevitabili, perchè la temperatura oscilla anzitutto per le variazioni giornaliere della pressione del gas di servizio pubblico nella città, per la quale variazione di pressione io avevo una differenza di circa 20° fra la tempera-

tura minima delle ore mattutine e quella massima delle serali; inoltre un'altra oscillazione della temperatura nell'apparecchio è data dal variare della temperatura dell'acqua che entra nel refrigerante.

Per la prima ricerca ho tagliato come di solito da un cristallo di quarzo, avente il prisma esagono assai regolare, due prismi, i quali avevano quindi le superfici di taglio, normali all'asse, di eguale area.

I due prismi furono posti nell'ambiente di deposito ad eguale livello uno coll'asse orizzontale e l'altro coll'asse verticale.

Nell'apparecchio essendo l'ambiente di soluzione in alto e quello di deposito in basso ne avveniva che il liquido sciogliendo il quarzo ed aumentando di densità si diffondeva dall'alto al basso; perciò i due prismi avevano rispettivamente uno l'asse normale e l'altro parallelo alla corrente di diffusione.

Entrambi i prismi furono previamente pesati da soli e poi pesati colla legatura di filo d'argento per dedurre, dopo l'esperienza, il peso della legatura, la quale venendo inchiusa dal quarzo depositato, non si poteva più togliere.

Terminata l'esperienza trovai come di consueto i prismi completati con facce prevalenti di un romboedro e limpidissimi.

Il prisma orizzontale da solo prima dell'esperienza pesava gr. 0,253 e dopo l'esperienza, dedotto s'intende il peso della legatura, pesò gr. 0,452 ossia il deposito di quarzo fu di gr. 0,199, quindi l'aumento in peso fu del 78,65 %.

Invece il peso del prisma posto verticalmente prima dell'esperienza era di gr. 0,265 e dopo l'esperienza di gr. 0,522 ossia il deposito di quarzo fu di gr. 0,257 e l'aumento di peso di 96,98 %.

Da questa esperienza si scorge, quanto era già prevedibile pel quarzo, che l'aumento fu maggiore nel prisma posto coll'asse verticale, cioè colla direzione di massimo accrescimento nella stessa direzione della corrente di diffusione.

D'altronde un cristallo che avesse anche tre direzioni normali fra loro di eguale accrescimento e fosse posto a crescere in una soluzione in moto dovrebbe aumentare di più secondo la direzione della corrente e precisamente dalla parte contro corrente; e ciò spiegherebbe talvolta certe deformazioni di cristalli del sistema monometrico. Ciò posto, è naturale che nel quarzo

non essendovi più le tre direzioni di eguale accrescimento ma una di gran lunga maggiore delle altre ad essa normale, ne avviene che in direzione della corrente i cristalli debbano maggiormente allungarsi. E tale fatto potrebbe spiegare il perchè si osservano esemplari di aggruppamenti cristallini di quarzo staccati dalle pareti di litoclasi nei quali i cristalli sono molto allungati, tutti rivolti verso la stessa direzione ed inclinati sulla superfice d'attacco dei cristalli.

Per la seconda ricerca dell'accrescimento dei cristalli con facce diversamente sviluppate scelsi fra alcuni geminati, raccolti dal D.r Colomba a Traversella, uno incompleto per rottura rappresentato dalla fig. 3.

Il cristallo era molto piatto essendo sviluppate grandemente due facce parallele del prisma, come lo sono quasi sempre, fatto assai curioso, i geminati secondo la faccia $52\bar{1}$; e come si vede dalla figura, l'individuo più grande del geminato era per rottura mancante di un capo, e dell'altro individuo parimenti rotto vi rimaneva appena traccia.

Dopo l'esperienza il geminato apparve completato perfettamente e la figura 4 ne rappresenta il nuovo aspetto assunto.

Entrambi le fig. 3 e 4 riproducono il geminato coll'ingrandimento di due volte.

Anche in questo accrescimento la parte quarzosa depositata è limpidissima, mentre il resto del geminato preesistente era un poco torbido ed anche sono predominanti le facce di un romboedro, come d'altronde tale sviluppo era già preesistente nel geminato e visibile nella parte intatta di esso come si scorge nella fig. 3.

Inoltre rimase la prevalenza di estensione delle due facce del prisma, ossia l'ambiente di cristallizzazione non potè modificare l'aspetto quasi caratteristico della specie di geminazione.

A riguardo della terza ricerca sull'influenza della soluzione nella plagiedria dei cristalli, tagliai come al solito due prismi da due cristalli di quarzo, i quali presentavano ben distinte le facce plagioedriche, uno di destra e l'altro di sinistra, come appare dalla fig. 5. I due prismi legati allo stesso filo furono posti nell'ambiente di deposito in posizione eguale rispetto alla corrente di diffusione.

Terminata l'esperienza trovai i prismi trasformati in cri-

stalli completi e colla presenza delle stesse facce plagioedriche ossia uno levogiro e l'altro destrogiro, come risulta con ingrandimento di due volte dalla fig. 6; dalla figura appare uno sviluppo più pronunziato pel levogiro, ed esaminando bene il cristallo destrogiro si vede che le sue facce plagioedriche sono meno sviluppate, lasciando supporre che se l'esperienza fosse stata continuata sarebbero scomparse; e che quindi la soluzione clorurata, nella proporzione usata per l'esperienza, avendo come fu già detto una tendenza a sviluppare le forme plagioedriche, favorirebbe specialmente la plagioedria di sinistra, e più avanti accennerò ad un altro risultato sperimentale che comprova tale deduzione.

Nella figura si vede che al cristallo di destra è appiccicato un frammento di quarzo. Il fatto è dovuto al caso: un frammento di quarzo essendo caduto dall'ambiente di soluzione in quello di deposito andò ad unirsi al cristallo rimanendovi cementato dal deposito quarzoso, il quale produsse sulla sua superfice, prima tutta scheggiosa, numerosi piani di facce.

Il caso dimostrò un fatto analogo di quanto avviene in natura. Una volta nel gneiss di Beura furono estratti da una geoda grossi cristalli di quarzo che erano staccati dalle pareti ed immersi in una melma cloritica-argillosa; e la superfice scheggiosa di rottura dei cristalli era già ricoperta per rigenerazione da numerose facce.

Da queste esperienze risulta che coll'aggiunta di cloruro sodico alla soluzione di silicato sodico si hanno cristalli molto più limpidi, e si nota una tendenza maggiore all'aspetto plagioedrico dei cristalli, e che inoltre vi ha uno sviluppo irregolare in estensione delle facce del romboedro la cui presenza predominante rimane sampre caratteristica in tutte le esperienze da me fatte, sia con soluzioni semplici che clorurate.

Da quest'ultima osservazione si ha la conferma di quanto ho detto in altro lavoro, che la formazione di cristalli regolari di quarzo con l'eguale sviluppo delle facce dei due romboedri principali dipende soltanto dalla lentezza di cristallizzazione, la quale può essere data da soluzioni non sottoposte a movimento, come avviene nei quarzi di molte geodi, ovvero di soluzioni contenenti grandi quantità di sostanze eterogenee in sospensione, per cui si rallenta la circolazione e diffusione della sostanza cri-

stallina come si osserva in generale nei quarzi ematoidi, e nei bellissimi quarzi bianchi di Sorttrup. Mentre i cristalli di quarzo che si trovano nelle litoclasi, nelle quali il deposito quarzoso sia dato da acque mineralizzate che sono in movimento, hanno maggiore tendenza a svilupparsi secondo l'asse principale colle facce predominanti di un solo romboedro.

In appoggio di tale conclusione posso indicare un risultato sperimentale, il quale dimostrerebbe che nel sopraindicato ambiente di cristallizzazione avviene sempre lo sviluppo maggiore delle facce di un romboedro anche se invece di un prisma tagliato si sottopone all'aumento un cristallo avente un eguale perfetto sviluppo delle facce dei due romboedri.

Nell'eseguire le sopradescritte esperienze io avevo posto nell'ambiente di deposito anche un piccolo cristallo di quarzo ematoide con perfetta bipiramide esagona. Or bene l'accrescimento di quarzo incoloro avvenne dando luogo alla grande prevalenza delle tre facce di un romboedro, lasciando appena visibili quelle dell'altro e per la trasparenza del deposito quarzoso si vede la sottostante bipiramide esagona regolare del quarzo ematoide. Oltre a ciò comparvero piccolissime facce plagioedriche di sinistra che non esistevano nel quarzo ematoide e sulle facce del prisma finissime striature parallele all'intersezione delle facce del prisma con quelle plagioedriche; fatto questo che comprova quanto fu detto sopra, che la soluzione clorurata favorisce la plagioedria di sinistra.

Ma su questo argomento ritornerò in altro lavoro quando avrò eseguito l'esperienza di produrre l'accrescimento del quarzo in un ambiente reso melmoso da sostanze eterogenee, per conoscere meglio nella cristallizzazione la differente influenza fra le sostanze in soluzione e quelle sospese nel liquido.

Le ricerche sperimentali sul vario sviluppo delle forme cristalline trovano sempre la grande difficoltà nelle moltissime cause che possono agire.

Finora, cominciando da Beudant fino agli ultimi lavori di Credner, Retgers, Vater, Hilda Gerhart e altri, le ricerche furono sempre eseguite sopra cristallizzazioni di sali prodotte o da semplice evaporazione, o da abbassamento di temperatura in soluzioni sature a caldo, o da diffusione a temperatura ordinaria.

Infatti già Beudant (1) aveva preso in considerazione per le sue esperienze le seguenti circostanze di cristallizzazione: la temperatura, lo stato barometrico ed igrometrico dell'atmosfera; la prontezza o la lentezza dell'evaporazione; la temperatura, lo stato di concentrazione ed il volume della soluzione; la forma dell'apparecchio. E le numerose sue esperienze contemplarono i varî casi in cui si trovava la soluzione, ossia se sola, o con un eccesso di uno dei componenti di essa, o contenente altri composti chimici disciolti, o contenente sostanze in sospensione.

Ma se i risultati ottenuti dai varî esperimentatori possono dare qualche raggio di luce sopra lo sviluppo dei cristalli formatisi in natura nelle sopraesposte condizioni di esperienza, è certo che essi non possono applicarsi a spiegare le cristallizzazioni che avvengono in profondità nelle litoclasi o nelle geodi inchiuse nelle rocce, nelle quali esistono molte altre condizioni di cristallizzazione.

Per es., nelle cristallizzazioni prodotte da reazioni chimiche, lo stesso minerale può essere formato da differenti processi chimici e presentarsi con diverso abito cristallino; infatti avviene talvolta di veder nelle miniere un filone con un minerale avente un dato abito cristallino e poi, dopo l'incrocio di un altro filone, trovarsi lo stesso minerale con diverso abito cristallino.

Anche il movimento, nelle litoclasi, delle acque minerali non può essere indifferente allo sviluppo vario dei cristalli, sia che le acque facciano deposito diretto, sia che questo avvenga per reazione chimica fra le soluzioni in movimento; ed altre cause si potrebbero accennare e sul cui effetto riesce difficile ed anche impossibile esperimentare in un laboratorio.

Del resto anche pochi risultati e talvolta contradditori hanno dato le esperienze che si sono fatte sino ad ora in laboratorio, p. es., quella di cercare l'influenza di varie sostanze disciolte nella soluzione del sale da cristallizzare, per le quali sostanze il Vater (2) propose il nome *Lösungsgenossen* e che già il Beudant indicava col nome di *Mélanges chimiques*, riconoscendo in esse, colle sue esperienze, una grande influenza.

---

(1) Loc. cit.

(2) " Zeit. für Kryst. u. Min. ", vol. XXI, pag. 432.

Ed anche, secondo Vater, e molto tempo prima Credner (1), i quali studiarono tale influenza soltanto rispetto alla cristallizzazione della calcite, l'importanza dei compagni di soluzione sarebbe grande. Diverso risultato invece ottenne il Retgers (2) nelle sue interessanti esperienze fatte coi cloruri alcalini. Detto autore trovò che nelle soluzioni, p. es., di cloruro potassico, ponendo successivamente 19 composti chimici, il cloruro potassico cristallizzava sempre in cubi e soltanto con l'orina e col iodato potassico osservò la forma del cubo coll'ottaedro e con cloruro di piombo l'ottaedro solo. Invece in natura la forma composta del cubo e dell'ottaedro è forse la più comune per la silvina.

Ciò dimostra che la presenza dei compagni di soluzione benchè possa in certi casi avere un'influenza anche primaria per l'abito cristallino, tuttavia può in altri casi essere senza azione, e perciò l'abito cristallino deve dipendere non soltanto da una singola condizione dell'ambiente, ma anche dalla combinazione delle altre in esso esistenti; e deve anche dipendere dalle relazioni che possono esistere fra la natura chimica della sostanza che cristallizza e quella delle sostanze associate.

Del resto lasciando a parte gli argomenti d'indole generale di cristallogenesi, i quali furono già trattati da molti autori le cui idee furono passate in rivista dal Lehmann (3), ritorno al caso particolare del quarzo, oggetto delle mie esperienze.

Il quarzo è certamente uno dei pochi minerali che in natura si presenta formato nelle più svariate condizioni d'ambiente di cristallizzazione.

Per le condizioni di temperatura si può dire che i limiti di essa si estendano dall'alta temperatura di un magma fuso del porfido quarzifero, a quella quasi ordinaria, nella quale si formarono i cristalli di quarzo nelle concamerazioni delle ammoniti o nei fori lasciati dalla *teredo navalis* nei legni che subirono poi la silicizzazione.

Per le condizioni di pressione, supposto che questa abbia influenza sull'abito cristallino, i limiti sono anche estesi; si

---

(1) " Journal für praktische Chemie ", N. F., vol. I, pag. 317.
(2) " Zeit. für Physikalische Chemie ", vol. IX, pag. 304.
(3) *Molekularphysik*. Leipzig, 1888.

trova il quarzo in perfetti cristalli idiomorfi, inchiusi in profondi strati di calcare come si trova nelle sopradette concamerazioni delle ammoniti, le quali non presentano alcuna deformazione dovuta a pressione.

A riguardo poi dei compagni di soluzione (*Lösungsgenossen* di Vater), basta osservare la paragenesi del quarzo nei giacimenti minerari di ogni natura, per essere persuasi che non vi sia minerale che possa avere avuto più del quarzo varietà di composti chimici associati nelle soluzioni da cui esso si formò; e parimenti per le altre condizioni riflettenti le soluzioni, concentrazioni, movimenti, ecc.

Ora un fatto notevolissimo è che il quarzo, nonostante le sopra indicate svariatissime condizioni d'ambiente di cristallizzazione, presenta sempre nelle sue numerose combinazioni di forma cristallina, uno od ambedue i romboedri principali 100, $22\bar{1}$ e, salvo rarissime eccezioni, anche sempre il prisma esagono $2\bar{1}\bar{1}$; e nel quarzo non si osserva la grande differenza di aspetto cristallino che ha, per esempio, la calcite. E la combinazione delle sole due forme, il prisma esagono ed il pinacoide, non rara nella calcite ed in altri minerali del sistema romboedrico, non si è mai trovata nel quarzo ed aggiungo che non si troverà mai.

Tale diverso comportamento del quarzo deve attribuirsi, come già accennai in altro lavoro, alla grande differenza che presenta il quarzo fra l'accrescimento secondo l'asse di simmetria e quello secondo le direzioni normali a tale asse; differenza che corrisponde a quella della sua solubilità, come io dimostrai (1); e differenza che certamente deve dipendere anche dalla struttura atomica della molecola cristallina del quarzo.

È certo che le diverse condizioni dell'ambiente di cristallizzazione non soltanto influiscono sull'abito cristallino nell'accrescimento di un cristallo, ma possono anche, come nelle sostanze polimorfe, determinare la struttura atomica dell'embrione cristallino; ma questo, una volta formato, deve esplicare nel successivo accrescimento le sue forze cristallogeniche in concorrenza con quelle inerenti all'ambiente di cristallizzazione.

---

(1) " Atti Acc. Sc. di Torino ", vol. XXXIII, pag. 292.

Se, p. es., dall'anidride silicica in soluzione si costituisce, per determinate condizioni dell' ambiente di cristallizzazione, l'aggruppamento atomico corrispondente all'embrione cristallino del quarzo, l'accrescimento successivo del cristallo di quarzo dipenderà anche dalle proprietà cristallogeniche dell' embrione formatosi; come pure se dall'anidride silicica si forma l'aggruppamento atomico dell'embrione cristallino della tridimite, il cristallo di questa continuerà a crescere sotto le risultanti delle forze inerenti al suo embrione e quelle inerenti all'ambiente di cristallizzazione.

Si potrebbe, avendo materiale adatto, fare l'esperienza di porre nel mio apparecchio dei cristallini di tridimite insieme ai preparati di quarzo per vedere se l'anidride silicica che si separa per diminuzione di temperatura dal polisilicato sodico facesse aumentare nelle loro forme anche i cristalli di tridimite. Ciò dovrebbe esser possibile, a meno che la molecola di anidride silicica, che abbandona per diminuzione di temperatura il polisilicato, abbia già in sè od assuma subito la struttura atomica corrispondente a quella del quarzo. E la condizione di temperatura non dovrebbe essere di ostacolo; perchè non credo che la temperatura necessaria debba essere maggiore di quella tenuta nell'apparecchio, se G. Rose ha trovato la tridimite inchiusa nelle opali.

Forse una difficoltà nella esperienza di accrescimento della tridimite sarebbe data dall'esistenza di un limite di grossezza proprio dei cristalli di ogni specie minerale; esistenza già in discussione quale interessante argomento di cristallogenesi.

E se l'esperienza di far crescere i cristalli di tridimite riescisse, io sarei sicuro che le condizioni complessive dell'ambiente di cristallizzazione non impedirebbero la formazione delle prevalenti facce del pinacoide, caratteristica della forma della tridimite; nello stesso modo che non possono prodursi tali facce nel quarzo, e ciò per la differente direzione di accrescimento esistente nei due minerali e dipendenti dalla loro struttura atomica.

Quindi, ritornando al quarzo, il suo maggiore accrescimento a seconda l' asse di simmetria fa sì che, in qualunque ambiente di cristallizzazione, le forze che agiscono e dipendenti dalle condizioni di esso non potranno mai prevalere per mutare totalmente

l'abito cristallino, come avviene, p. es., nella calcite. E le risultanti fra le varie forze dell'ambiente e quella della struttura intima non potranno mai essere tali da sopprimere le principali forme caratteristiche del quarzo, ma influiranno soltanto per la costituzione delle altre numerosissime forme cristalline che si possono osservare nel quarzo e che attraggono tuttora l'attenzione di eminenti cristallografi.

Perciò io sono d'avviso che pei cristalli di quarzo, e credo anche per altri minerali, si debba, per avere la speranza di qualche risultato nella difficilissima ricerca delle cause dell'abito cristallino, prendere in considerazione soltanto le forme essenziali tipiche, e pel quarzo anche le forme plagioedriche più comuni, e che tutte le altre, rappresentate da piccolissime faccette e massime le così dette *facce vicinali*, siano da paragonarsi alle svariate accidentalità del margine che possono avere le foglie di una stessa specie senza che si alteri la loro forma caratteristica.

E come accidentalità deve naturalmente considerarsi anche la varia estensione che possono assumere le facce delle forme essenziali predominanti, sebbene i cristallografi ora credano essere importante la misura dell'area delle facce. Infatti io nella stessa esperienza, dove potevo ritenere esistessero eguali condizioni di cristallizzazione, ottenni, contemporaneamente insieme a cristalli con eguale sviluppo delle tre facce di romboedro ai due capi, cristalli come quello rappresentato nella fig. 2ª, nel quale da un capo vi ha uno sviluppo regolare delle tre facce e dall'altro capo una faccia predomina di molto in estensione sulle altre due.

Sono quelle accidentalità che impediscono di trovare in un aggruppamento cristallino di quarzo due cristalli identici nello sviluppo, sebbene l'occhio esercitato del mineralogo, esaminando l'abito dei cristalli soltanto nelle sue linee generali, può talvolta riconoscere il giacimento e la località da cui proviene l'esemplare.

E, se non havvi effetto senza causa, tutte le dette accidentalità possono soltanto dimostrare la grandissima variabilità di condizioni di un ambiente di cristallizzazione e perciò la insuperabile difficoltà di conoscerne le cause se si volessero prendere in considerazione.

Di alcune particolarità presentate dalle onde di forma complessa nei circuiti trifasi.

Nota di GIUSEPPE LIGNANA.

Consideriamo un ordinario alternatore trifase collegato a stella rappresentato schematicamente in fig. 1: le tre forze elettromotrici indotte nei tre circuiti costituenti il suo avvolgimento

Fig. 1.

trifase, essendo la macchina costrutta con simmetria, e finchè non intervengono fenomeni secondari di reazione d'indotto ad alterarne la simmetria, si possono scrivere come è noto nel seguente modo:

$$
(1)\quad \begin{cases}
e_1 = E_1 \operatorname{sen}(pt + \alpha_1) + E_3 \operatorname{sen} 3(pt + \alpha_3) + E_5 \operatorname{sen} 5(pt + \alpha_5) + \dots \\
e_2 = E_1 \operatorname{sen}\left(pt + \alpha_1 + \frac{2\pi}{3}\right) + E_3 \operatorname{sen} 3\left(pt + \alpha_3 + \frac{2\pi}{3}\right) + \\
\qquad + E_5 \operatorname{sen} 5\left(pt + \alpha_5 + \frac{2\pi}{3}\right) + \dots \\
e_3 = E_1 \operatorname{sen}\left(pt + \alpha_1 + \frac{4\pi}{3}\right) + E_3 \operatorname{sen} 3\left(pt + \alpha_3 + \frac{4\pi}{3}\right) + \\
\qquad + E_5 \operatorname{sen} 5\left(pt + \alpha_5 + \frac{4\pi}{3}\right) + \dots
\end{cases}
$$

Le tensioni concatenate, essendo le tensioni semplici $e_1 e_2 e_3$ date dalle relazioni precedenti, risultano di forma ben determinata; ad esempio, la tensione fra il filo 1 e 2 sarà

$$e_{21} = e_2 - e_1$$

$$\begin{aligned} e_{21} = E_1 \Big\{ \operatorname{sen}\Big(pt + \alpha_1 + \frac{2\pi}{3}\Big) - \operatorname{sen}(pt + \alpha_1) \Big\} + \\ + E_3 \Big\{ \operatorname{sen} 3\Big(pt + \alpha_3 + \frac{2\pi}{3}\Big) - \operatorname{sen} 3(pt + \alpha_3) \Big\} + \\ + E_5 \Big\{ \operatorname{sen} 5\Big(pt + \alpha_5 + \frac{2\pi}{3}\Big) - \operatorname{sen} 5(pt + \alpha_5) \Big\} + \dots \end{aligned}$$

Colle opportune riduzioni si trasforma nella seguente:

$$\begin{aligned} e_{21} = \sqrt{3} \Big\{ E_1 \cos\Big(pt + \alpha_1 + \frac{\pi}{3}\Big) - E_5 \cos 5\Big(pt + \alpha_5 + \frac{\pi}{3}\Big) + \\ + E_7 \cos 7\Big(pt + \alpha_7 + \frac{\pi}{3}\Big) - E_{11} \cos 11\Big(pt + \alpha_{11} + \frac{\pi}{3}\Big) + \\ + E_{13} \cos 13\Big(pt + \alpha_{13} + \frac{\pi}{3}\Big) - \dots \Big\} \end{aligned}$$

oppure in funzione dei seni, per rendere immediato il confronto colla serie che ci rappresenta la tensione semplice:

$$\begin{aligned} e_{21} = \sqrt{3} \big\{ E_1 \operatorname{sen}[pt + \alpha_1 + 150] + E_5 \operatorname{sen}[5(pt + \alpha_5) + 210] + \\ + E_7 \operatorname{sen}[7(pt + \alpha_7) + 150] + \dots \big\} \end{aligned}$$

(2) e analogamente le altre tensioni concatenate:

$$\begin{aligned} e_{32} = \sqrt{3} \big\{ E_1 \operatorname{sen}[pt + \alpha_1 + 270] + E_5 \operatorname{sen}[5(pt + \alpha_5) + 90] + \\ + E_7 \operatorname{sen}[7(pt + \alpha_7) + 270] + \dots \big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{13} = \sqrt{3} \big\{ E_1 \operatorname{sen}[pt + \alpha_1 + 30] + E_5 \operatorname{sen}[5(pt + \alpha_5) + 330] + \\ + E_7 \operatorname{sen}[7(pt + \alpha_7) + 30] + \dots \big\} \end{aligned}$$

Dalle precedenti formule si vede subito che l'onda della tensione concatenata non è simile all'onda della tensione semplice, che rispetto a questa subisce una deformazione dovuta e

alla mancanza degli armonici di frequenza tripla o multipla del tre, e alla diversa fase degli armonici successivi rispetto all'onda fondamentale.

Fig. 2.

Nella fig. 2 è riprodotto l'oscillogramma della tensione semplice a, e quello della tensione concatenata b, ricavati da un alternatore di 30 KW a 200 Volt. Le forme delle due tensioni sono completamente dissimili; le curve furono ottenute collo stesso oscillografo e con ugual resistenza in circuito, onde poter subito riconoscere a prima vista quale delle due onde rappresenti la tensione semplice e quale la concatenata.

Il rapporto fra i valori efficaci della tensione concatenata e della tensione semplice, che per onde sinoidali sappiamo essere $\sqrt{3}$, nel caso di onde complesse sarà diverso.

Il valore efficace della tensione concatenata sarà

$$\epsilon_{21} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{3E_1^2 + 3E_5^2 + 3E_7^2 + \dots}$$

la tensione semplice avrà per valore efficace

$$\epsilon_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{E_1^2 + E_3^2 + E_5^2 + E_7^2 + \dots}$$

il rapporto sarà

$$\frac{\epsilon_{21}}{\epsilon_1} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{E_1^2 + E_5^2 + E_7^2 + E_{11}^2 + \dots}{E_1^2 + E_3^2 + E_5^2 + E_7^2 + \dots}}$$

e ponendo

$$u_3 = \frac{E_3}{E_1}, \quad u_5 = \frac{E_5}{E_1}, \quad u_7 = \frac{E_7}{E_1}, \dots$$

si ottiene

$$\frac{\epsilon_{21}}{\epsilon_1} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{1 + u_5^2 + u_7^2 + u_{11}^2 + \dots}{1 + u_3^2 + u_5^2 + u_7^2 + u_9^2 + \dots}}.$$

Il rapporto fra la tensione concatenata e la tensione semplice può avere il valore $\sqrt{3}$ solo nel caso di onde sinoidali, oppure nel caso che manchi il 3° armonico ed i suoi multipli nella tensione semplice; in genere questo rapporto avrà un valore minore di $\sqrt{3}$.

Qualora lo stesso alternatore venisse utilizzato come monofase non è a credere che la tensione veramente utilizzata possa essere la e_{21} priva di terzo armonico, poichè quando si chiude il circuito, la corrente che circola nei due avvolgimenti è la stessa, quindi si trova ad avere fasi diverse rispetto alle due tensioni e_1 ed e_2; perciò la reazione d'indotto si fa sentire in grado ben diverso nelle due parti dell'avvolgimento e le due f. e. m. e_1, e_2 non sono più rappresentabili colla serie (1). Per effetto della reazione gli armonici di ugual frequenza si troveranno ad avere ampiezze diverse e fasi diverse nelle due serie.

È interessante per le deduzioni che faremo in seguito calcolare la somma delle f. e. m. $e_1 e_2 e_3$, a due a due; per es.:

$$e_1 + e_2 = E_1 \left\{ \operatorname{sen}(pt + \alpha_1) + \operatorname{sen}\left(pt + \alpha_1 + \frac{2\pi}{3}\right) \right\} +$$

$$+ E_3 \left\{ \operatorname{sen} 3(pt + \alpha_3) + \operatorname{sen} 3\left(pt + \alpha_3 + \frac{2\pi}{3}\right) \right\} + \dots$$

$$= E_1 \operatorname{sen}\left(pt + \alpha_1 + \frac{\pi}{3}\right) + 2E_3 \operatorname{sen} 3(pt + \alpha_3) +$$

$$+ E_5 \operatorname{sen} 5\left(pt + \alpha_5 + \frac{\pi}{3}\right) + \dots,$$

gli armonici di frequenza tripla o multipla del tre si trovano ad avere una ampiezza doppia, ed una alterazione di fase rispetto al fondamentale ed agli altri armonici.

Se ora procediamo a calcolare la somma delle tre f. e. m. $e_1 + e_2 + e_3$, osserviamo che nella somma $e_1 + e_2$ il fondamentale $E_1 \operatorname{sen}\left(pt + \alpha_1 + \frac{\pi}{3}\right)$ ha ugual ampiezza del fondamentale $E_1 \operatorname{sen}\left(pt + \alpha_1 + \frac{4\pi}{3}\right)$ dell'onda e_3 e che ne è in opposizione, per cui la loro somma sarà nulla; evidentemente si potrà fare ugual ragionamento per il 5°, 7°, 11°, ecc. armonico; nella somma rimarranno solo il 3° armonico ed i suoi multipli; per cui

$$e_1 + e_2 + e_3 = 3E_3 \operatorname{sen} 3(pt + \alpha_1) + 3E_9 \operatorname{sen} 9(pt + \alpha_9) + \ldots$$

Correnti nel sistema trifase con carico Ohmico. — Consideriamo un sistema trifase con 4 fili (fig. 3): indichiamo

Fig. 3.

con r_1, r_2, r_3 le tre resistenze di fase, con R la resistenza del filo neutro, con i_1, i_2, i_3 ed i_0 le correnti delle tre fasi e del filo neutro. Le seguenti relazioni

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_0 = 0$$
$$r_1 i_1 - R i_0 = e_1$$
$$r_2 i_2 - R i_0 = e_2$$
$$r_3 i_3 - R i_0 = e_3$$

ci permettono di determinare le quattro correnti in funzione delle f. e. m. e delle resistenze.

Posto

$$\Delta = -\mathrm{r}_1\mathrm{r}_2\mathrm{r}_3 - R(\mathrm{r}_1\mathrm{r}_2 + \mathrm{r}_2\mathrm{r}_3 + \mathrm{r}_3\mathrm{r}_1),$$

le intensità di corrente si possono scrivere

$$i_1 = \frac{1}{\Delta}\left\{R\mathrm{r}_3(e_2 - e_1) - R\mathrm{r}_2(e_1 - e_3) - r_2 r_3 e_1\right\}$$

$$i_2 = \frac{1}{\Delta}\left\{R\mathrm{r}_1(e_3 - e_2) - R\mathrm{r}_3(e_2 - e_1) - r_3 r_1 e_2\right\}$$

$$i_3 = \frac{1}{\Delta}\left\{R\mathrm{r}_2(e_1 - e_3) - R\mathrm{r}_1(e_3 - e_2) - r_1 r_2 e_3\right\}$$

$$i_0 = \frac{1}{\Delta}\left\{r_2 r_3 e_1 + r_3 r_1 e_2 + r_1 r_2 e_3\right\}.$$

Nel caso del sistema a tre fili basta fare $R = \infty$ e allora otteniamo, ad es., per la corrente i_1 il valore

$$i_1 = \frac{r_2(e_1 - e_3) - r_3(e_2 - e_1)}{\mathrm{r}_1\mathrm{r}_2 + \mathrm{r}_2\mathrm{r}_3 + \mathrm{r}_3\mathrm{r}_1}.$$

Se le f. e. m. ci sono rappresentate dalla serie (1), è evidente che nella serie che ci rappresenterà la i_1 saranno esclusi gli armonici di frequenza tripla o multipla del tre, poichè compaiono le differenze $(e_1 - e_3)$ ed $(e_2 - e_1)$: questo si può dire qualunque siano le $\mathrm{r}_1\mathrm{r}_2\mathrm{r}_3$, almeno fintantochè le e_1, e_2, e_3 si conservano di ugual forma e di ugual ampiezza; quando per dissimetria del carico la reazione d'indotto si faccia risentire in diversa misura sulle tre f. e. m. indotte nell'alternatore allora non possiamo più asserire quanto sopra: però, se nasce per effetto di questa dissimetria il terzo armonico nelle correnti, questo dovrà essere diverso nelle tre correnti, per cui si dovrà avere una deformazione di una corrente rispetto all'altra.

La proprietà che le tre correnti in un sistema trifase equilibrato a tre fili non possono presentare un terzo armonico già venne dimostrata dal Bragstad nell'*ETZ.* La dimostrazione puramente matematica del citato autore si basa sulla proprietà che le tre correnti devono essere tali che la somma dei loro

valori istantanei sia sempre uguale a zero; implicitamente poi l'autore suppone che le tre onde abbiano ugual forma ed il sistema sia simmetrico. Siccome la condizione di uguaglianza a zero della somma delle tre correnti è soddisfatta anche da un terzo armonico che si trovi successivamente spostato nelle tre correnti di 120°, può nascere il dubbio che effettivamente questo terzo armonico possa sussistere; esso avrebbe per conseguenza che le forme delle tre correnti dovrebbero essere diverse nelle tre fasi. Ora numerosi esperimenti da me eseguiti col ricavare la forma delle correnti coll'oscillografo sono tutti contro questa ipotesi, come d' altronde era prevedibile. Infatti il supporre i terzi armonici delle correnti sfasati fra di loro di 120° implica che anche i terzi armonici delle f. e. m. indotte nell'alternatore abbiano pure tali sfasamenti, il che è assurdo data la simmetria di costruzione degli avvolgimenti.

Che debba mancare il terzo armonico nelle correnti si può vedere anche con questa semplice considerazione. Se le f. e. m. indotte hanno un terzo armonico, questo è lo stesso per tutte tre le fasi, quindi nei tre circuiti costituenti il sistema trifase questa f. e. m. di frequenza tripla si trova ad essere come in un circuito aperto; potrà dar luogo al terzo armonico delle correnti solo quando si chiuda il quarto filo che costituirebbe per questa f. e. m. di frequenza tripla il filo di ritorno alla macchina.

Ora veniamo a considerare il sistema a quattro fili. La corrente i_0 nel filo neutro supposta la R piccolissima e le resistenze di fase grandi e di valori tali che

$$r_1 = r_2 = r$$

$$r_3 = nr,$$

sarà

$$i_0 = \frac{1}{r}\left(e_1 + e_2 + \frac{e_3}{n}\right),$$

che potremo scrivere facilmente ricordando di avere già scritto il valore di $e_1 + e_2$

$$e_1 + e_2 = E_1 \operatorname{sen}\left(pt + \alpha_1 + \frac{\pi}{3}\right) + 2E_3 \operatorname{sen} 3(pt + \alpha_3) + \\ + E_5 \operatorname{sen} 5\left(pt + \alpha_5 + \frac{\pi}{3}\right) + \dots$$

$$\frac{e_3}{n} = \frac{1}{n} E_1 \operatorname{sen}\left(pt + \alpha_1 + \frac{4\pi}{3}\right) + \frac{1}{n} E_3 \operatorname{sen} 3\,(pt + \alpha_3) + $$

$$+ \frac{1}{n} E_5 \operatorname{sen} 5\left(pt + \alpha_5 + \frac{4\pi}{3}\right) + \ldots.$$

$$i_0 = \frac{1}{r}\left\{\sum_{1\,5.7}\left(1 - \frac{1}{n}\right) E_1 \operatorname{sen}\left(pt + \alpha_1 + \frac{\pi}{3}\right) + \sum_{3.9}\left(\frac{1}{n} + 2\right) E_3 \operatorname{sen} 3\,(pt + \alpha_3)\right\}.$$

Il valore efficace sarà:

$$(3)\qquad I_0 = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 [E_1^2 + E_5^2 + E_7^2 + E_{11}^2 + \ldots] + \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2 [E_3^2 + E_9^2 + \ldots]}.$$

Gli oscillogrammi fig. 4 e 4 *bis* ci fanno vedere la corrente nel filo neutro nel caso di $n = 1$ cioè con carico simmetrico.

Fig. 4.

Il coefficiente degli armonici non multipli di tre va a zero ed il coefficiente degli armonici la cui frequenza è multipla del 3 diventa $(2 + 1)^2 = 9$.

Appena si produce uno squilibrio, nel filo neutro si fa sentire la battuta dell'armonico fondamentale. L'oscillogramma fig. 5 è ottenuto con $n = 0{,}75$.

Finalmente nell'oscillogramma fig. 6 nella curva a si ha la corrente i_0 per $n = \infty$.

Fig. 4 *bis*.

Fig. 5.

Fig. 6.

In tutti questi oscillogrammi venne anche registrata la curva della tensione semplice.

Al variare di n variano le ampiezze dei varî armonici per modo che si possono ottenere svariatissime forme di correnti nel filo neutro:

Valori di n	∞	5	4	3	2	1	0,75	0,66	0,50	0,33
$\left(1-\frac{1}{n}\right)^2$	1	0,64	0,56	0,46	0,25	0	0,11	0,25	1	4
$\left(2+\frac{1}{n}\right)^2$	4	4,84	5,05	5,44	6,25	9	11,1	12,25	16	25

per valori molto piccoli di n la resistenza $r_3 = nr$ non è più in condizione tale per cui sia R trascurabile, onde non valgono più i coefficienti che si ricaverebbero dalle formole precedenti.

Misurando il valor efficace della corrente nel filo neutro in condizioni diverse di circuito, cioè per due valori di n, si potrà ricavare il valore della somma

$$E_1^2 + E_5^2 + E_7^2 + E_{11}^2 + \dots$$

e della somma

$$E_3^2 + E_9^2 + \dots$$

ed in casi in cui la forma della curva sia tale da non presentare nono armonico, si avrà direttamente il valore del terzo armonico.

Non ho potuto fare determinazioni di questo genere, perchè l'alternatore di cui disponevo mi dava delle curve in cui certo intervenivano molti armonici, come ne fanno fede gli oscillogrammi.

Gli oscillogrammi fig. 8, 9, 10, furono rilevati in un sistema trifase alimentato dallo stesso alternatore usato in precedenza, previa trasformazione indicata in fig. 7, dove A indica l'alternatore, T un primo trasformatore trifase, che innalzava

la tensione da 200 a 2000 Volt. Il centro di questo trasformatore si poteva collegare col centro dell'alternatore mediante l'interruttore t.

Fig. 7.

Il secondario del trasformatore T alimentava il primario di tre trasformatori monofasi uguali collegati pure a stella e che ribassavano di nuovo la tensione a circa 200 Volt. Le resistenze r erano tali da poterle ritenere uguali come ne fa fede l'oscillogrammo (9): la corrente era di circa 35 Ampère.

Fig. 8.

In fig. 8 si ha in $a\,a'$ le curve di due delle tensioni fra il filo neutro e i fili di linea, in b si ha l'intensità di corrente in una fase.

In fig. 9 si ha in a una delle tensioni semplici; in b la corrente nel filo neutro essendo il tasto t aperto, il terzo armonico

che si osserva deve avere la sua origine nei trasformatori per i fenomeni d'isteresi; in c la corrente nel filo neutro quando si chiude il tasto t, e allora si fanno risentire il terzo armonico ed i suoi multipli generati dall'alternatore.

Fig. 9.

Fig. 10.

In fig. 10 furono ricavati gli oscillogrammi della intensità di corrente con un piccolo squilibrio nei reostati, la a è la corrente quando non agisce il filo neutro o, la b è la corrente quando si chiude il filo neutro. Nel primo caso è evidente che la corrente tende a riprodurre la forma della tensione concatenata, nel secondo caso invece la corrente si avvicina come forma alla tensione semplice.

Termino ringraziando vivamente il chiarissimo prof. Grassi che benevolmente volle esser meco largo di consigli e incoraggiamenti.

Novembre 1908. - Dal Laboratorio del R. Politecnico di Torino.

Relazione sullo studio geologico del Prof. F. Sacco, col titolo: *Il Gruppo della Majella.*

Il Prof. Sacco, che nello scorso anno pubblicò, nelle Memorie dell'Accademia, un lavoro geologico sul gruppo del Gran Sasso, ha esteso quest'anno le sue ricerche al Gruppo della Majella, condotte collo stesso indirizzo, e ne presenta ora i risultati, esposti in una breve memoria, corredata da una carta geologica nella scala di 1 a 100.000 e da un elenco bibliografico.

Premesso un rapido sguardo ai caratteri orografici, l'A. passa alla descrizione della serie dei terreni appartenenti al Giura-Lias, al Cretaceo, all'Eocene, Miopliocene e Neozoico. Per la cronologia dei terreni mesozoici, si riferisce ai dati paleontologici riconosciuti dai precedenti osservatori; e delimita in particolare per il Cretaceo, numerose masse, che affiorano per fratture sul versante occidentale e per erosione su quello orientale. Più estese e dettagliate sono le osservazioni relative alla serie terziaria. Descrive l'Eocene nel suo sviluppo e nelle sue facies, con speciale riguardo alle zone fossilifere, ai banchi coralligeni, alle zone bituminose: dimostra la grande estensione e potenza del Miopliocene, che si addentra nell'Appennino, in modo da circondare la Majella, presentando frequenti zone gessifere e lenti di conglomerati in rapporto all'idrografia del corrispondente periodo geologico. Riconosce nel Pliocene marino il solito tipo subappennino, con passaggi ad un potente ed ampio deposito di conglomerati, disposto attraverso la valle del Pescara, presso Manopello, e che rappresenta appunto il delta pliocenico di questo fiume. Al Quaternario attribuisce dei lembi alluvionali, detriti di falda e travertini, situati spesso oltre 200 m. sopra i fondi vallivi attuali, riscontrandovi una prova della attiva erosione postpliocenica, che fu assai efficace anche nei terreni calcari. Altri segni dei tempi quaternarî si hanno nei depositi glaciali, limitati ma tipici, nel vallone ad est del M. Amaro e nel paesaggio carsico, che è caratteristico per certe plaghe dell'alta Majella.

Riguardo alla tectonica, l'A. osserva, che il gruppo della Majella presenta ad ovest due grandi fratture con spostamento,

l'una interposta fra la Majella ed il Morrone, l'altra che divide il Morrone dalla conca di Sulmona; invece verso est la massa montuosa scende a forte pendìo, per modo che l'Eocene va ad immergersi regolarmente sotto i terreni neogenici. Come particolarmente interessante, egli nota ancora il contrasto assai evidente tra il carattere geologico e morfologico della Majella, completamente identico a quello abruzzese, ed il carattere della regione, che le succede ad est ed a sud-est, la quale, per la comparsa e lo sviluppo della formazione argilloso-scistosa sottostante ai tipici calcari nummulitici, assume la fisionomia, assai diversa, dell'Appennino Settentrionale, del Molise e del Beneventano.

I risultati, ora riassunti, dello studio della Majella, segnatamente per ciò che riguarda la costituzione e struttura geolocica del gruppo montuoso, ci sembrano più notevoli ed interessanti di quelli esposti nel lavoro precedente sul Gran Sasso, e, ritenendo utile la pubblicazione della memoria relativa, proponiamo ch'essa sia accolta nei volumi accademici.

G. SPEZIA,
C. F. PARONA, *relatore.*

Relazione sulla memoria del Dott. MARIO PONZO, intitolata: *Studio della localizzazione delle sensazioni tattili.*

Il Dott. PONZO si è proposto lo studio del problema tanto discusso in psicologia della localizzazione delle sensazioni cutanee. Egli espone la parte storica dell'argomento, dalle prime ricerche di E. H. WEBER a quelle ultime dello SPEARMANN. Sulla base delle precedenti ricerche afferma la differenza esistente fra la localizzazione ed il cosidetto senso spaziale. Discute poi circa i diversi metodi possibili per la ricerca, e sceglie tra essi quello originario di E. H. Weber.

Naturalmente lo studio della localizzazione delle sensazioni cutanee comprende l'esame della capacità di localizzazione con l'eccitare i singoli punti sensibili della pelle, cioè i punti tattili, i dolorifici, i caldi, i freddi; ma l'A. nella memoria si limita ad esporre i risultati ottenuti riguardo alla localizzazione delle

sensazioni tattili nelle varie regioni della pelle. In numerose tabelle riporta i singoli risultati avuti per dare infine un completo quadro dell'andamento della ricerca. Dopo avere raccolto e discusso le osservazioni ed i dati delle singole tabelle, l'A. giunge fra altre alle seguenti conclusioni:

Nella localizzazione di sensazioni tattili, determinate dall'eccitazione di singoli organi tattili con uno stimolo costante, si commettono degli errori diversi nelle varie regioni del corpo.

In eguali condizioni di esperienza, il valore dell'errore medio in una data regione si mantenne costante nei due soggetti esaminati. Il valore medio complessivo può essere preso come valore normale medio nell'uomo adulto. Si può stabilire una scala della finezza della localizzazione, nella quale si procede da regioni in cui si ha un massimo a quelle che posseggono un minimo di tale capacità. Sembra che l'intensità dello stimolo non abbia azione sull'esattezza della localizzazione; così non ha influenza su di questa la grandezza della soglia tattile.

Nelle regioni esaminate sugli arti si nota un aumento dell'errore procedendo dalla porzione distale alla prossimale di questi.

Considerando le varie direzioni nelle quali gli errori vengono commessi, si ha che essi sono di solito più grandi ed anche più numerosi nella direzione dell'asse maggiore della parte del corpo dove si trova la regione esaminata che non nelle altre direzioni.

Il lavoro fu eseguito nel laboratorio di Psicologia sperimentale della nostra Università e sotto la direzione del Professore Kiesow. Nella memoria l'A. non tenta di spiegare il processo della localizzazione tattile sulla cute, egli invece si limita alla esposizione dei fatti che con grande diligenza e con la maggior precisione possibile ha potuto raccogliere. Nell'insieme la memoria porta un notevole contributo e perciò la Commissione propone che essa sia accettata per la stampa.

L. Camerano,
R. Fusari, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 6 Dicembre 1908.

Sono presenti i Soci: Manno, Direttore della Classe, Rossi, Brusa, Renier, Pizzi, Ruffini, Stampini, D'Ercole, Sforza e De Sanctis, Segretario. — Scusano l'assenza i Soci Carle, Graf e Brondi.

È approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, 22 novembre 1908.

È presentata la pubblicazione intitolata: *La commemorazione del 1° centenario della morte di Giovanni Fantoni - Fivizzano 29 settembre 1907* (Pistoia, tipo-lit. Sinibuldiana, 1908), offerta in omaggio dal Socio Sforza.

Il Socio Ruffini presentando il volume: *La vita economica in Piemonte a mezzo il secolo XVIII (Documenti finanziari degli Stati della monarchia piemontese*, serie I, vol. II, Torino, 1908) offerto all'Accademia dall'autore Giuseppe Prato, nota come il Prato in questo lavoro importantissimo per la storia finanziaria del Piemonte, mostra di accoppiare mirabilmente rigore di metodo storico e larghezza di cognizioni economiche.

Il Socio D'Ercole presenta un suo opuscolo su *L'insegnamento liceale e la storia della filosofia* (estr. dalla " Rivista pedagogica ", anno I, Roma, 1908).

Per gli *Atti* accademici il Socio Manno presenta una nota di Pietro Torelli su *L'Archivio del Monferrato.*

Il Socio Renier, a nome anche del Socio Graf, legge la relazione intorno alla memoria del prof. Edmondo Solmi su *Leonardo da Vinci come precursore della embriologia.* La Classe, approvata la relazione, delibera con voto unanime la inserzione della monografia del Solmi nelle *Memorie* accademiche.

In seduta privata la Classe delibera a termine dell'art. 22 dello Statuto accademico, il passaggio del Socio Savio, trasferitosi con stabile ufficio a Roma, dalla categoria dei Soci nazionali residenti a quella dei non residenti.

LETTURE

L'Archivio del Monferrato.

Nota di PIETRO TORELLI.

Uno strano e aggrovigliato complesso di circostanze ha ingenerata la supposizione, tuttora radicata in moltissimi eruditi, che l'Archivio del Monferrato, dopo la caduta del Ducato di Mantova, nelle vicende del suo smembramento dall'Archivio Gonzaghesco e del trasporto che doveva farsene in forza di trattati a Torino, sia andato disperso o forse interamente perduto. Nell'incrociarsi di supposizioni diverse, chi cerca ancora gli atti di quell'Archivio a Mantova; chi li ritiene sempre nascosti gelosamente a Vienna, per un' insidia e un sopruso che facilmente si attribuiscono allo straniero. In base a documenti dell'Archivio Gonzaga sarà agevole invece dimostrare all'evidenza come gli atti esistenti a Torino rappresentino tutto, o quasi tutto, un Archivio di cui si era propensi ad esagerare la mole, quanto più diventava tenace l'opinione diffusa della sua inesplicabile scomparsa.

Il trattato di alleanza concluso in Torino l' 8 novembre 1703 tra l'Imperatore Leopoldo e Vittorio Amedeo II Duca di Savoia, assegnava a quest'ultimo, con l'art. V, la parte del Monferrato posseduta dal Duca di Mantova. Con l'art. VIII, stabiliva che la cessione avvenisse " cum omnibus tormentis bellicis, commeatu, annona, armis et aliis apparatibus militaribus ad ea loca pertinentibus, *nec non documentis litterariis, et titulis illa concernentibus* „ (1). Questi documenti e titoli costituivano precisamente l'Archivio del Monferrato. Di esso non si trova poi più espressa menzione; ma la sanzione del suo trapasso ai Savoia venne confermata implicitamente dall'investitura che, sulle basi appunto del trattato del 1703, l'Imperatore Giuseppe I concesse

(1) Lünig, *Cod. dipl. Italiae*, I, 958-9.

allo stesso Vittorio Amedeo il 7 luglio 1708 in Vienna (1), e ratificata definitivamente dalle convenzioni strette sulla base stessa dal Duca di Savoia con Luigi XIV Re di Francia (2) e con Filippo V di Spagna (3) nella pace generale di Utrecht l'11 aprile 1713. Cessò anche allora la possibilità di opposizioni serie da parte dei varî pretendenti al Monferrato, i quali o vi rinunciarono espressamente, o rivolsero le loro mire ai compensi che i firmatari della pace di Utrecht, come già l'imperatore nel trattato del 1703, avevan loro genericamente promessi.

Stabilito così il fondamento giuridico del possesso dell'Archivio Monferratense nei duchi di Savoia, cessati i movimenti di guerra che avevano fino allora assorbite tutte le attività dei Governi, si cominciò a pensare al trasporto di esso Archivio da Mantova (ove l'avevan tratto i Gonzaga dopo che Carlo V con sentenza 3 novembre 1536 aveva loro aggiudicato il Monferrato) a Torino.

Veramente, già il 12 novembre 1709 Giuseppe Maria Castiglione, prefetto dell' " Imperiale e segreto Archivio di Mantova „ aveva per comando della Cesarea Amministrazione della città compiuto " l'intero et universale indice delle scritture attinenti

---

(1) " Sciant omnes ... quod ... inter Ser. Caes. Majest. et Seren. Ducis " Dilectionem sub octava Novembris anno 1703 foedus initum fuit quo " praeter alia conventum legitur quod ... Sacra Caes. Majestas cedat et trans- " ferat in ducem Sabaudiae ... illam Ducatus Monferratensis partem de qua " Duces Mantuae investiti fuere... Qua propter ... Ser.um Ducem Victorem " Amadeum ... infeudavimus atque investivimus ... atque investimus de toto " Ducatu Montisferrati, pro ea scilicet parte de qua Duces Mantuae inve- " stiti fuerunt et hactenus tenuerunt, cum omnibus, etc. „. Lünig, op. cit., I, 963-8.

(2) Cap. VII : " Pour assûrer davantage le repos public, et en particulier " celui de l'Italie, il a été convenu, que les cessions faites par le feu Em- " pereur Léopold à Son Altesse Royale de Savoye, par le traité fait entre " eux le 8 novembre 1703, de la partie du Duché de Monferrat qui a été " possédée par le feu Duc de Mantoue, des provinces etc.... et les appar- " tenances et dépendances desdites cessions, resteront dans leur force, et " vigueur, fermes et stables, et auront leur entier effet, irrévocablement, " non obstant, etc. ... „. Lünig, I, 981-1002.

(3) Cap. XI, colle stesse parole trascritte nella nota precedente. Lünig, I, 1002-1038. Vedi per l'azione diplomatica che condusse alle decisioni qui e più sopra riportate Carutti, *Storia della diplomazia della Corte di Savoia*, III.

al Monferrato, esistenti in detto Archivio „ e le aveva distribuite in cinquanta *colti*; e il 20 dello stesso mese, dandosene relazione all'imperatore, si chiedeva se tutte o parte soltanto di dette scritture fossero di spettanza del duca di Savoia (1). Che a Vienna si prendesse a cuore seriamente la questione dell'Archivio Monferratense è provato dal fatto che quell'indice fu certo bene esaminato. Tanto è vero che si vollero poi inviati colà gli originali di varî atti che il Castiglione aveva distribuiti in diversi colti, atti che non dovettero sembrare di spettanza di quell'Archivio, e per questo, senza sopruso di sorta, potevano essere dal Governo richiamati per scopi proprî. Sono 26 documenti che furono di fatto spediti a Vienna il 1° febbraio 1710 (2), e poichè erano per la maggior parte privilegi di concessione o conferma di diritti sul Monferrato rilasciati da varî imperatori ai Gonzaga, se si capisce da un lato come il Castiglione li avesse posti tra le " scritture attinenti al Monferrato „, si capisce anche meglio come a Vienna si dovessero, dal solo indice, giudicare come di proprietà legittima degli investiti, come appartenenti cioè al loro archivio di famiglia indipendentemente dalle terre di cui in essi si parlava. Del resto questi documenti tornarono nel 1744, come si vedrà, ai Savoia, come non tornarono invece a Mantova numerosi altri atti imperiali importantissimi, richiamati a Vienna insieme a questi pochi del Monferrato, non mi consta per quali ragioni.

Ma le prime notizie di un lavoro serio sullo scorporo dei documenti Monferratensi dall'Archivio Gonzaga non si trovano nell'incarto di quest'archivio che nel 1720. Si parla di copie di atti ancor poco progredite, inceppate da varie cause, tra cui la scarsezza d'amanuensi abili a trascrivere documenti antichi. Si vede chiaramente di che si trattasse dagli atti che seguono con una lacuna di sette anni, che deve senza dubbio rispecchiare un forte rallentamento delle pratiche per la consegna dei documenti del Monferrato al re di Sardegna, se non forse una vera sospensione di esse, dato che nel 1727 se ne parla quasi come d'una

---

(1) Archivio Gonzaga, A I, 8, busta B, di dove trassi tutte le notizie per le quali non indicherò sede speciale.

(2) Nell'Arch. Gonzaga, sede citata, si conserva l'indice dei documenti e la memoria della spedizione.

novità. Lo stimolo a riprenderle venne questa volta (e si vede che non era la prima) dai Savoia, ed io non posso non rilevare come la cosa si leghi con ogni probabilità alle cure rivolte da Vittorio Amedeo II appunto in questo periodo con tanto amore alla custodia e al servizio dei Regi Archivi della sua Corte (1). Il fatto sta che sul finire del 1727 incaricò il suo ministro Commendatore Solari di Breglio " di far nuove e premurose instanze, acciò gli venghino rimesse tutte le scritture che riguardano il Monferrato a tenore di ciò che viene espresso dall'articolo ottavo del trattato di alleanza fatto nel 1703... „. E il Solari di Breglio, in attesa " che si faccino l'esatte ricerche tanto negli archivi esistenti in Vienna che in quelli di Mantova „, comunica a S. M. Cesarea e Cattolica che il suo re si restringe per ora a richiedere una certa parte di quelle scritture, supplicando che sia inviato " un ordine ben positivo al Governo di Mantova di ricercarle e di rimetterle alla persona che il re di Sardegna mandarà colà per ritirarle „. A Vienna, pur sempre vantando l'intenzione di restituire i documenti, si voller prima meglio conoscere, e il 24 marzo 1728 il Prefetto dell'Archivio segreto di Mantova, Pietro Antonio Lanzoni, ne inviava un nuovo indice; si vollero copiati sotto la sua direzione tutti gli atti che in qualche modo potessero interessare così il Monferrato che Mantova; si vollero pagar poco o nulla affatto i copisti, così che in conclusione nulla ancora s'era dato al re di Sardegna, quando il 23 febbraio 1733 ancora il Solari di Breglio ripeteva le istanze fino allora inutili, " avendo — scriveva — tutta la confidenza che quest'atto di giustizia non verrà più differito, e che S. M. Imperiale vorrà anche in ciò dimostrare la sua particular stima al Re mio padrone „. E neppur questo ebbe effetto migliore; anzi, nel 1736, poichè si credeva a Vienna che qualcosa si fosse pur mandato ai Savoia, il povero Lanzoni, vittima delle più o meno sincere sollecitazioni imperiali e delle non ingiustificate pretese e degli errori degli inesperti copisti, umilmente scriveva al Segretario di Stato in Mantova: " In quanto poi se sia seguita alcuna rimessa di parte di dette scritture al Re di Sardegna, V. S^{ia} Ill.^{ma} può assicurarsi che non sarebbesi ciò in

(1) V. soprattutto i documenti pubblicati in nota del recente lavoro del Taddei, *L'Archivista*, pagg. 136-150.

alcuna maniera effettuato se prima non mi fosse stata notificata con commessione particolare „, e la commessione non era stata data mai.

Con tale meschino avvicendarsi di pressioni e d'incagli si giunse al 1744. Il nuovo ministro del re di Sardegna, conte Canale, ottenne il 5 gennaio la restituzione di quelle carte che già rilevai esser state da Mantova inviate a Vienna il primo febbraio 1710, e la sua richiesta che pare si limitasse alle investiture e privilegi, ai protocolli dei notai segretari dei principi del Monferrato e a pochi altri oggetti, fu girata a Mantova; di dove tuttavia le poco chiare espressioni degli atti d'ufficio conservati nell'archivio Gonzaga potrebbero anche lasciar credere che effettivamente non si fosse spedito che un indice dei documenti richiesti (era quanto del resto chiedevasi da Vienna all'inizio di questa pratica del '44), se una nota della Direzione Generale degli Archivi di Torino scritta al Ministero dell'Interno il 23 giugno 1869 non dichiarasse espressamente che s'erano riscontrati minutamente i versamenti *già ricevuti nel 1744,* '76, '78, ecc.

L'indice redatto dal Lanzoni rimasto più o meno la base dei lavori fatti fin qui, arrivava solo all'anno 1606, e invero soltanto quei documenti si trovavano a parte non tanto, credo, per speciale fatica degli archivisti, quanto pel fatto che a suo tempo eran venuti dal Monferrato in blocco, e ciò val certo pei documenti fino al 1536, e che poi forse i Gonzaga avevano appunto fino al 1606 tenute distinte le amministrazioni o almeno le carte dei due loro Stati, Mantova e Monferrato. Ad ogni modo, nel 1763 si ordinò la separazione degli atti successivi al 1606 e si diedero minute disposizioni per attuarla. Come fu compiuta, nel 1776 la Real Corte di Torino destinava il sig. Francesco Marino, primo segretario di quei reali archivi, a ricevere dall'in allora prefetto dell'archivio di Mantova, Consigliere Tamburini, i documenti del Monferrato; e in data 20 settembre il predetto sig. Marino rilasciava in calce a tre elenchi di atti regolare attestazione di ricevuta (1). È questa la spedizione del

---

(1) “ Io infrascritto Francesco Marino P.° Segretario ne' Regii Archivi “ di S. M. il Re di Sardegna, e dalla medesima incaricato per l'infrascritto “ effetto, confesso d'aver ricevuto dall'Ill.^{mo} Sig. Consigliere Francesco Tam-

grosso dell'archivio: furono inviati in complesso 44 registri e 166 filze, e dal contenuto di ciascuna più o meno minutamente indicato nei detti elenchi (1), arguisco che dovettero esser filze della misura comune anche ora usata nei nostri archivi (2), eccezion fatta pel terzo elenco che parla di filze contenenti 15, ed altre 811 pezze, ma che ci dà, in compenso, il rispettabile numero di queste: 23352 (3). Tuttavia questi documenti non erano ancora tutto l'archivio del Monferrato: mi sfuggono le probabili proteste che portarono a nuove ricerche e a un nuovo scorporo, ma trovo una " Nota delle scritture contenute nelle quattro filze, o sia fasci, riguardanti l'amministrazione interna del Ducato di Monferrato pervenute da Mantova a S. Ecc. il Sig. Conte Perrone ministro di Stato, e da esso trasmesse d'ordine di S. M. a questi Regi Archivi di Corte, li 23 ottobre 1778 „. La nota è regolarmente sottoscritta in Torino dal Sovraintendente dei Regi Archivi Vittorio Amedeo Hatzaert, e ci insegna che le quattro filze contenevano in complesso 663 pezze.

Dopo di ciò, a prescindere da una lettera del principe di Kaunitz della quale dirò più sotto, trovo solo nel 1842 ricordato un " nuovo eccitamento „ per la consegna allo Stato Sardo di 58 protocolli di notai Segretari Marchionali del Monferrato, indicati come esistenti nell'Archivio di Mantova, ove al contrario furono ricercati in vano. Si volle anzi supporre che fossero rimasti in casa del consigliere Tamburini prefetto dell'Archivio Gonzaga al tempo delle consegne del 1776-8, dov'erano stati certo fino al 1781, anno in cui egli ne ordinò, forse senza effetto,

---

" burini delegato per il Regio Archiducale Archivio segreto di Corte in " Mantova le scritture concernenti lo stato di Monferrato descritte nel " presente elenco di carte n° 109 (II° elenco, carte 146; III° elenco, carte 7); " e munito del mio proprio sugello alla corda che unisce li fogli del me- " desimo elenco, le quali carte, e scritture mi vengono rimesse dal suddetto " Ill. Sig. Consigliere per ordine di S. A. R. il Ser.mo Arciduca Governatore " e Capitano generale della Lombardia Austriaca, in fede di che mi sono " sottoscritto. — Mantova li vinti settembre 1776. — F. Marino „.

(1) Conservati tra gli atti dell'Arch. Gonzaga alla sede E XX, 3.

(2) La filza I^a conteneva circa 80 doc., di cui parecchi in pergamena; la 35^a, 66 disegni e tipi, ecc.

(3) È cioè l'elenco che ne contiene il maggior numero, quantunque il più breve pel suo carattere sommariissimo.

il ricollocamento in sede. Nulla tuttavia poteva provarlo, e le pratiche per il rinvenimento di essi e di varie altre carte che a Torino si lamentavano mancanti continuarono nel 1843. È notevolissimo a questo proposito un documento del 27 giugno (1): L'I. R. Direzione generale degli Archivi di Milano scriveva alla Presidenza di Governo come dalla corrispondenza d'ufficio risultassero “ alcuni poscritti del principe di Kaunitz (2), ne' quali è detto che si dovesse in ogni occasione far ben comprendere tanto al Delegato quanto al Ministero della Corte di Torino eseguirsi dal canto della nostra la consegna delle antiche carte del Monferrato per un atto di mera deferenza verso S. M. il Re, e non per obbligo, atteso che non ha egli alcun positivo diritto per reclamarle essendo stata promessa nel trattato del 1703 la consegna delle sole scritture relative al territorio d'Alessandria e Mortara, alla Lomellina e Valsesia, provincie allora cedute alla casa di Savoia; nè si trova ne' trattati di pace 1736 e 1738, come neppure in quello di Wormazia 1743 alcuna traccia di stipulazione che si riferisca alla consegna delle carte del Monferrato „. La tarda resipiscenza del principe di Kaunitz non aveva veramente alcuna base di fatto: L'articolo 5 del trattato del 1703 diceva chiaramente: “ Sacra Caesarea Majestas, in compensationem etc..... cedit et transfert in Regiam Celsitudinem Suam (Vittorio Amedeo) ejusque descendentes et successores illam ducatus Montisferrati partem de qua Duces Mantuae investiti fuere..... sine ulla exceptione „. E se l'articolo 8 parlava effettivamente, in principio, di condizioni speciali riguardanti Alessandria, Valenza e Mortara, il capoverso che stabiliva la restituzione delle scritture del Monferrato cominciava con un chiarissimo: “ De reliquo omnes urbes loca et munimenta supra cessa suae Regiae Celsitudini „ e continuava con le parole “ cum omnibus tormentis bellicis, ecc. „, che ho riferite nelle prime righe di questo scritto. Non per questo l'osservazione del Kaunitz rivela meno chiaramente le disposizioni vere del governo di Vienna, e può in certo modo spiegare quanto avvenne di poi. Il 16 maggio 1845, in seguito alle ripetute istanze già ricordate

(1) L'incartamento è all'Archivio di Stato di Milano, e di esso la Direzione di Mantova ebbe cura di far trarre una copia.

(2) Pare che si tratti di una lettera al Firmian 15 apr. 1779.

partirono ancora da Mantova " due casse imballate e coperte di tela cerata „ contenenti atti del Monferrato, dirette questa volta, per espresso ordine superiore, a Vienna. Erano 803 pezze di data dal 938 al 1622, un volume " Dell'origine del Monferrato dell'autore Conte S. Giorgio „ e il famoso Codice Astense de Malabayla. Da Vienna questi documenti furono l'anno dopo inviati a Torino (1), ma, senza dubbio, non furono inviati tutti. Le intenzioni dunque dei tempi del principe di Kaunitz non erano ancora mutate, e d'altra parte è da ricordarsi, per es., che già dal 1844 non si voleva venissero affatto comunicati alla Corte Sarda gli atti sui quali la casa di Lorena avrebbe potuto fondare i proprî diritti alla successione del Monferrato nel caso d'estinzione della linea maschile di Savoia, diritti espressamente riservati nel trattato del 1703 (2). Ma la selezione fatta a Vienna dei documenti Monferratensi avanti l'invio a Torino ebbe anche altri scopi meno plausibili: il codice Malabayla, per es., non aveva alcun pensabile valore pratico; solo, era un gioiello storico, e parve sufficiente ragione per trattenerlo. Non è tuttavia necessario ricordare come venisse poi donato dall'Imperatore d'Austria a Quintino Sella e da lui generosamente regalato alla città d'Asti, pubblicato e dottamente commentato.

Dopo il 1845-6 non avvenne alcun' altra spedizione di documenti, quantunque continuassero le insistenze della Corte Sarda per ottenere quanto ancor non aveva, e soprattutto i 58 protocolli dei notai segretari dei Signori del Monferrato. L'aggiunto Sig. Persico, dirigente dell'Archivio Mantovano nel 1846, credeva per fondate ragioni che nel 1778 i 58 protocolli fossero stati consegnati al R. Governo " affinchè volesse egli poscia dar seguito alla loro destinazione „, ma mentre " di tutti gli atti spettanti alla R. Corte Sarda e quindi ad essa di mano in mano spediti, se n'ebbero di ritorno a suo tempo gli elenchi „, quelli dei 58 protocolli non s'ebbero, così che dovea credersi che il R. Governo a sua volta non li spedisse o almeno non curasse di richiamarne la debita ricevuta sull'elenco accompagnatorio. Si volle allora anche attribuire la mancanza dei detti protocolli

---

(1) Così la citata Nota della Direz. Gen. degli Archivi di Torino al Ministero dell'Interno 23 giugno 1869.

(2) Così il citato carteggio di Milano.

a un furto: nel 1842 un impiegato dell'archivio Gonzaga di nome Marazzi sottrasse dalle varie rubriche dell'archivio un rilevante numero di pergamene. In seguito a processo criminale, nel 1843 il Marazzi venne condannato, e la refurtiva ricuperata solo in parte. Tuttavia, che egli avesse sottratto i protocolli del Monferrato è assolutamente improbabile: egli rubò, da quanto appare, solo fogli sciolti, nè la mancanza di 58 registri sarebbe sfuggita facilmente al meno oculato dei dirigenti. Neppure credo abbia base alcuna una diceria raccolta in una lettera privata del 1869, diretta a G. Zucchetti già dirigente a Mantova e allora segretario a Milano. Il rappresentante Sardo in Milano nel 1849 avrebbe scritto confidenzialmente d'esser stato assicurato da persona pratica che fu per molti anni a capo dell'Archivio di Mantova, che questi protocolli c'erano, " ma in luogo non facile ad esser veduti dai legislatori (?) „. Lo Zucchetti ritenne naturalmente a sè diretta l'allusione, la disse una solenne fandonia e mostrò piuttosto di credere alla sottrazione dei protocolli da parte del Marazzi.

L'ultimo documento a me noto sulla questione chiarisce nettamente lo stato definitivo di essa. È la citata nota 23 giugno 1869 (1) della Direzione Generale degli Archivi di Torino, diretta al Ministero dell'Interno. Dice che riscontrati minutamente i versamenti già ricevuti nel 1744, '76, '78 ed ultimamente nel 1846, si rilevò che in quest' ultima consegna il Governo Austriaco non restituì tutto l'avuto da Mantova nel 1845. Tuttavia la parte trattenuta non è gran cosa, e importa solo pel Monferrato e l'Italia, così da lasciar sperare che il Governo di Vienna non vorrà opporsi ad una piena restituzione (2). Ben altri documenti, continua, non andarono a Vienna, nè vennero a Torino: saranno

---

(1) Scritta in seguito a relazione d'una Commissione per l'Archivio storico Gonzaga, che espose con chiarezza la storia della questione.

(2) Osservo tuttavia che un'attendibilissima privata lettera del Direttore dell'Archivio di Stato di Vienna al Marchese Ferraioli di Roma, in data 28 gennaio 1898, esclude assolutamente che colà rimanga ancora una sola carta del Monferrato. In essa lettera è cenno di un altro versamento fatto dal Governo Austriaco all'Italia nel 1870, che forse tacitò le proteste spinte fino all'anno prima, ma il carteggio d'ufficio dell'Archivio Gonzaga non ne parla, com'è del resto naturale, per un atto avvenuto direttamente tra i due Governi.

quindi a Mantova; e sono soprattutto e sempre i tanto nominati protocolli dei notai segretari del Monferrato.

E davvero non possono essere altro; nè a Mantova si trovano certo. Il piccolo gruppo dei documenti Monferrini che rimangono ancora nell'Archivio Gonzaga, è formato di atti per errore dimenticati nelle varie spedizioni. L'affermazione non può esser messa in dubbio, poichè appaiono disordinatamente appartenenti ai *colti* più svariati in che era stato diviso il fondo archivistico del Monferrato, e d'altra parte sono in tutto 147 documenti. Per la difficoltà appunto di riunirli in categorie e darne così complessiva ma sufficiente notizia, per la importanza di parecchi di essi, e soprattutto per la ricostruzione compiuta dell'antico archivio Monferratense io ne darò in fine un indice sommariissimo. Dico la ricostruzione compiuta, perchè non mi pare che si debba per nessuna ragione dubitare che il fondo del Monferrato, quale si trova ora a Torino, più la piccola parte che è a Mantova, più il codice d'Asti, formino tutto e compiutamente l'antico archivio del Monferrato, esclusi s'intende i 58 protocolli. Infatti, il fondo Torinese che si trova ora in quell'Archivio di Stato (Classe IX. Paesi. Monferrato Ducato già Marchesato, 934-1708, e per un' altra parte da quanto appare confrontando l'inventario sommario datone da Nicomede Bianchi (1) con gli elenchi delle varie spedizioni, nella Sezione III di esso Archivio) risponde agli elenchi stessi, anzi conserva evidente la traccia dei diversi versamenti, non ostante lavori di riordinamento che, eseguiti più tardi, possono avere in certo modo fatta smarrire la nozione delle condizioni reali di questo fondo. La cui identità con l'antico archivio del Monferrato è più che provata dal fatto che nell'indice redattone dal Lanzoni nel 1728, quando cioè esso archivio si trovava ancora a Mantova, si riscontrano indicati documenti che, per dire dei più numerosi, il Moriondo pubblicò poi ne' “ Monumenta Aquensia „ e i compilatori degli “ Historiae Patriae Monumenta „ diedero nei tomi “ Chartarum „, l'uno e gli altri traendoli dai R. Archivi di Torino (2). S'aggiunga

---

(1) *Le carte degli Archivi piemontesi*, pag. 40.

(2) Il Moriondo indica, com'è noto, d'onde trae i suoi documenti, ed io ne rinvenni in una scorsa sommaria circa 15 che, contenuti negli elenchi di spedizione e nell'indice Lanzoni, sono da lui editi con l'espressa men-

che confrontando il detto indice Lanzoni coi brevi cenni dati da Nicomede Bianchi nel suo volume su " Le materie politiche relative all'estero degli Archivi di Stato Piemontesi ", dei documenti relativi a quelle materie contenuti in categorie diverse da quelle di *Negoziazioni e trattati* — che erano naturalmente la fonte più diretta per l'opera sua — e più precisamente di quelli contenuti nella categoria del *Monferrato* (1), è facile riscontrare che ci troviamo davanti allo stesso fondo archivistico. Del resto, gli inventari delle scritture del Ducato di Monferrato che il Bianchi stesso ci insegna esistenti a Torino (2), rispondono pienamente per la parte sufficientissima ch'ebbi modo di conoscerne (3) agli elenchi di spedizione più volte ricordati, e questi a loro volta al detto indice Lanzoni. La importanza del quale, solo naturalmente pei documenti fino al 1606, diviene per questi confronti grandissima pel fatto del carattere troppo sommario soprattutto del 3° elenco (per numero di pezze il più ragguardevole) della spedizione del 1776: avendo natura di elenco addizionale al 1°, porta solo indicato in modo generico il titolo d'ogni filza e il numero delle pezze contenute in ciascuna.

Non sarebbe anzi neppur stato il caso di parlare dell'identità di questi documenti col fondo torinese, ove, come avvertii, non

---

zione d'averli tolti dai Regi Archivi di Torino. Basti per tutti il doc. che è per una metà, che restò naturalmente ignota, all'Archivio Gonzaga (V. il n° 22 dell'indice che do qui appresso) e per l'altra metà a Torino, d'onde il Moriondo la trasse per darne un estratto nel vol. II, col. 650, n° 79. Pei *Mon. Hist. Patriae*, nel tomo I *Chartarum*, il n° 836, col. 1244 è indicato come tolto dal R. Archivio di Corte, Ducato del Monferrato, Feudi, Alba, m. 2, n. 5; nel tomo II i n[i] 1718 col. 1228, 1787 col. 1323, 1853 col. 1434, 1847 col. 1425, 1884 col. 1485, sono indicati come tolti dai Regi Archivi di Corte. Tutti questi documenti trovano un riscontro negli elenchi di spedizione o nell'indice Lanzoni. Di più i doc. n[i] 1000, 1009, 1010, pubblicati in appendice al Codice Malabayla come tolti " e regio Taurinensi tabulario ", sono pur ricordati nei detti elenchi o nell'indice. Così dicasi del doc. pubblicato dal WINKELMANN, *Acta imperii inedita*, I, pag. 527, n° 661, indicato come tolto dall'Archivio di Stato di Torino, Monferrato, diplomi 1164-1573, mazzo 1, ecc.

(1) Pagg. 119-25, 213-15, 242-3, ecc., ecc.

(2) *Le carte*, ecc., cit., pag. XXVI.

(3) Ringrazio pubblicamente l'egregio amico dott. Giacomo Sella, archivista a Torino, che mi fu largo in questo argomento di copie e d'informazioni preziose.

fosse ben nota la strana credenza di molti dotti che supposero l'antico Archivio del Monferrato addirittura perduto; o almeno, com'è facile ingrandire colla fantasia quanto non è di fatto constatabile, quello che del Monferrato a Torino pur si vedeva e si studiava ritennero una parte minima superstite di chissà quale immensa mole di documenti. Ora, se pensiamo che quel piccolo Stato cessò di vivere di vita autonoma in principio del cinquecento, proprio allora cioè che le numerose corrispondenze d'ogni parte d'Italia e di fuori andavano a formare il grosso degli archivi delle altre case principesche (una buona metà dell'Archivio Gonzaga, ad esempio, è formata dalle corrispondenze dall'estero, e tra esse quelle del cinquecento sono la parte di gran lunga maggiore), dobbiamo pur concludere che la somma degli enumerati versamenti, più i pochi atti sparsi a Mantova ed Asti, è tale da non dar ragione alcuna di supporre una perdita maggiore di quella già constatata dei 58 protocolli dei notai segretari marchionali (1). Chiudo la facile dimostrazione del mio assunto ricordando una osservazione già fatta: per gli atti fino al 1606 gli incaricati della separazione dei documenti Monferrini dai Gonzagheschi trovarono il lavoro naturalmente già fatto, perchè gli atti portati da Casale e quelli di parecchio tempo poi, erano ancora in blocco ed a sè. L'opera loro si ridusse dunque probabilmente a compilare l'elenco di quegli atti, e non poterono quindi far entrare in essa, a detrimento de' diritti sabaudi, nè la loro incapacità ad una scelta veramente difficile, nè le loro intenzioni più o meno soggette all'influenza dei sentimenti che, sulla questione, si nutrivano dal Governo di Vienna.

---

(1) Ebbe larga occasione di fruirne Benvenuto S. Giorgio, che è certo la maggior fonte per lo studio di essi: così ampia, che un'accurata indagine ci dimostrerebbe men grave la perdita dei protocolli originali. Noto del resto che l'inventario della parte di protocolli di notai del Monferrato che trovasi in Torino, è del tutto incompleto e che quindi lo studio di questa speciale questione richiederebbe un preventivo minuto esame di quanto colà esiste di fatto.

Indice sommario dei documenti già d'appartenenza dell'Archivio del Monferrato che ancora si trovano nell'Archivio Gonzaga (*).

1. — " Flos Florum „. Cronaca Milanese. Ms. di carte 245, sec. XV, principio (1).
2. — Alberi genealogici dei Monferrato e dei Gonzaga (2).
3. — " Gasparis Sciopij Caesarei et Regii Consiliarii stemma Gonzagicum „. Mazzo di fogli a stampa (3).
4-5. — Due pergamene intitolate: " Progenitores paterni et progenitores materni Vincentii ducis Mantuae et Montisferrati „ (3).
6. — 1155, sett. 1. Vercelli. Vunicio vescovo di Vercelli investe Guglielmo march. di Monferrato del castello e fondo di Trino. Originale (4).
7. — 1156, giug. 17. Wirzburg. Federico I imperatore conferma al march. Guglielmo l'investitura di cui al doc. prec. Originale e copia 1316 (Stumpf, *Die Reichskanzler*. II, n° 3744).
8. — 1159, genn. 12. Torino. Federico I imperatore conferma al chiostro di S. Michele Arcangelo e dei SS. Genuario e Bononio tutti i suoi possessi. Copia 1452 (5) (Stumpf, *Reichsk.*, III, n° 349).
9. — 1165, mag. 21. Mombello. Rodulfus qd. Robaldi de Montebersario dona alla contessa Iuda, moglie del march. Guglielmo di Monferrato, tutti i suoi immobili posti in Montebersario, Villiano, Malamorte, e riceve da lei l'investitura in retto feudo delle prime due terre. Originale.

(*) Della spettanza reale di qualcuno all'Arch. del Monferrato, può dubitarsi. Di fatto, questi sono i documenti che erano già pronti per l'invio. e, dimenticati, com'è detto nel testo, rimasero a formare un gruppo a sè, Da esso furono recentemente tolti alcuni pochi atti che vi erano stati annessi evidentemente per errore.

(1) Sede, D, XIII. V. Arch. Muratoriano, vol. I, fasc. 3°, 1906. L'appartenenza di questo e dei segg. numeri 2, 3, 4, all'Arch. del Monferrato è stabilita dal trovarsi ricordati nell'inventario Lanzoni, di cui vedi più sopra.

(2) Sede, D, I, 1 e 2. Il loro numero non è precisabile, confusi come sono coi Gonzagheschi.

(3) Sede, D, I, 1.

(4) Questo e i seg. documenti scorporati da una miscellanea in sede E, LIV, 5, furono recentemente messi in sede propria col titolo: Archivio del Monferrato.

(5) Pergamena mutila: non resta che la metà destra. Nella stessa è il doc. del 1241 qui registrato al n° 27.

10. — 1176, lug. 10. Anagni. Alessandro III papa concede alla chiesa e monastero di Vezzolano l'osservanza della regola di S. Agostino, e ne conferma i possessi. Copia 1485.

11. — 1179, sett. 29 - 1180 febbr. 2. Acquapendente o Montefiascone. Patti della liberazione dell'arcivescovo Cristiano di Magonza, prigione dei march. di Monferrato. Copia sincrona (*Miscell. Stor. Ital.*, S. III, t. XIII, 1908).

12. — 1186, mar. 5. Novara. Federico I imperatore concede ai conti di Radicate, signori di Coconato, varî beni. Copia 1509 (Stumpf, III, nº 171, ma da conferme di Massimiliano II (1574) e Rodolfo II (1585), dell'Arch. di Vienna).

13. — 1190, lug. 30. Alba. Ydo da Tortona, giudice, per precetto dei castellani Siinfredus de Gavio e Thoma de Nun, aggiudica a Enrico marchese de la Dona il castello di Cinglo, usurpatogli da Anselmo de Cinglo. Originale.

14. — 1195, genn. 3. Feliciano. Berardus Benedictus de Ast, Obertus Costa, Rufinus Belsserius, Urellus Bergognonus e Robaldus Vaca, vendono a Guglielmo, figlio del march. Bonifacio di Monferrato, ogni loro ragione sul castello di Feliciano, per 2000 lib. di moneta genovese. Originale e copia 1311.

15. — 1197, mag. 13. Alba. Il vescovo Ogerio affida la guardia del bosco " castagnolarum „ al comune d'Alba che da lui l'aveva in feudo. Copia sec. XVI. V. nº 30.

16-17. — 1197, sett. 28 - ott. 1. Alba. Il popolo d'Alba concede la cittadinanza agli uomini di Diano, e " Guarene, Rodeli, Rodi, Piani, Verduni „. Copie sec. XVI. V. nº 30.

18. — 1201, mar. 8. Milano. Ruffinus giudice de Marcenasco e Loterius, procuratori della città d'Alba nella lite contro Ogerio vescovo d'Alba, alla presenza di Filippo arcivescovo di Milano, temendo ch'egli abbia a dire alcunchè di contrario al loro Comune, se ne appellano alla sede Apostolica. Copia sec. XVI. V. nº 30.

19. — 1201, apr. 14. Milano. Drocus Palius, Ruffinus de Marcenasco, Ogerius giudice, procuratori d'Alba ad udire la sentenza di Filippo arcivescovo di Milano, nella lite della loro città contro Ogerio vescovo d'Alba, all'inizio della lettura di essa, temendone danno per Alba, appellano alla sede Apostolica. Copia sec. XVI. V. nº 30.

20. — 1216, febbr. 26. Ceva. Patti tra Guglielmo di Ceva e Guglielmo di Monferrato di reciproco aiuto contro Enrico march. di Savona. Originale.

21. — 1217, febbr. 26. Asti. Transazione tra Guglielmo march. di Monferrato e Enrico march. di Savona per la proprietà " Crucisfereae, Cingi, Rochae de Vignalis, Arguelli, Bozolasci, Mellae „. Originale.

22. — 1220, ott. 23 (7 e 26 nov.?). Esame testimoniale sul possesso di Castelletto, già di Guglielmo di Palude. Originale (1).
23. — 1226, lug. Borgo S. Donnino. Federico II imperatore comunica al podestà e consiglio d'Alba, il bando contro i Lombardi. Originale. (Erano noti finora solo gli esemplari mandati ai Cremonesi, ai Cumani, agli Astigiani, agli Imolesi. *Mon. Germ. Hist. Constitutiones*, II [Weiland], pag. 136, n° 107).
24-26. — 1228, mar. 8-13. Milano. Disposizioni prese dal Consiglio del Comune per l'esecuzione della sentenza arbitrale dal Comune stesso emanata sulle discordie tra Alessandria, Asti, Genova, Tortona e Torino; ed atti conseguenti del Podestà. Copia sincrona.
27. — 1241, ag. Conferma del privilegio di cui al n° 8.
28. — 1270, lug. 5. Alba. Frater Simon vescovo d'Alba investe Bergognum de Marcenasco della metà delle decime de' suoi beni in Marcenasco " seu Murre ". Copia sec. XVI. V. n° 30.
29. — 1282, dic. 24. Alba. Il podestà e il Consiglio d'Alba nominano Paganus Alerius loro procuratore per la cessione della città al march. Guglielmo di Monferrato. Originale.
30. — 1283, genn. 26. Gli Albesi donano la loro città al march. Guglielmo di Monferrato. Originale (*Hist. Pat. Mon. Chart.*, II, col. 1684, ma da copia del 1533). Più due copie in pergamena e due in carta, la seconda delle quali (sec. XVI) è un quadernetto di 8 fogli che contiene anche copia semplice dei doc. n[i] 15 16, 17, 18, 19, 28, 32.
31. — 1303, sett. 28. Aversa. Dedizione d'Alba al re di Sicilia. Originale.
32. — 1322, dic. 29. Alba. Il vescovo d'Alba investe Filippo Rufinengus de Neveis di terza parte delle decime di Neveae. Copia sec. XVI. V. n° 30.
33. — 1331, lug. 19. Tortona. Gli anziani della parte superiore di Tortona nominano Francesco de Hosmeriis loro procuratore generale presso il march. Teodoro di Monferrato. Originale.
34. — 1333, apr. 8. Chivasso. Teodoro march. di Monferrato confessa d'aver ricevuto a mutuo da Filippo, Lucio e Valenzano de Tilio, fratelli, una somma di danaro. Copia di poco posteriore all'originale.
35. — 1363, nov. 23. Aversa. Jacobo, re di Maiorca, nomina Elisabetta marchesa di Monferrato e discendenti a succedergli se egli morrà senza figli. Originale.

---

(1) Frammentario. Il resto è a Torino, e fu dato in estratto dal Moriondo nei *Monumenta Aquensia*, II, col. 650.

36. — 1381, sett. 3. Verduno. Ludovico vescovo d'Alba nomina Antonio Tagliaferrus de Ceva suo procuratore a ratificare la tregua tra Galeazzo Visconti, Ottone di Brunsvich e Giovanni march. di Monferrato e fratelli. Originale.

37. — 1381, sett. 4. Arquata. Luchexius de Spinollis de Lucullo ratifica la tregua di cui al doc. prec. Originale.

38. — 1383, giu. 29. Bestagno. Capitoli tra Teodoro march. di Monferrato e il vescovo d'Acqui per la cessione al primo di Bestagno, Castelletto, Ronco Gennaro. Copia sincrona.

39. — 1394, nov. 27. Asti. Inclusione di Amedeo di Savoia principe d'Acaia nella lega tra il duca d'Orléans e il march. Teodoro di Monferrato. Originale.

40. — 1394, dic. 9. Chambéry. Amedeo di Savoia ratifica l'atto di cui al doc. prec. Originale e copia sincrona.

41. — 1396, apr. 2. Pinerolo. Salvacondotto del principe d'Acaia a genti del march. di Monferrato pel passaggio sui suoi dominii. Originale.

42. — 1396, lug. 26. Saluzzo. Tommaso march. di Saluzzo ratifica la lega col march. di Monferrato. Originale.

43. — 1397, ag. 12. Pinerolo. Il principe d'Acaia nomina i suoi aderenti che intende includere nella tregua col march. di Monferrato. Originale.

44. — 1397, ag. 15. Moncalieri. Il march. di Monferrato ratifica la nomina di G. G. Visconti ad arbitro nelle sue controversie col principe d'Acaia. Minuta.

45-56. — 1397, ag. 22 - 1401 dic. 9. Ratifiche di vari aderenti alla tregua tra il march. di Monferrato e il principe d'Acaia. Originali.

57. — 1397, ag. 30. Nota di ratifiche spedite dal march. di Monferrato al principe d'Acaia. Minuta.

58. — 1399, ott. 10. Doliano. Tregua tra il march. Teodoro di Monferrato e il principe d'Acaia. Originale.

59. — 1399, ott. 29. Chambéry. Ratifica da parte del principe d'Acaia dell'atto di cui al doc. prec. Originale.

60. — 1401, nov. 29. Curaci. Il capitano generale *citra montes* di Amedeo di Savoia promette di sospendere rappresaglie e offese contro il march. di Monferrato. Originale con sigillo pendente.

61. — 1401, dic. 20. Amedeo di Savoia sospende le rappresaglie di cui al doc. prec. Originale.

62. — 1402, mag. 22. Ponzone. Ugetus march. di Ponzone ratifica la tregua conclusa il 29 apr. tra gli Scarampi e Galeotto del Carretto. Originale.

63. — 1402, ott. 4. Castelletto. Procura di Theramus Antoniotto Adorno per ricevere dal march. di Monferrato l'investitura di Castelletto Val d'Orba. Originale.

64. — 1403, giu. 13. Parigi. Ratifica da parte del duca d'Orléans della lega fatta coi Savoia e i Monferrato. Originale.

65-67. — 1403, dic. 16; 1404 genn. 16; mar. 8. Mandati del march. Teodoro di Monferrato per far lega coi duchi di Milano. Copia 1533.

68. — 1405, lug. 10. Moncalvo. Teodoro di Monferrato ratifica i patti stretti con Lucia, vedova di Henrietus Turcus de Montemagno, pei suoi diritti su Montemagno. Originale.

69. — 1405, lug. 19. In campo, tra Grassino e S. Raffaele. A nome del conte di Savoia, il principe d'Acaia promette a Teodoro di Monferrato che per la tregua recentemente conclusa coi Signori di Milano e Pavia e con Facino Cane, non nominerà alcun aderente che abiti da Pavia e Novi in qua, salvo Antonio de' Fieschi. Originale.

70. — 1405, lug. 24. Rosate. Giov. Maria duca di Milano ratifica la tregua di cui al doc. prec. Originale.

71. — 1405, ag. 10. Messerano. Antonio de' Fieschi conte di Lavagna ratifica la tregua di cui al doc. prec. Originale.

72-76. — 1407, mar. 23 - apr. 18. Lega e parentado stretti tra Amedeo di Savoia e il march. di Monferrato. Ratifiche e atti inerenti. Originali con sigilli.

77. — 1407, ott. 22. Castelletto Val d'Orba. Theramus de Adurnis ratifica una proroga di termine concessa al march. di Monferrato per redimere Castelletto. Originale.

78. — 1409, genn. 15. Villa Pontis. Luchino del Carretto ratifica una lega stretta per lui dallo zio Manfredo con Teodoro di Monferrato. Originale.

79. — 1411, apr. 22. Chivasso. Lodovico di Savoia principe d'Acaia e Teodoro di Monferrato ratificano la pace conclusa l'8 aprile dai loro procuratori. Originale.

80. — 1413, giug. 1. Pavia. Capitoli della lega conclusa tra Filippo Maria duca di Milano e il march. di Monferrato. Originale.

81. — 1414, giug. 26. Trino. L'imperatore Sigismondo raccomanda ai nobili della parte superiore di Lombardia di assistere e aiutare il march. di Monferrato, di obbedirgli, e di rimettere in lui le loro contese. Originale.

82. — 1430, mag. 23. Trino. Permuta di Montebello con Trino, fatta tra il march. di Monferrato e la sorella Sofia. Originale.

83. — 1432, mag. 11. Milano. Amedeo di Savoia stabilisce la pace fra Gian Giacomo march. di Monferrato e Filippo Maria duca di Milano. Originale.

84. — 1445, apr. 11. Castelletto Val d'Orba. Theramus Adorno nomina il figlio Antoniotto suo procuratore a ricevere l'investitura di Castelletto dal march. di Monferrato. Originale.

85. — 1445, lug. 19. Il prefetto dei ducali archivi di Milano, Agostino Lanizario, attesta che da un documento colla data emarginata risulta che i marchesi d'Incisa erano compresi tra gli aderenti nominati da Filippo Maria duca di Milano. Originale.

86. — 1445, sett. 9. Lodovico di Savoia raccomanda a' suoi ufficiali l'osservazione di certe norme avanti di restituire rappresaglie dei sudditi del march. di Monferrato. Originale.

87. — 1456, ott. 8. Milano. Rinunzia di Tommaso de Moronis e investitura a Guglielmo di Monferrato del feudo di Rivofrancore da parte di Francesco Sforza. Copia 1483.

88. — 1461, sett. 3. Casale. Giovanni march. di Monferrato riceve in deposito da Mentia del Carretto 1300 ducati d'oro. Originale.

89. — 1465, sett. 24. Gasto principe di Navarra manda la figlia Maria come sposa al march. di Monferrato. Originale.

90. — 1477, genn. 24. Vienna. Federico III imperatore dichiara Plancate e Saletta feudi imperiali. Originale (resta la sola metà inf.).

91. — 1477, nov. 26. Milano. Bona duchessa di Milano rinnova al march. Guglielmo di Monferrato la investitura di Cassine, Felizzano e Rifrancore. Originale.

92-93. — 1479, mar. 17. S. Sebastiano. Permuta del priore di Neviliano con Guglielmo di Monferrato, e conferma del fratello Bonifazio 1484, dic. 30. Casale. Originale.

94. — 1481, giu. 25. Chivasso. Conferimento di priorato a un canonico di S. Maria di Vezzolano. Originale.

95. — 1483, mag. 25. Roma. Bolla di Sisto IV di conferma dell'investitura fatta da Guglielmo di Monferrato a Giovanni della Rovere di Bestagno e Monastero. Originale.

96. — 1483, lug. 7. Casale. Bonifacio di Monferrato concede alcune terre al priore di Nevilliano in compenso di una permuta da lui fatta con Guglielmo, fratello d'esso Bonifacio. Originale.

97. — 1483, ott. 11-19. Milano. Gian Galeazzo Sforza rinnova l'investitura di cui al n° 91. Originale.

98. — 1490, sett. 30. Casale. Petizioni dei march. di Saluzzo e risposte di Bonifacio di Monferrato riguardo a doti e a cessioni di terre. Copia 1533.

99. — 1491, genn. 31. Roma. Innocenzo VIII concede a Albertino de Gallis canonico di Vercelli il priorato di S. Pietro di Neviliano. Originale (bolla).

100-101. — 1492, sett. 10. Casale; 24. Sul confine d'Alba; 1493, apr. 3. Casale. Permute di terre tra Rogeronus conte di Cellano e il march. Bonifacio di Monferrato. Originali.

102. — 1493, giug. 1. Lynntz. Federico III imperatore concede ai march. di Monferrato di acquistar feudi dai vassalli e confiscare quelli dei delinquenti. Originale.

103. — 1493, ott. 11. Saluzzo. Ratifica e testo della lega tra i marchesi di Saluzzo e Bonifacio di Monferrato, Copia sec. XVI.

104. — 1495, nov. 24. Roma. Alessando III papa conferma a Bartolomeo della Rovere il diritto di elezione dei parroci di Bestagno e Monastero. Originale.

105. — 1503, ott. 2. Calizzano. La comunità di Calizzano concede un mutuo ai Del Carretto. Originale.

106. — 1508, apr. 15. Casale. La città d'Alba dona 2000 fiorini al march. di Monferrato. Originale e copia sec. XVI.

107. — 1512, nov. 18. Landaw. L'imperatore Massimiliano investe i condomini di Coconato conti di Radicate, di Coconato e altre terre. Originale.

108. — 1514, mar. 30. Genova. Ratifica di Gio. Battista Sauli di un contratto fatto per procuratore col march. Guglielmo di Monferrato. Originale.

109-115. — 1514, giug. 13-1521, giug. 16. Dichiarazioni d'incaricati d'aver ricevuto a titolo di segreta pensione dovuta a vari particolari dei Cantoni di Unterwalden e Uri, una somma di fiorini d'oro del Reno dai march. di Monferrato. Originali.

116. — 1526, apr. 21. Clemente VII riconosce il castello *Villacii* e Guarena in feudo a Ottone di Brunsvich. Bolla originale.

117. — 1526, sett. 12. Carlo di Borbone dirama un transunto di lettera di Carlo V che annuncia la guerra colla Francia. Originale stampato e copia sincrona.

118. — 1526, sett. 19. Milano. Carlo di Borbone prescrive alle sue milizie il rispetto dei territori del march. di Monferrato. Originale.

119. — 1529, dic. 8. Bologna. Bolla di Clemente VII per la prepositura di Frassineto di giuspatronato del march. di Monferrato. Originale.

120. — 1534, nov. 28. Torino. Francesca de Lacerda riconosce di dovere a Gian Giacomo marchese d'Incisa 4000 scudi d'oro del sole. Originale.

121. — 1536, nov. 7. Bruxelles. Carlo V concede una pensione a Giovanni di Premont per essersi messo al suo servizio e dipendenza. Origin.

122. — 1537, mag. 30. Roma. Breve di Paolo III alla march. Anna di Monferrato, perchè rimandi Giovanna Orsini Gonzaga che era presso di lei. Originale.

123. — 1541, dic. 19. Ferrara. Un procuratore di Giulia d'Aragona si dichiara per lei soddisfatto di 2000 scudi d'oro dal duca di Mantova. Originale.

124-126. — 1561, genn. 4-lug. 21. Decreti cesarei e transunti dei medesimi in una causa tra il duca di Mantova e i conti di Lodrone. Un originale e due copie.

127. — 1561, ott. 2. Asti. Gian Luigi march. di Saluzzo refuta vari feudi a Margherita Paleologa e al duca di Mantova. Originale con sigillo pend.

128. — 1562, genn. 31. Rivoli. Emanuele Filiberto conferma un suo delegato alla *conservatoria* di diritti di Anna d'Alençon su derivazioni d'acqua. Originale con sigillo pend., e copia 1590.

129-130. — 1562, febbr. 6-10. Atti del Senato e Camera Ducale Sabaudi per le stesse ragioni del doc. prec. Originali.

131. — 1562, dic. 16. Roma. Pio IV concede a Federico Gonzaga nominato governatore del Monferrato l'esercizio della giurisdizione criminale anche per la parte incompatibile con la sua qualità d'ecclesiastico. Breve originale.

132. — 1566, ott. 29. Roma. Pio V dichiara che la minaccia di privazione degli Stati fatta al duca di Mantova non pregiudica i diritti di Margherita Paleologa sul Monferrato. Breve originale.

133. — 1568, dic. 14. Roma. Pio V assolve il duca di Mantova dalle pene ecclesiastiche in cui sarebbe incorso per aver imposto nuove gabelle sul Monferrato. Breve originale.

134. — 1569, mar. 10. Roma. Pio V ringrazia il duca di Mantova d'aver concesso alle milizie papali di raccogliersi in vari luoghi del Monferrato. Breve originale.

135-137. — 1571, ag. 28-9; 1580, apr. 25. Sulla investitura e diritti d'Isabella Gonzaga march. di Pescara su Calusio e territorio. Due originali e una copia.

138-140. — 1591, giug. 28-30. Diritti degli Alberigi in Fubine. Copie aut.

141-142. — 1592, lug.-sett. Dedizione d'Alba al duca di Mantova. Copie sincrone.

143. — 1593, nov. 18. Casale. Il vescovo di Casale nomina un titolare alla cappellania di S. Maria di Montemagno. Originale.

144. — 1594, lug. 12. Mantova. Lorenzo Cuppa cede al duca di Mantova certi suoi diritti rispetto a vari luoghi del Monferrato. Copia aut.

145. — 1598, ag. 5. Mantova. Il duca di Mantova ratifica un istrumento di procura fatto dal suo oratore in Milano per l'esercizio de' suoi diritti sulla eredità della contessa Violante di Lodrone (beni nell'Alessandrino). Copia aut.

146. — 1598, dic. 16. Mantova. Il duca di Mantova vende a Giovanni Giovachino di Passano conte d'Occimiano nobile genovese, le terre di Vulpiano, Verolengo e Blanzate. Copia sec. XVII.

147. — 1605, mar. 9. Mantova. Michele Perretti restituisce al duca di Mantova il marchionato d'Incisa. Copia di poco posteriore all'originale.

Relazione intorno alla Memoria del prof. Edmondo Solmi: *Leonardo da Vinci come precursore della embriologia.*

La Memoria intorno a cui riferiamo è dovuta ad uno dei più benemeriti studiosi di Leonardo, il prof. Edmondo Solmi, noto per molti altri lavori pregevolissimi condotti sulle carte Vinciane. Ora egli presenta un nucleo considerevole di passi finora inediti del Vinci, trascritti dalle carte di Windsor, e li illustra con la consueta accuratezza e competenza. Riguardano tali passi uno dei principali problemi onde fu agitata la mente dell'uomo, quello della generazione degli esseri.

Dopo un accenno all'importanza che hanno assunto a' nostri giorni gli studi Vinciani in Italia e fuori, in questo studio si tocca dello scarso valore degli scritti di coloro, che, prima di Leonardo si erano occupati di embriologia; si espongono le indagini del Maestro sulle uova degli uccelli e sulla generazione dei mammiferi, per terminare con alcune sue note acutissime sulla riproduzione delle piante, che il Vinci identifica, nelle sue leggi essenziali, a quella degli animali terrestri, acquatici ed aerei.

Non soddisfatto, peraltro, di questi trovati, il Maestro si volge a sezionare uteri di donne defunte in istato di gravidanza. Egli può così approfondire le sue conoscenze sull'apparato generatore, sul fenomeno della fècondazione e su quello, tanto importante, della gestazione, mostrando le trasformazioni che gli organi della donna subiscono e le principali metamorfosi del feto durante la vita endouterina.

Primo nel mondo, Leonardo fa uno studio esatto dei rapporti dell'embrione con gli organi che lo contengono; primo nel mondo, stabilisce in una serie di finissimi disegni e di note le modificazioni progressive del feto, ed indica la struttura e le funzioni dei lobuli placentari, del cordone ombelicale, della circolazione fetale, giungendo in fine a determinare la posizione del feto, le sue funzioni nervose, respiratorie, nutritive, assimilatrici e dissimilatrici, ecc. Leonardo tocca una gran quantità

di argomenti embriologici, tanto che il Solmi può affermare che a lui spettano, fra le altre, la scoperta dei follicoli detti di Graaf nelle ovaie e quella della struttura dell'*uraco*.

Importantissime sono le note di carattere psicologico intorno ai rapporti dell'anima materna con quella dell'embrione, che si svolge nel suo seno, e qui le pagine del Vinci assurgono talora a significazione poetica.

Sembra ai sottoscritti che la Memoria del Solmi possa essere di decoro alle nostre pubblicazioni accademiche. Col dare rilievo a manoscritti finora inesplorati e col commentarli dottamente, egli riesce a stabilire che in Leonardo si deve scorgere il fondatore dell'embriologia, e così aggiunge un nuovo titolo di gloria a Colui che si può, senza esagerazione, proclamare il più universale e profondo genio italiano.

A. Graf.
R. Renier, *relatore*.

L'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 13 Dicembre 1908.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: NACCARI, Direttore della Classe, SPEZIA, SEGRE, JADANZA, GUARESCHI, FILETI, PARONA, MORERA, FUSARI e CAMERANO Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Scusa l'assenza il Socio GUIDI.

Il Socio SPEZIA presenta in omaggio alla Classe le due note seguenti del Dott. L. COLOMBA.

1° *Escursione ai giacimenti di Brosso a Traversella;*

2° *Aloisiite. Nuovo idrosilicato dei tufi di Port Portal.*

Il Presidente comunica che il sig. Consalvo SANSONE ha inviato alla Segreteria un manoscritto intitolato: *Della immunità naturale collettiva o estinzione delle specie microorganiche nella lotta per l'esistenza negativa.*

Il Presidente delega i Soci FUSARI e CAMERANO ad esaminare il manoscritto sopradetto.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 20 Dicembre 1908.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Manno, Direttore della Classe, Rossi, Graf, Ruffini, Stampini, D'Ercole, Sforza e De Sanctis, Segretario. — Scusano l'assenza i Soci Carle e Chironi.

Viene approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, 6 dicembre 1908.

Il Presidente partecipa il decesso del Socio Emilio Brusa avvenuto in Roma il 14 dicembre 1908 e ne ricorda in brevi parole le alte doti d'animo e d'ingegno, la indefessa laboriosità, la profonda sapienza giuridica. Si delibera d'inviare alla famiglia le condoglianze dell'Accademia e di invitare il Socio Carle a tenere la commemorazione. Si dà comunicazione delle condoglianze pervenute all'Accademia.

Si comunica la lettera del Socio Savio in cui dichiarando di aver ricevuto la partecipazione del suo passaggio dalla categoria dei Soci nazionali residenti a quella dei non residenti, ringrazia il Presidente e l'Accademia dei sentimenti espressi in tale occasione a suo riguardo.

Sono presentati i seguenti libri offerti in omaggio all'Accademia dagli autori:

dal Socio nazionale Sforza il suo scritto intitolato: *Esuli estensi in Piemonte dal 1848 al 1859* (Modena, Ferraguti, 1908);

dal Socio straniero Wendelin Foerster; *Kristian von Troyes, Erec und Enide* herausg. von W. Foerster, zweite Aufl. (Halle a. S., Niemeyer, 1909).

L'Accademico Segretario: Gaetano De Sanctis.

Torino — Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e Reali Principi.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 27 Dicembre 1908.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Naccari, Direttore della Classe, Spezia, Segre, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Morera, Grassi, Fusari e Camerano Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Presidente presenta in omaggio alla Classe il seguente lavoro: *La sorgente minerale di Valle di Pompei*, del Socio corrispondente F. Bassani e del sig. A. Galdieri.

Il Socio Mattirolo presenta in omaggio a nome del Professore G. B. De Toni i lavori seguenti:

1° *Matteo Lanzi. Commemorazione*;

2° *Illustrazione del terzo volume dell'erbario di Ulisse Aldrovandi.*

Il Socio Foà presenta in omaggio: *Lavori dell'Istituto di Anatomia Patologica dell'Università di Torino.*

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° Dott. Amerigo Chicca: *Sulle equazioni integrali del Fredholm a nucleo simmetrico,* dal Socio D'Ovidio;

2° A. Garbasso e G. Fubini: *Sopra il problema più generale dell'ottica*, dal Socio Naccari.

Il Socio Peano, a nome anche del Socio Somigliana, legge la relazione intorno alla Memoria del Dott. T. Boggio, intitolata: *Sulla risoluzione intorno ad una classe di equazioni algebriche che si presentano nella Matematica finanziaria ed attuariale.* — La relazione favorevole è approvata, e la Classe con votazione segreta approva la stampa del lavoro del Dr. Boggio nei volumi delle *Memorie* accademiche.

Il Presidente informa la Classe dei lavori della Commissione per le onoranze ad Amedeo Avogadro e che Sua Maestà il Re ha concesso il suo alto patronato per le onoranze stesse.

LETTURE

Sulle equazioni integrali del Fredholm a nucleo simmetrico

Nota del Dott. AMERIGO CHICCA a Volterra.

In questa nota voglio indicare come si possano svolgere i punti essenziali della teoria delle equazioni del Fredholm a nucleo simmetrico, usando del metodo tenuto dal Poincaré nella sua celebre Memoria: *Sur les équations de la Physique mathématique* del " Circolo Matematico di Palermo „ (1894). Ci serviremo a tal fine del lemma dimostrato dal Korn nel 1907, in una Nota, che citeremo più avanti, e non ci occuperemo di quei teoremi più semplici, la cui dimostrazione è indipendente dai metodi seguìti per studiare le equazioni integrali.

§ 1.

Risoluzione dell'equazione del Fredholm.

Consideriamo l'equazione

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt \tag{1}$$

ove $f(s)$ sia una funzione data; $K(s, t)$ una funzione pure data, finita, continua nelle variabili s, t ed in esse simmetrica; λ un parametro. Sviluppata la funzione incognita $\varphi(s)$ in serie di potenze di λ, ossia posto

$$\varphi(s) = f^{(0)}(s) + \lambda f^{(1)}(s) + \lambda^2 f^{(2)}(s) + \dots, \tag{2}$$

affinchè la $\varphi(s)$ data dalla (2) soddisfi la (1), deve aversi il sistema

$$\begin{cases} f^{(0)}(s) = f(s) \\ f^{(i)}(s) = \int_a^b K(s, t) f^{(i-1)}(t)\, dt \, (i = 1, 2, 3, \dots) \end{cases} \tag{3}$$

da cui

$$\int_a^b \{f^{(i)}(s)\}^2 ds = \int_a f^{(i-1)}(s) f^{(i+1)}(s)\, ds,$$

ed anche (per un teorema di Schwarz)

$$(4) \qquad \int_a^b \{f^{(i)}(s)\}^2 ds \leqq \sqrt{\int_a^b \{f^{(i+1)}(s)\}^2 ds \int_a^b \{f^{(i-1)}(s)\}^2 ds}.$$

Ponendo in generale

$$W_{m,n} = \int_a^b f^{(m)}(s) f^{(n)}(s) ds,$$

si ha immediatamente dalle (3) che

$$W_{m,n} = W_{m+1,\, n-1}.$$

Dunque il valore di $W_{m,n}$ dipende solo dalla somma $m+n$ dei suoi due indici, cosicchè potremo scrivere:

$$W_{m,n} = W_{m+n}.$$

E la (4) diventa così:

$$(5) \qquad \frac{W_{2i}}{W_{2(i-1)}} \leqq \frac{W_{2(i+1)}}{W_{2i}} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Il rapporto $\frac{W_{2i}}{W_{2(i-1)}}$ cresce adunque col crescere dell' indice i; ma è facile vedere che resta inferiore ad una quantità finita. Infatti indicando con H^2 il valore massimo di

$$\int_a^b \{K(s,t)\}^2 dt,$$

si ricava dalle (3) per un teorema di Schwarz:

$$(6) \qquad |f^{(i)}(s)| \leqq H \sqrt{W_{2(i-1)}},$$

donde, quadrando e integrando fra a e b rapporto ad s, si ha:

$$\frac{W_{2i}}{W_{2(i-1)}} \leqq H^2 |b-a|;$$

quindi:

$$(7) \qquad \lim_{i=\infty} \sqrt{\frac{W_{2i}}{W_{2(i-1)}}} = c_1$$

dove c_1 è una costante finita. La serie

$$\sqrt{W_0} + \lambda\sqrt{W_2} + \lambda^2\sqrt{W_4} + \ldots \tag{8}$$

convergerà per $|\lambda| < \frac{1}{c_1}$ assolutamente e uniformemente, e altrettanto avverrà della (2) in virtù delle (6).

§ 2.

Teorema fondamentale.

Sia p un intero positivo; consideriamo il seguente sistema di equazioni integrali

$$f^{(\nu)}(s) = u_{\nu+1}(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) u_{\nu+1}(t)\, dt \tag{9}$$

$$(\nu = 1, 2, 3, \ldots, p-1).$$

Per $|\lambda| < \frac{1}{c_1}$ le funzioni incognite $u_{\nu+1}(s)$ sono date chiaramente dalle serie assolutamente e uniformemente convergenti

$$\left\{\begin{array}{l} u_2(s) = f^{(1)}(s) + \lambda f^{(2)}(s) + \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_p(s) = f^{(p-1)}(s) + \lambda f^{(p)}(s) + \ldots \end{array}\right. \tag{10}$$

Prendiamo adesso a considerare p costanti arbitrarie $\alpha_j (j = 1, 2, \ldots, p)$ e poniamo:

$$\alpha_1 \varphi(s) + \alpha_2 u_2(s) + \ldots + \alpha_p u_p(s) = v(s). \tag{11}$$

Moltiplicando ambo i membri delle (1) e (9) rispettivamente per $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$; indicando con $F(s)$ il primo membro, si ha, per la (11):

$$F(s) = v(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, v(t)\, dt. \tag{12}$$

Sviluppando $v(s)$ in serie di potenze di λ

$$v(s) = \sum_0^\infty{}_n\, v_n(s)\, \lambda^n, \tag{13}$$

che per quanto si è detto prima converge entro il cerchio di raggio

$$\lim_{i=\infty} \sqrt{\frac{\int_a^b \{ v_{i-1}(s) \}^2 ds}{\int_a^b \{ v_i(s) \}^2 ds}},$$

applicando il lemma di Korn (" Comptes Rendus ", 24 juin 1907) e le considerazioni svolte dal Poincaré nella Memoria citata, si trova che la (13) sarà, per una scelta opportuna delle costanti α_j, assolutamente e uniformemente convergente per $|\lambda| < \frac{1}{L_p}$, essendo L_p una costante che si può rendere piccola a piacere ingrandendo abbastanza il numero p.

Indicando con $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_p'$ i valori delle α_j corrispondenti a siffatta scelta, avremo dopo operata la sostituzione:

$$(14) \quad \begin{cases} v(s) = \alpha_1' \varphi(s) + \alpha_2' u_2(s) + \ldots + \alpha_p' u_p(s) \\ f^{(0)}(s) = \varphi(s) - \lambda u_2(s) + 0 + \ldots + 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f^{(p-1)}(s) = 0 + 0 + \ldots + u_{p-1}(s) - \lambda u_p(s). \end{cases}$$

E risolvendo rispetto a $\varphi(s)$ si ottiene:

$$(15) \qquad \varphi(s) = \frac{P_p}{D_p}$$

essendo

$$D_p = \begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' & \ldots & \alpha_p' \\ f^{(0)} & -\lambda & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f^{(p-1)} & 0 & \ldots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_p' + \lambda \alpha'_{p-1} + \ldots + \alpha_1' \lambda^{p-1}) (-1)^{p-1};$$

$$P_p = \begin{vmatrix} v & \alpha_2' & \alpha_3' & \ldots & \alpha_p' \\ f^{(0)} & -\lambda & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f^{(p-1)} & 0 & 0 \ldots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Quindi D_p è un polinomio intero in λ, a coefficienti costanti, di grado p. Riguardo a P_p, si osserva che $f^{(0)}, \ldots, f^{(p-1)}$ sono funzioni indipendenti da λ, e $v(s)$ è funzione olomorfa in λ per $|\lambda| < \frac{1}{L_p}$. Onde P_p è funzione olomorfa in λ per $|\lambda| < \frac{1}{L_p}$. Se ne deduce, prendendo p abbastanza grande, che $\varphi(s)$ è una funzione meromorfa in tutto il piano, e che essa può avere singolarità a distanza finita soltanto per i valori di λ corrispondenti alle radici delle equazioni $D_p = 0$ (valori eccezionali di λ, od anche poli della funzione $\varphi(s)$). In un cerchio di raggio *finito* la $\varphi(s)$ avrà poi un numero *finito* di poli, perchè un polinomio D_p ha un numero *finito* di zeri.

§ 3.

Valori eccezionali del parametro.

Si potrebbe dimostrare con tutta semplicità, p. es. seguendo il Picard (“ Circolo Matematico di Palermo „, 1907) e lo Schmidt (*Entwickelung willkürlicher Functionen nach Systemen vorgeschriebener*, Göttingen, 1905) che i poli della $\varphi(s)$ sono *reali*, e *semplici*, e che, anche facendo variare la $f(s)$ in tutti i modi possibili, in ogni intervallo finito viene a cadere al più un numero finito di *valori eccezionali* del parametro λ (valori cioè di λ che sono poli per la $\varphi(s)$). Noi ci accontenteremo di dimostrare il punto più delicato: che cioè esiste *almeno* un valore eccezionale di λ.

A tal fine osserveremo che dalla (6) segue che il raggio di convergenza della (2) non è minore di quello della (8). Dimostreremo che esso non può essere maggiore (per tutti i valori di s compresi fra a e b).

Se infatti per un valore μ di λ, per cui la (8) *diverge*, convergesse la (2), per un valore di $\lambda < \mu$ convergerebbe anche la

$$\{f^{(0)}(s)\}^2 + \lambda^2 \{f^{(1)}(s)\}^2 + \ldots$$

mentre divergerebbe anche la

$$\int_a^b \{f^{(0)}(s)\}^2 ds + \ldots = W_0 + \lambda^2 W_2 + \ldots$$

Presa una costante positiva Z grande ad arbitrio, esisterebbe un intero h tale che

$$W_0 + \lambda^2 W_2 + \ldots + \lambda^{2h} W_{2h} > Z,$$

ossia

$$\int_a^b f^{(0)}(s) \{ f^{(0)}(s) + \lambda^2 f^{(2)}(s) + \lambda^4 f^{(4)}(s) + \ldots + \lambda^{2h} f^{(2h)}(s) \} ds > Z.$$

Quindi anche la

$$f^{(0)}(s) + \lambda^2 f^{(2)}(s) + \ldots + \lambda^{2h} f^{(2h)}(s)$$

per un certo valore di h e per tutti i successivi sarebbe almeno in un punto s (variabile con h) più grande di una quantità scelta grande a piacere. Ora l'ultima espressione sopra scritta è la metà della somma dei primi $2h+1$ termini della serie (2) e dei primi $2h+1$ termini della serie che si deduce da (2) mutando λ in $-\lambda$. Quindi la somma dei primi $2h+1$ termini di una di queste due serie, almeno per un valore di s, sarebbe maggiore di una quantità scelta a piacere. Ciò che è assurdo, perchè queste due serie rappresentano per ipotesi due funzioni di λ prive di poli, e limitate (confronta la Memoria del LAURICELLA, *Sull'integrazione delle equazioni della propagazione del calore.* Roma, " Memorie della Società Italiana delle Scienze ", Tipografia R. Accad. dei Lincei, 1902, pag. 56).

§ 4.
Soluzioni eccezionali.

Chiamando $p_1(s)$ il residuo corrispondente al valore eccezionale λ_1, possiamo scrivere:

$$\varphi(s) = \frac{p_1(s)}{\lambda_1 - \lambda} + \sum_0^\infty {}_n \lambda^n w_n(s). \tag{16}$$

Per avere il secondo polo, basta confrontare le serie (16) e (2), e si ottiene:

$$\left\{ \begin{aligned} w_0(s) &= f^{(0)}(s) - \frac{p_1(s)}{\lambda_1} \\ w_i(s) &= \int_a^b K(s,t) w_{i-1}(t) dt \end{aligned} \right. \tag{17}$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots)$$

le quali sono analoghe alle (3). Con analoghe considerazioni si determina il raggio di convergenza della serie $\sum_{0}^{\infty}{}_n \lambda^n w_n(s)$ sul cui cerchio di convergenza esiste un secondo polo per la funzione $\varphi(s)$. Se dopo avere calcolato i primi i poli, le funzioni analoghe alle $w_i(s)$ delle (17) risultano tutte nulle, allora la funzione data $f(s)$ dell'equazione (1) è uguale ad una somma finita di *soluzioni eccezionali* $p_i(s)$ ed il nucleo $K(s,t)$ ha un numero finito di poli. Noi escludiamo questo caso di poco interesse.

§ 5.

Sviluppi in serie.

Immaginiamo che la funzione $f(s)$ della (1) possa mettersi sotto la forma

$$f(s) = \int_a^b K(s,t)\psi(t)\,dt \tag{18}$$

essendo ψ una qualunque funzione finita.

Dopo aver calcolato i primi i poli posti in successione generalmente crescente, operando come nel § precedente si ha:

$$\varphi(s) = \sum_{1}^{i}{}_r \frac{p_r(s)}{\lambda_r - \lambda} + \sum_{0}^{\infty}{}_s \lambda^s l_s \tag{18'}$$

dove

$$\left\{\begin{aligned} l_0(s) &= f(s) - \sum_{1}^{i}{}_r \frac{p_r(s)}{\lambda_r} \\ l_i(s) &= \int_a^b K(s,t)\, l_{i-1}(t)\,dt \end{aligned}\right. \tag{19}$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ponendo

$$l_{-1}(s) = \psi(s) - \sum_{1}^{i}{}_r p_r(s)$$

la seconda delle (19) vale anche per $i = 0$. Si ottiene, come sopra, posto $W_i = \int_a^b l_i^2(t)\,dt$,

$$\frac{W_0}{W_{-2}} \leqq \frac{W_2}{W_0} \leqq \frac{W_4}{W_2} \leqq \ldots \leqq \frac{W_{2i}}{W_{2(i-1)}} \leqq \frac{1}{\lambda_{i+1}}. \tag{20}$$

Ora possiamo dimostrare che è

$$(21) \int_a^b f(s)p_r(s)\,ds = \frac{1}{\lambda_r}\int_a^b \{p_r(s)\}^2\,ds, \text{ donde } \int_a^b p_r(t)\psi(t)dt = \int_a^b [p_r(s)]^2 ds.$$

Infatti poniamo p. es. $r = 1$. Allora la (21) diventa:

$$\int_a^b f(s)p_1(s)\,ds = \frac{1}{\lambda_1}\int_a^b \{p_1(s)\}^2\,ds$$

e la (18′):

$$(22) \qquad \varphi(s) = \frac{p_1(s)}{\lambda_1 - \lambda} + v(s, \lambda).$$

Poichè la funzione $v(s, \lambda)$ è convergente per $\lambda > \lambda_1$, esiste anche per $\lambda = \lambda_1$. Diventi in questo caso v_1. Sostituendo la (22) nella (1) si ha:

$$f(s) - \frac{p_1(s)}{\lambda_1} - v(s, \lambda) + \lambda\int_a^b K(s, t)\,v(t, \lambda)\,dt = 0.$$

Ma

$$-p_1(s) + \lambda_1\int_a^b p_1(t)\,K(s, t)\,dt = 0.$$

Integrando la penultima rapporto ad s fra a e b dopo aver moltiplicato per $p_1(s)$, e ponendo $\lambda = \lambda_1$, si ha, tenendo presente l'ultima:

$$\int_a^b p_1(s)\left\{f(s) - \frac{p_1(s)}{\lambda_1}\right\}ds - \int_a^b v_1(s)\,p_1(s)\,ds + \int_a^b v_1(t)\,p_1(t)\,dt = 0,$$

ossia

$$\int_a^b p_1(s)f(s)\,ds = \frac{1}{\lambda_1}\int_a^b \{p_1(s)\}^2\,ds \quad \text{c. v. d.}$$

Applicando dunque la (21) abbiamo:

$$W_{-2} = \int_a^b \{l_{-1}(s)\}^2\,ds = \int_a^b \left\{\psi(s) - \sum_1^i{}_r\, p_r(s)\right\}^2 ds =$$

$$= \int_a^b \left(\psi^2(s) + \sum_1^i{}_r\, p_r^2(s) - 2\sum_{r \neq \rho} p_r(s)\,p_\rho(s) - 2\sum_1^i{}_r\, p_r(s)\,\psi(s)\right) ds =$$

$$= \int_a^b \{\psi(s)\}^2\,ds - \sum_1^i{}_r \int_a^b \{p_r(s)\}^2\,ds \ (*).$$

(*) Il termine $2\sum\limits_{r \neq \rho} p_r(s)\,p_\rho(s)$ dà un contributo nullo, poichè, come è noto, si dimostra facilmente che le soluzioni eccezionali corrispondenti a diversi valori del parametro formano un *sistema ortogonale* (Cfr. SCHMIDT, l. c.).

Da questa relazione si deduce che W_{-2} decresce al crescere dell'indice i, e poichè λ_i cresce invece al crescere di i, così essendo, per le (20), $W_0 \leqq \frac{W_{-2}}{\lambda_{i+1}}$, abbiamo che W_0 tende a zero col tendere di i all'infinito.

Possiamo adunque scrivere:

$$\lim_{i=\infty} \int_a^b \left(f(s) - \sum_1^i {}_r \frac{p_r(s)}{\lambda_r} \right)^2 ds = 0,$$

donde, per un teorema di Lebesgue,

$$f(s) = \sum_1^\infty {}_r \frac{p_r(s)}{\lambda_r}$$

(quando si aggruppino convenientemente i termini del secondo membro) tranne al più in un gruppo di punti di misura nulla.

Sopra il problema più generale dell'ottica.

Nota di ANTONIO GARBASSO e GUIDO FUBINI.

(Con una Tavola).

§ 1. **Alcune semplici esperienze.** — I mezzi che danno origine al fenomeno del miraggio sono isotropi e non omogenei; hanno dunque delle proprietà, che dipendono dalle coordinate, ma non dalla direzione della trajettoria luminosa. E però i raggî in essi appariscono curvi in generale, e da un punto dato, in una data direzione, ne parte sempre uno solo.

I cristalli invece sono omogenei e (all'infuori del primo sistema) non isotropi; tutti i loro punti si equivalgono, ma direzioni diverse hanno per solito proprietà diverse. Le loro trajettorie sono sempre rettilinee, e di regola in ogni direzione ve ne sono due, caratterizzate da velocità differenti.

E l'una e l'altra categoria di mezzi è stata oggetto di infinite ricerche. Non pare invece che sia stato discusso finora il problema più generale, della propagazione della luce in un mezzo non isotropo e non omogeneo.

Eppure è facile ottenere sperimentalmente un corpo dotato ad un tempo delle due proprietà. Uno strato di gelatina, che venga messo a contatto con una soluzione, poniamo, di cloruro di zinco, appare infatti, quasi subito, isotropo e non omogeneo; uno strato simile, sottoposto ad azioni meccaniche, assume invece i caratteri ottici di un cristallo. E se la diffusione e la deformazione si fanno agire successivamente, il preparato dovrà risultare non isotropo e non omogeneo.

L'esperienza verifica infatti queste previsioni.

Uno strato di gelatina pura, in forma di parallelepipedo retto allungato, viene disposto fra le due lastre di una piccola morsa a vite, e assoggettato ad una compressione. Si colloca poi la gelatina fra due Nicol, in modo che la luce la attraversi, normalmente alle facce laterali non compresse.

Se i Nicol sono paralleli, e si fa girare il preparato fino alla posizione in cui le tinte assumono la massima vivezza, il campo chiaro presenterà, ad esempio, l'aspetto figurato nella figura 1 (vedi Tavola).

Girando adesso il Nicol analizzatore di 90°, i colori cambieranno, e la regione illuminata offrirà l'apparenza della figura 2.

Nell'uno e nell'altro caso il campo ha dunque una tinta generale uniforme, che si altera solo leggermente nelle porzioni più vicine alle lastre della morsa. Lo stesso punto presenta nei due saggî colori complementari.

Se si prendesse un altro campione di gelatina di uguale altezza e di diverso spessore, e lo si comprimesse nella stessa misura, il fenomeno non cambierebbe di aspetto, ma sarebbero modificate le tinte dominanti; invece che un rosa ed un verde si avrebbero, ad esempio, un giallo e un turchino.

Prendiamo ora un terzo parallelepipedo di gelatina, che sia stato qualche tempo, per una faccia laterale, in contatto con una soluzione di cloruro di zinco, e comprimiamolo, come prima, collocando quella faccia, che servì alla diffusione, in contatto con una lastra della morsa.

I colori di polarizzazione cromatica fra Nicol paralleli e fra Nicol incrociati (fig. 3 e 4) appariranno distribuiti in tutt'altro modo dal precedente. Le tinte cambiano infatti con continuità nel campo illuminato da lastra a lastra; appunto come se il preparato avesse in diverse regioni uno spessore diverso.

Quanto alle linee isocromatiche, esse sono costituite naturalmente dalle rette perpendicolari alla direzione comune della diffusione e della deformazione.

§ 2. **Proposta di una teoria.** — Riconosciuta così l'esistenza sperimentale di mezzi non isotropi e non omogenei, si presenta l'opportunità di assoggettarli al calcolo, per vedere di stabilirne qualche caratteristica meno ovvia.

Siano all'uopo x, y, z coordinate cartesiane ortogonali, e sia dato uno strato S limitato da due piani $z = \text{cost}$.

Noi supponiamo che S si comporti in ogni punto come un cristallo ad un asse, vale a dire che l'ellissoide di elasticità sia dappertutto nello strato un ellissoide di rotazione.

Supponiamo ancora

a) che gli assi polari dei detti ellissoidi siano sempre paralleli alla coordinata z;

b) che le lunghezze dei singoli assi (polari o no) siano funzioni della sola z.

Ammettiamo poi che per determinare la propagazione della luce in S si possa

a) considerare S come somma di n strati omogenei, S_i, a due a due adiacenti, limitati da piani $z = \text{cost.}$;

b) calcolare la propagazione in tale sistema di strati;

c) passare al limite per $n = \infty$.

E conveniamo da ultimo che il raggio incidente sia formato da un sistema di onde piane, scegliendo per semplicità l'asse delle y parallelo al piano d'onda. I sistemi di onde prodotti dalle successive riflessioni e rifrazioni saranno ancora sistemi di onde piane, col piano d'onda parallelo all'asse delle y.

Indicheremo con φ_i l'angolo, che la normale al piano d'onda nello i-esimo strato fa con l'asse delle z, e con V_i la velocità di propagazione per il sistema di onde corrispondente, nel senso normale al piano d'onda.

È ben noto che con queste notazioni

$$(1) \qquad \frac{\sin\varphi_i}{V_i} = h,$$

essendo h una costante, che dipende dai soli dati iniziali.

Siano adesso $\frac{1}{a_i}$, $\frac{1}{c_i}$ i semiassi dell'ellissoide elastico nello i-esimo strato, e propriamente sia $\frac{1}{c_i}$ il semiasse parallelo all'asse delle z.

Verrà

$$V_i = a_i, \tag{2}$$

oppure

$$\begin{aligned} V_i^2 &= a_i^2 + (c_i^2 - a_i^2)\sin^2\varphi_i, \\ &= c_i^2 + (a_i^2 - c_i^2)\cos^2\varphi_i, \end{aligned} \tag{3}$$

a seconda che si tratti di raggî ordinarî o straordinarî.

Dalla (1) $\cos\varphi_i$ è determinato a meno del segno; per tale equazione avremo dunque due sistemi possibili di onde, in ciascuno dei quali lo spostamento ha rispettivamente per coseni direttori

$$\begin{array}{ccc} -\cos\varphi_i \, . \, \cos\theta_i, & \sin\theta_i, & \sin\varphi_i \, . \, \cos\theta_i, \\ \cos\varphi_i \, . \, \cos\theta_i, & \sin\theta_i, & \sin\varphi_i \, . \, \cos\theta_i. \end{array}$$

Si dovrà porre poi, come è ovvio

$$\theta_i = 0, \tag{4}$$

oppure

$$\theta_i = \frac{\pi}{2}, \tag{5}$$

secondo che si tratta di raggî ordinarî o straordinarî.

Lo spostamento risultante avrà dunque per componenti le

$$\left\{ \begin{aligned} u_i &= -A_i\cos\varphi_i \, . \, \cos\theta_i \, . \, \sin O_i + B_i\cos\varphi_i \, . \, \cos\theta_i \, . \, \sin\Omega_i, \\ v_i &= A_i\sin\theta_i \, . \, \sin O_i + B_i\sin\theta_i \, . \, \sin\Omega_i, \\ w_i &= A_i\sin\varphi_i \, . \, \cos\theta_i \, . \, \sin O_i + B_i\sin\varphi_i \, . \, \cos\theta_i \, . \, \sin\Omega_i, \end{aligned} \right. \tag{6}$$

dove A_i e B_i sono le ampiezze dei due spostamenti parziali, e O_i e Ω_i sono le fasi corrispondenti, che saranno definite da equazioni del tipo

$$
(7) \quad \begin{cases} O_i = \left(x\dfrac{\sin\varphi_i}{V_i} + z\dfrac{\cos\varphi_i}{V_i} - t + D_i\right)\lambda = (hx - t)\lambda + \left(z\dfrac{\cos\varphi_i}{V_i} + D_i\right)\lambda, \\ \Omega_i = \left(x\dfrac{\sin\varphi_i}{V_i} - z\dfrac{\cos\varphi_i}{V_i} - t + \Delta_i\right)\lambda = (hx - t)\lambda - \left(z\dfrac{\cos\varphi_i}{V_i} + \Delta_i\right)\lambda. \end{cases}
$$

Nelle (7) λ è la costante 2π, per unità di tempo è stata scelta la durata delle singole vibrazioni, e le D_i e Δ_i sono costanti nell'ambito di ciascun strato [1].

§ 3. **Raggî ordinarî.** — Si deve porre

$$\theta_i = 0, \qquad V_i = a_i, \qquad v_i = 0;$$

e dalle (6) e (7) risulta:

$$
(8) \quad \begin{cases} u_i = L_i\cos(hx + t)\lambda + M_i\sin(hx - t)\lambda, \\ w_i = N_i\cos(hx - t)\lambda + P_i\sin(hx - t)\lambda, \end{cases}
$$

con

$$
(9) \quad \begin{cases} L_i = \cos\varphi_i(-A_i\sin C_i - B_i\sin\Gamma_i), \\ M_i = \cos\varphi_i(-A_i\cos C_i + B_i\cos\Gamma_i), \\ N_i = \sin\varphi_i(\quad A_i\sin C_i - B_i\sin\Gamma_i), \\ P_i = \sin\varphi_i(\quad A_i\cos C_i + B_i\cos\Gamma_i), \end{cases}
$$

$$
(10) \quad \begin{cases} C_i = \left(z\dfrac{\cos\varphi_i}{V_i} + D_i\right)\lambda, \\ \Gamma_i = \left(z\dfrac{\cos\varphi_i}{V_i} + \Delta_i\right)\lambda. \end{cases}
$$

Per le leggi delle riflessioni e rifrazioni le u_i e w_i devono essere continue nei piani di divisione fra strato e strato; se

$$z = z_{i-1}$$

è il piano che divide lo $(i-1)$-esimo dallo i-esimo strato, si ha dunque

$$(u_i)_{z=z_{i-1}} - (u_{i-1})_{z=z_{i-1}} = 0,$$
$$(w_i)_{z=z_{i-1}} - (w_{i-1})_{z=z_{i-1}} = 0.$$

---

[1] Kirchhoff, *Mathematische Optik*, 1891, pag. 219.

A parole, gli incrementi, che subiscono le u e w ponendo

$$\varphi_i,\ D_i,\ \Delta_i \text{ e } a_i$$

al posto di

$$\varphi_{i-1},\ D_{i-1},\ \Delta_{i-1} \text{ e } a_{i-1},$$

e *non facendo variare la* z, devono essere nulli.

Ma poichè ciò deve avvenire per ogni valore della x, della stessa proprietà godranno le L_i, M_i, N_i e P_i. In particolare sarà

$$(L_i)_{z=z_{i-1}} - (L_{i-1})_{z=z_{i-1}} = 0,$$

e quindi

$$(L_i)_{z=z_i} - (L_{i-1})_{z=z_{i-1}} = (L_i)_{z=z_i} - (L_i)_{z=z_{i-1}};$$

ossia, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore rispetto allo spessore dei singoli strati,

$$\frac{(L_i)_{z=z_i} - (L_{i-1})_{z=z_{i-1}}}{z_i - z_{i-1}} = \frac{(L_i)_{z=z_i} - (L_i)_{z=z_{i-1}}}{z_i - z_{i-1}},$$

$$= \cos\varphi_i(- A_i \cos C_i - B_i \cos\Gamma_i)\frac{\cos\varphi_i}{V_i}\lambda,$$

$$= -\frac{\cos^2\varphi_i}{V_i \sin\varphi_i}\lambda P_i.$$

Passando al limite le L, M, N e P diventano funzioni della sola z e si ottiene

$$\frac{dL}{dz} = -\frac{\cos^2\varphi}{V\sin\varphi}\lambda P,$$

$$(11) \qquad = -\frac{1 - a^2h^2}{a^2h}\lambda P,$$

e similmente

$$(11)' \qquad \frac{dP}{dz} = h\lambda L,$$

$$(12) \qquad \frac{dM}{dz} = \frac{1 - a^2h^2}{a^2h}\lambda N,$$

$$(12)' \qquad \frac{dN}{dz} = -h\lambda M.$$

Ma dalle (11) e (11)', (12) e (12)' segue subito che le N e P devono soddisfare alla

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = -\lambda^2 \frac{1 - a^2h^2}{a^2} \psi. \tag{13}$$

Lo studio dei raggî ordinarî è dunque ridotto alla integrazione della (13).

Se con ψ_1 e ψ_2 si indicano due integrali indipendenti di questa equazione, e con α_1, α_2, β_1 e β_2 quattro costanti, si potrà porre senz'altro

$$N = \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2,$$

$$P = \beta_1\psi_1 + \beta_2\psi_2,$$

$$L = \frac{1}{h\lambda}\left(\beta_1 \frac{d\psi_1}{dz} + \beta_2 \frac{d\psi_2}{dz}\right),$$

$$M = -\frac{1}{h\lambda}\left(\alpha_1 \frac{d\psi_1}{dz} + \alpha_2 \frac{d\psi_2}{dz}\right),$$

e quindi

$$\text{(I)} \quad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{1}{h\lambda}\left[(\beta_1\psi_1' + \beta_2\psi_2')\cos(hx - t)\lambda - \right. \\ &\qquad \left. - (\alpha_1\psi_1' + \alpha_2\psi_2')\sin(hx - t)\lambda\right], \\ w &= (\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2)\cos(hx - t)\lambda + \\ &\qquad + (\beta_1\psi_1 + \beta_2\psi_2)\sin(hx - t)\lambda. \end{aligned}\right.$$

Queste equazioni definiscono, nel caso attuale, quel sistema di onde, che è la più semplice generalizzazione dei sistemi di onde piane ordinarie dei mezzi omogenei.

§ 4. **Raggî straordinarî**. — Si deve porre

$$\theta_i = \frac{\pi}{2}, \quad V_i^2 = c_i^2 + (a_i^2 - c_i^2)\cos^2\varphi_i, \quad u_i,\ w_i = 0;$$

e dalle (6) e (7) risulta

$$v_i = Q_i \cos(hx - t)\lambda + R_i \sin(hx - t)\lambda, \tag{14}$$

con

$$\text{(15)} \quad \left\{\begin{aligned} Q_i &= A_i \sin C_i - B_i \sin \Gamma_i, \\ R_i &= A_i \cos C_i + B_i \cos \Gamma_i. \end{aligned}\right.$$

Ne segue

$$a_i^2 \frac{\partial v_i}{\partial z} = \lambda a_i^2 \frac{\cos\varphi_i}{V_i} [E_i \cos(hx - t)\lambda + F_i \sin(hx - t)\lambda], \tag{16}$$

dove si è posto, per brevità di scrittura,

$$\begin{cases} E_i = A_i \cos C_i - B_i \cos \Gamma_i, \\ F_i = - A_i \sin C_i - B_i \sin \Gamma_i. \end{cases} \tag{17}$$

Ricordando [1] che v_i e $a_i^2 \frac{\partial v_i}{\partial z}$ devono essere continue nel passaggio da strato a strato, troviamo che altrettanto deve avvenire per Q_i, R_i, $\lambda a_i^2 \frac{\cos\varphi_i}{V_i} E_i$, $\lambda a_i^2 \frac{\cos\varphi_i}{V_i} F_i$. Se dunque si applicano i metodi precedenti e si passa al limite, risulta

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{\cos\varphi}{V} \lambda E, \tag{18}$$

$$\frac{d}{dz}\left(a^2 \frac{\cos\varphi}{V} E\right) = - a^2 \frac{\cos^2\varphi}{V^2} \lambda Q, \tag{18)'$$

$$\frac{dR}{dz} = \frac{\cos\varphi}{V} \lambda F, \tag{19}$$

$$\frac{d}{dz}\left(a^2 \frac{\cos\varphi}{V} F\right) = - a^2 \frac{\cos^2\varphi}{V^2} \lambda R. \tag{19)'$$

Ma dalle (18) e (18)', (19) e (19)' segue subito che le Q e R devono soddisfare alla

$$\frac{d}{dz}\left(a^2 \frac{d\chi}{dz}\right) + a^2 \frac{\cos^2\varphi}{V^2} \lambda^2 \chi = 0,$$

ossia, per le (1) e (3), alla

$$\frac{d}{dz}\left(a^2 \frac{d\chi}{dz}\right) + (1 - c^2 h^2)\lambda^2 \chi = 0, \tag{20}$$

che per i raggî straordinarî ha l'ufficio che la (13) aveva nel caso dei raggî ordinarî.

---

[1] Kirchhoff, loc. cit., pag. 231.

Se con χ_1 e χ_2 si indicano due integrali indipendenti della (20), e con γ_1, γ_2, δ_1 e δ_2 quattro costanti, si potrà porre

$$Q = \gamma_1\chi_1 + \gamma_2\chi_2,$$
$$R = \delta_1\chi_2 + \delta_2\chi_2,$$

e quindi

$$\text{(II)} \quad v = (\gamma_1\chi_1 + \gamma_2\chi_2)\cos(hx - t)\lambda + (\delta_1\chi_1 + \delta_2\chi_2)\sin(hx - t)\lambda.$$

§ 5. **Considerazioni teoriche.** — Fra le tante forme che si possono dare alle equazioni dell'ottica, e che tutte sono equivalenti per i mezzi omogenei, è notevole il fatto che una continui a sussistere anche per i mezzi non omogenei.

La forma, cui si allude, valida per i corpi omogenei e per i non omogenei (almeno quando l'ellissoide di elasticità, in ogni punto è di rotazione, con l'asse parallelo all'asse delle z) è la seguente

$$\text{(21)} \quad \begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial Y}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial y}, \\[2ex] -\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{\partial Z}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial z}, \\[2ex] -\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial X}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial x}, \end{cases}$$

$$\text{(22)} \quad \begin{cases} X = a^2\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial y}\right), \\[2ex] Y = a^2\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial z}\right), \\[2ex] Z = c^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x}\right). \end{cases}$$

È facile infatti verificare che le u, v e w, definite dalle nostre formole (I) e (II), soddisfano alle (21) e (22), mentre non soddisfano ad altri sistemi, che pure equivalgono a questo nel caso dei mezzi omogenei [1].

---

[1] Ponendo

$$(hx - t)\lambda = \mu,$$

e sostituendo i valori (I) e (II) nella prima delle (21) risulta intanto:

Prescindendo da ogni interpretazione meccanica od elettromagnetica, è dunque da ritenere che la forma riportata è la forma *più naturale e più generale* che si possa dare alle equazioni dell'ottica. E questo resultato del nostro studio, che è stato ottenuto, ammettendo la *sola* teoria dell'ottica nei mezzi omogenei, e procedendo poi per via *puramente matematica*, non è forse privo di ogni interesse.

§ 6. **Il principio di Fermat.** — L'equazione $\frac{\sin\varphi_i}{V_i} = h$ ci permette di determinare la forma dei raggî nei mezzi or ora studiati. Usando le formole ben note dell'ottica, che collegano i coseni di direzione di un raggio coi coseni della normale al piano d'onda, si trova facilmente che l'equazione (1) equivale anche per il caso attuale a questo che *i raggî nell'attraversare*

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\cos\mu}{h\lambda}\Big[&(\beta_1\psi_1' + \beta_2\psi_2')\lambda^2 - (\beta_1\psi_1' + \beta_2\psi_2')\,a^2h^2\lambda^2 \\
&+ (\beta_1\psi_1''' + \beta_2\psi_2''')a^2 - (\beta_1\psi_1 + \beta_2\psi_2)\,h^2\lambda^2\frac{da^2}{dz} \\
&+ (\beta_1\psi_1'' + \beta_2\psi_2'')\frac{da^2}{dz}\Big] \\
-\frac{\sin\mu}{h\lambda}\Big[&(\alpha_1\psi_1' + \alpha_2\psi_2')\lambda^2 - (\alpha_1\psi_1' + \alpha_2\psi_2')\,a^2h^2\lambda^2 \\
&+ (\alpha_1\psi_1''' + \alpha_2\psi_2''')a^2 - (\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2)\,h^2\lambda^2\frac{da^2}{dz} \\
&+ (\alpha_1\psi_1'' + \alpha_2\psi_2'')\frac{da^2}{dz}\Big], \\
= \frac{\cos\mu}{h\lambda}\Big\{&\beta_1\frac{d}{dz}\left[a^2\psi_1'' + (1 - a^2h^2)\lambda^2\psi_1\right] \\
&+ \beta_2\frac{d}{dz}\left[a^2\psi_2'' + (1 - a^2h^2)\lambda^2\psi_2\right]\Big\} \\
-\frac{\sin\mu}{h\lambda}\Big\{&\alpha_1\frac{d}{dz}\left[a^2\psi_1'' + (1 - a^2h^2)\lambda^2\psi_1\right] \\
&+ \alpha_2\frac{d}{dz}\left[a^2\psi_2'' + (1 - a^2h^2)\lambda^2\psi_2\right]\Big\} = 0,
\end{aligned}
$$

in virtù dell'equazione (13). In queste formole si è posto $\frac{da^2}{dz}$ invece di $\frac{d(a)^2}{dz}$.

Alla sua volta la seconda delle (21) si verifica tenendo conto della (20), e la terza nuovamente in forza della (13).

i singoli strati seguono il cammino, che richiede minor tempo ad essere percorso (1).

---

(1) Studiamo p. es. i raggî straordinarî, e supponiamo dapprima il mezzo omogeneo. Con le notazioni fin qui seguite, i coseni direttori del raggio saranno proporzionali a

$$c^2 \sin\varphi, \qquad 0, \qquad a^2 \cos\varphi .$$

Indicandoli con ξ, η e ζ abbiamo dunque

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{c^2 \sin\varphi}{\sqrt{a^4\cos^2\varphi + c^4\sin^2\varphi}}, \\ \eta &= 0, \\ \zeta &= \frac{a^2\cos\varphi}{\sqrt{a^4\cos^2\varphi + c^4\sin^2\varphi}}. \end{aligned}\right.$$

Da queste risulta

$$\left\{\begin{aligned} \sin^2\varphi &= \frac{a^4\xi^2}{a^4\xi^2 + c^4\zeta^2}, \\ \cos^2\varphi &= \frac{c^4\zeta^2}{a^4\xi^2 + c^4\zeta^2}, \end{aligned}\right.$$

ed essendo

$$V^2 = a^2\cos^2\varphi + c^2\sin^2\varphi,$$

viene subito

$$(\alpha) \qquad \frac{\sin^2\varphi}{V^2} = \frac{a^2\xi^2}{a^2c^2\xi^2 + c^4\zeta^2}.$$

Consideriamo adesso un mezzo non omogeneo, composto di due strati omogenei divisi dal piano $z = Z$; sia O_1 un punto del primo strato, O_2 uno del secondo, e la luce vada da O_1 ad O_2, forando in I il piano $z = Z$. Tiriamo da O_1 ed O_2 le perpendicolari al detto piano, e siano P_1 e P_2 i loro piedi.

Poniamo

$$O_1P_1 = e_1, \qquad O_2P_2 = e_2,$$
$$P_1P_2 = d, \qquad P_1I = x;$$

verrà intanto

$$O_1I = \sqrt{e^2_1 + x^2},$$
$$O_2I = \sqrt{e^2_2 + (d-x)^2}.$$

Resta ancora a calcolare la velocità $\mathfrak{V}$ nella direzione dei raggî. Ma in generale si ha, come è noto (Kirchhoff, loc. cit., pag. 208 e seg.),

$$\mathfrak{V}^2 = \frac{(a^2 + c^2)V^2 - a^2c^2}{V^2},$$
$$= \frac{a^2c^2}{a^2\xi^2 + c^2\zeta^2},$$

Ne segue dunque che anche nel nostro mezzo, non isotropo e non omogeneo, le equazioni dei raggî si ottengono dalla

$$\delta \int \frac{ds}{\mathfrak{V}} = 0, \tag{23}$$

dove ds è al solito l'elemento lineare e $\mathfrak{V}$ la velocità di propagazione di un sistema di onde piane nella direzione del raggio.

In altri termini: *il principio di Fermat continua a valere per i mezzi più generali da noi considerati* (¹).

---

e dunque, per il primo mezzo

$$\mathfrak{V}_1 = \sqrt{\frac{a_1^2 c_1^2}{a_1^2 \frac{x^2}{e_1^2 + x^2} + c_1^2 \frac{e_1^2}{e_1^2 + x^2}}},$$

e per il secondo

$$\mathfrak{V}_2 = \sqrt{\frac{a_2^2 c_2^2}{a_2^2 \frac{(d-x)^2}{e_2^2 + (d-x)^2} + c_2^2 \frac{e_2^2}{e_2^2 + (d-x)^2}}},$$

quando con gli apici 1 e 2 si contraddistinguano le quantità relative all'uno o all'altro strato.

L'equazione

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{O_1 I}{\mathfrak{V}_1} + \frac{O_2 I}{\mathfrak{V}_2}\right) = 0$$

prende dunque la forma

$$\frac{a_1 x}{\sqrt{a_1^2 c_1^2 x^2 + c_2^4 e_1^2}} = \frac{a_2 (d-x)}{\sqrt{a_2^2 c_2^2 (d-x)^2 + c_2^4 e_2^2}},$$

che per la (α) corrisponde alla (1).

(¹) L'equazione (23) si mette facilmente sotto una forma più esplicita. Riprendendo il valore di $\mathfrak{V}$ dato dalla:

$$\mathfrak{V}^2 = \frac{a^2 c^2}{a^2 \xi^2 + c^2 \zeta^2},$$

viene infatti

$$\frac{ds}{\mathfrak{V}} = \frac{\sqrt{a^2 \xi^2 + c^2 \zeta^2}}{ac}\, ds,$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 (dx^2 + dy^2) + c^2 dz^2}}{ac},$$

e dunque, in luogo della (23),

$$\delta \int \frac{\sqrt{a^2 (dx^2 + dy^2) + c^2 dz^2}}{ac} = 0.$$

A parole: i raggî, nei nostri mezzi non omogenei e non isotropi, sono le geodetiche nella metrica definita dall'elemento lineare

$$ds^2 = \frac{a^2 (dx^2 + dy^2) + c^2 dz^2}{a^2 c^2}.$$

L'ottica dei nostri mezzi dà dunque un metodo, che, si può dire, *serve per certi riguardi a realizzare sperimentalmente queste geometrie, tanto più generali delle ordinarie geometrie euclidea e non euclidea.*

Relazione intorno alla Memoria del Dr. Tommaso Boggio, intitolata: *Sulla risoluzione di una classe di equazioni algebriche che si presentano nella Matematica finanziaria e attuariale.*

L'Autore si occupa della risoluzione di un tipo di equazioni algebriche intere, che si presentano spesso in varii problemi della Matematica finanziaria.

Applica a queste equazioni i varii procedimenti di approssimati che l'Algebra insegna, quali il metodo di Newton e l'interpolazione. Deduce così varie formule; di ogni formula determina il senso dell'approssimazione, e un suo confine superiore.

Alcune di queste formule di approssimazione si trovano nei trattati di scienza attuariale, ma non vi è discusso il grado di approssimazione raggiunta; altre sono nuove.

Il lavoro del Boggio porta un notevole contributo alla soluzione rigorosa d'un importante problema pratico; e noi ne proponiamo l'inserzione nelle Memorie dell'Accademia.

C. Somigliana.
G. Peano, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 3 Gennaio 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Rossi, Carle, Renier, Ruffini, Stampini e De Sanctis, Segretario. — Scusano l'assenza il Socio Manno, Direttore della Classe, e D'Ercole.

È approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, 20 dicembre 1908.

Il Presidente comunica una lettera della signora Antonietta vedova Brusa in cui ringrazia l'Accademia per le manifestazioni di affetto e di rimpianto tributate alla memoria del Socio Brusa. — Si dà comunicazione delle lettere di condoglianza pervenute dopo l'ultima adunanza all'Accademia.

D'ufficio sono presentate le seguenti pubblicazioni pervenute in omaggio all'Accademia:

1° Giovanni Sforza: *Autobiografie di illustri lunigianesi* (estratto dal " Giornale Storico e Letterario della Liguria ", an. IX, Genova, 1908).

2° Ulisse Chevalier: *Mes souvenirs 1804-1853* (Romans, Impr. générale, 1908).

Il Socio Rossi presenta per gli *Atti* una sua nota su *L'Egitto sotto i Faraoni.*

È presentata per le *Memorie* una monografia del Socio Cipolla, intitolata: *La diplomazia fiorentina e il soggiorno di Francesco Petrarca in Avignone negli anni 1351-1352*. La Classe, presa cognizione della monografia, ne delibera con voto unanime la inserzione nelle *Memorie* accademiche. Il Presidente prende questa occasione per esprimere l'augurio che il Socio Cipolla possa prontamente rimettersi dalla malattia onde è stato colpito.

Il Socio Carle, invitato dal Presidente, legge la Commemorazione del compianto Socio Brusa, che sarà inserita negli *Atti* (1). — Il Presidente ringrazia il Socio Carle della Commemorazione tenuta. E prima di chiudere l'adunanza crede di dover esprimere, facendosi interprete dei sentimenti di tutti i Colleghi, il profondo dolore della nostra Accademia per la gravissima sventura che ha colpito le provincie di Reggio e di Messina, cagionando anche, tra altri danni, la perdita di valorosi cultori degli studi. Egli rileva che il cordoglio può essere in qualche parte lenito dalla meravigliosa dimostrazione di fraternità che hanno dato in questa occasione non solo gli Italiani, ma tutti i popoli civili; ed esprime l'augurio che si farà quanto è umanamente possibile e per riparare ai danni sofferti e per impedire che si ripetano.

(1) Comparirà in un prossimo fascicolo.

LETTURE

L'Egitto sotto i Faraoni.

Nota del Socio FRANCESCO ROSSI.

Un poco al disotto di Elefantina, ove il Nilo co' suoi affluenti si aperse il passaggio fra le roccie di granito delle due catene di montagne arabiche e libiche, e forma presso Siene i confini meridionali del vero Egitto, comincia la grande ed ubertosa valle del Nilo che sarà il teatro di queste mie ricerche.

Il Nilo, che nel suo corso superiore qual torrente torbido e spumeggiante, abbattendo nel suo impeto ogni sorta di ritegni precipita con grande frastuono nella valle, appena toccato il suolo egiziano depone la sua selvaggia natura, e si fa a percorrere grave e maestoso la contrada in tutta la sua lunghezza da Siene in fino al mare, ove versa per diverse foci le sue benefiche acque. È la valle nel suo principio e per un buon tratto ristretta, e rinchiusa quasi in una conca dalle due catene di montagne, che la proteggono a destra ed a sinistra contro le invadenti sabbie dei deserti circonvicini; ma a misura che discende verso il mare, va sempre più allargandosi, ed il Nilo presso l'antico villaggio di Kerkasoro, a mezza via dal Cairo, dividendosi nei suoi due principali rami, il pelusiaco a levante, ed il canopico a ponente, circoscrive una specie di triangolo, la cui base convessa è bagnata dal mare mediterraneo ed ha per lati i due rami suddetti del fiume. Gli antichi Jonii per la sua rassomiglianza colla lettera greca *delta*, chiamarono con tal nome questa parte inferiore della valle, in cui secondo lo storico di Alicarnasso restrinsero l'Egitto proprio, e dando la sponda sinistra del Nilo all'Affrica, e la destra all'Asia, posero questo fiume, e non il Mar Rosso, come limite tra i due più grandi continenti del mondo antico.

Le pioggie, ancorchè frequenti nella parte inferiore del *delta* presso il mare, non cadono quasi mai nel superiore Egitto, onde ben presto sotto gli infuocati raggi del sole affricano cesserebbe in questa privilegiata valle ogni sorta di vegetazione,

se il Nilo non vi supplisse colle sue annuali, periodiche innondazioni, le quali vengono così opportunamente a rinfrescare le campagne arse e disseccate dal soffocante vento *Khamsin*, che durante il mese di maggio soffia nella valle dal mezzodì, e cagiona le molte malattie che travagliano in questo mese i suoi abitatori. A differenza quindi di tutti gli altri fiumi del mondo, le cui innondazioni sono temute come flagelli, perchè nei loro straripamenti apportano la rovina nelle terre e la desolazione negli abitanti delle loro sponde, quella del Nilo è ansiosamente aspettata, ed al suo primo manifestarsi, in tutta la valle si celebravano fin dai più remoti tempi delle feste in suo onore, ed i sacerdoti segnavano giorno per giorno col nilometro l'elevazione delle sue acque.

La crescenza delle acque che si manifesta nel fiume verso il solstizio d'estate, è prodotta dalle pioggie tropicali, che cadono periodicamente nell'Affrica centrale. Le sue acque prima limpide e salubri s'intorbidano e prendono una tinta verde, appannata e viscosa, che perdura dieci o dodici giorni e le rende inservibili agli usi della vita. Ma trascorso questo breve periodo e per un fenomeno del tutto meraviglioso, esse abbandonano repentinamente e quasi per incanto il colore verdastro, e prendendo un colore rossigno, ridivengono salubri, e sono da tutti gli Egiziani, dopo la privazione di parecchi giorni, bevute avidamente. Gli antichi sacerdoti che riconoscevano in questo repentino cambiamento di colore del Nilo, l'azione della Divinità, tenevano queste sue prime acque come sacre, e se ne servivano per lavare e purificare i templi e fare le loro abluzioni. L'innondazione, che nel suo principio procede con qualche lentezza, da questo punto cresce rapidamente, e verso i primi giorni di ottobre raggiunge il suo punto culminante, che spesso dopo avere già cominciato a diminuire, tenta raggiungere nuovamente, per abbassarsi tosto, prima gradatamente, poscia sempre più precipitosamente, lasciando sul suolo da lei occupato un limo di color bruno, grasso e leggiero, che costituisce l'eccellente terriccio a cui deve la valle la sua prodigiosa fertilità.

Appena liberi dalle acque dell' innondazione cominciano i lavori dei campi ed al solstizio d'inverno, quando il Nilo è ritornato nel suo letto, e le sue acque sono ridivenute azzurrognole e chiare, sono terminate tutte le seminagioni. Cosicchè la valle

nei primi mesi del nostro inverno, che è la primavera dell'Egitto, prende l'aspetto di un verdeggiante giardino, e le sue copiose messi sono ordinariamente raccolte prima che incominci a soffiare nella valle il *Khamsin*.

Noi abbiamo quindi tre distinte stagioni che costituiscono appunto il ciclo dell'anno egizio, e che nell'antica lingua dei Faraoni sono indicate coi seguenti segni: (*sha*) o *stagione della vegetazione* (*per*) o *stagione della raccolta* e (*She-mu*) o *stagione dell'innondazione*.

Il Nilo adunque che inaffia il terreno disseccato dal calore e lo concima e ne rende possibile la vegetazione, e con ciò la vita nella contrada, e che colla sua regolare, periodica innondazione e decrescimento stabilisce la norma alle divisioni dell'anno, e quindi a tutta l'attività, a tutto quanto lo sviluppo sociale ed intellettuale de' suoi abitatori, non era altro, il Nilo, per i devoti egiziani, che una emanazione d'Osiride, anzi lo stesso Osiride sotto forma corporea. Il detto quindi di Erodoto, ripetuto pure da Ecateo, che l'Egitto è *un dono del fiume*, δῶρον τοῦ ποταμοῦ, deve estendersi a tutta la valle bagnata dal Nilo, dono che si ripete ogni anno, ed ha cominciato fin dal giorno in cui si ritirarono i ghiacciai.

Fu in questa privilegiata valle che si fondava nei remotissimi tempi una delle più potenti monarchie che ricordi la storia e la cui durata conta non centinaia ma migliaia d'anni. Ma qui sorge spontanea la domanda: quali furono i primi abitatori di questa fortunata valle? o, per meglio dire, a quale delle razze umane hassi da ascrivere la nazione egiziana?

Contrariamente all'opinione professata quasi unanimemente dagli autori antichi, e sostenuta ancora da alcuni scrittori dell'ora passato secolo, che gli abitanti della valle del Nilo appartenessero ad una razza affricana, che aveva la sua primitiva sede a Meroe in Etiopia, donde scesero, seguendo gradatamente il corso del Nilo sino al mare, oggi la scienza, dallo studio anatomico delle loro mummie, e dalle ricerche filologiche della loro lingua conservatasi nei monumenti, ha posto fuori di ogni contestazione appartenere gli Egiziani alla razza camitica, che partiti dall'Asia, vennero per la via del deserto della Siria in Egitto, portando di là il concetto di un Dio, che muore e ri-

vive, concetto, che si svolse nella valle del Nilo sotto il mito di Osiride, e fu l'elemento unificatore, progressivo e produttore dell'incivilimento di quella contrada.

La provenienza degli Egiziani dall'Asia è conforme eziandio al racconto biblico, secondo il quale *Miz-raim*, figlio di Cham sarebbe venuto co' suoi figliuoli a stabilirsi in Egitto. Ma i ricordi dei primitivi tempi del soggiorno dei figli di *Miz-raim* sono interamente perduti nella notte delle tradizioni mitiche. E questa è l'epoca, che il grande storico dell'Egitto, Manetone, ha riempiuto con le dinastie favolose degli Dei e degli Eroi e dei Mani, epoca che nelle iscrizioni geroglifiche è spesso designata col nome dei *tempi degli Hor-s'esu*, ossia dei *seguaci di Horo*, il Dio nazionale per eccellenza ed il pastore speciale del popolo egiziano, menzionata pure nel celebre papiro cronologico, o canone regio del Museo egizio di Torino. Ed è al governo teocratico senza storia di questi seguaci di Horo, che è dovuta la costituzione dell'Egitto, quale la troviamo al principio del suo periodo storico. Divisi da prima in grande numero di tribù cominciarono a formarsi diversi Stati indipendenti, e, sebbene della medesima origine, ognuno di essi aveva le sue leggi ed il suo culto; questi fondendosi poi ancora col tempo gli uni negli altri, finirono per ridursi a due grandi principati, l'uno del Sud e l'altro del Nord ossia dell' alto e basso Egitto, la cui riunione sotto un solo scettro fu l'opera di Mene, il glorioso progenitore delle grandi dinastie Faraoniche. Manetone fa questo re originario di una antica città del superiore Egitto, chiamata *Theni*, che gli scrittori greci convertirono alla loro maniera in *This* e *Thinis*. Questa città, posta all'occidente del Nilo, era l'antica metropoli dell'ottavo nomo, che ebbe la gloria di essere stata la culla dei re delle due prime dinastie.

Mene, secondo la tradizione, fu un re guerriero e legislatore ad un tempo. Come re guerriero spinge vittorioso le armi oltre i confini dell'Egitto combattendo le tribù libiche, e come legislatore egli fu il primo a stabilire regole per il culto degli Dei e per il servizio dei templi. Vincitore della casta sacerdotale, si propose di togliere la sede del governo da Theni, ove i sacerdoti avevano avuto sino allora la supremazia, e fondare una città che divenisse la capitale del nuovo impero. A tal fine fece per mezzo di colossali dighe deviare il corso del Nilo, e

nel letto abbandonato dal fiume innalzò la nuova città, alla quale diede il nome di *Men-nefer*, che in lingua egiziana significa la *buona stazione* o *buona dimora*, e che i Greci convertirono in Memfi.

In questa città egli fondava pure il famoso tempio di *Ptah* (il *Vulcano dei Latini*), che per i continui abbellimenti introdotti dai suoi successori, divenne uno dei più celebrati templi dell'Egitto e, per grandezza e splendore, non inferiore a quello tanto rinomato del Dio Ammone in Tebe.

Lo scopo propostosi da Mene non tardò ad essere raggiunto, e mentre le antiche città del sud coi loro santuari preistorici e colle sedi della dominazione sacerdotale andavano perdendo del loro prestigio, sorgeva sulle loro rovine Memfi, che finì per trarre a sè tutte le forze vive della Nazione e divenire il centro ed il focolare di tutta la coltura egiziana. È nel palazzo de' suoi re che sono coltivate maggiormente le scienze ed è in Memfi che l' architettura e le arti plastiche dell' antico impero produssero i loro capolavori. La fine di questo glorioso fondatore della monarchia egiziana fu infelice, poichè dopo un regno di 62 anni morì vittima, secondo gli uni di un ippopotamo, secondo gli altri di un coccodrillo; ma lasciò a' suoi successori il regno con una corte ed un' amministrazione perfettamente organizzata.

Il re riuniva nelle sue mani tutto il potere, e lo esercitava per mezzo di ministri da lui scelti nelle diverse classi di ufficiali che componevano la sua corte. Come il rappresentante del Dio sulla terra, il signore per eccellenza, era fatto segno per parte dei sudditi alla più profonda venerazione. La sua corte componevasi dei nobili della contrada, e dei diversi uffiziali a cui era affidata l'amministrazione del regno. Giudici nominati dal re vegliavano alla stretta obbedienza della legge scritta, ed amministravano la giustizia all'oppresso popolo, le cui querele erano tenuti ad ascoltare, ed applicare, secondo i reati, le punizioni. L'esercito composto di giovani soldati armati sia di mazze e d'ascia sia di scudi e d'archi, era posto sotto il comando di sperimentati uffiziali. Più numerosa di tutte era la classe degli scribi, distribuiti in diversi ordini conformi ai loro uffizi ed alle loro condizioni, e lo scriba con lo studio e coll'ingegno poteva dall'infimo grado elevarsi sino ai primi posti della gerarchia

egiziana. I servi e gli artigiani avevano pure i loro capi a cui obbedivano e ne eseguivano gli ordini; così ciascuno teneva il posto che gli spettava secondo il suo grado; gli affari seguivano il loro corso regolare ed il Faraone era, per così dire, il primo motore della macchina del governo. L'impero così felicemente da lui fondato si andò sempre più consolidando nelle mani de' suoi successori, ma delle due prime dinastie noi non possediamo oggi omai altro più che i nomi ricordati in monumenti posteriori, poichè, se si eccettui la grande piramide a gradini, attribuita al re *Uenephes* della prima dinastia, che ancora si vede presso il borgo di *Sakkarah*, e precede di parecchi secoli la costruzione delle tre grandi piramidi di *Gizeh*, oggi non si conoscono altri monumenti di questo primo periodo della storia egizia che la tomba di un personaggio chiamato *Thoth-hotep*, scoperta dal Mariette nella necropoli di Memfi, e tre statue di pietra calcare, che ora si trovano nel Museo del Louvre, monumenti che mostrano nelle loro figure rozze, e piuttosto abbozzate che finite, e nei geroglifici per lo più in rilievo, combinati tra loro senz'ordine e proporzione, tutti i caratteri di un'arte nell'infanzia, od in altre parole, nel suo periodo d'incubazione.

Coll'estinzione della seconda dinastia, che rappresentava i principi tiniti, i diretti discendenti di Mene, una nuova famiglia originaria di Memfi s'impadronì del potere, e fondò la terza dinastia, in capo alla quale Manetone pone il re *Necherophes*, a cui corrisponderebbe nei monumenti il re *Bebi* o *Teti*. Sotto questo principe i Libii già sottomessi da Mene, si rivoltarono e minacciarono l'integrità dell'Impero. Ma al momento decisivo la superstizione venne in aiuto al re egiziano. Una notte, quando già i due eserciti stavano di fronte l'uno all'altro, il disco della luna parve ingrandirsi smisuratamente con grande spavento dei Libii, che tenendo questo fenomeno per un indizio della collera celeste, si sottomisero senza combattimento agli Egiziani. La pace così stabilita non venne più per lungo tempo seriamente turbata; e l'Egitto sotto la protezione de' suoi principi potè dare alle scienze ed alle arti il maggiore sviluppo. Come successore di *Necherophes* le liste di Manetone danno *Tosorthros*, a cui corrisponde nella tavola di Abido, e nel sovra citato papiro cronologico o canone regio il *re Neb-ka*. Questi ebbe fama

di distinto cultore della medicina, e scrisse trattati che esistevano ancora ai primi secoli dell'era cristiana, e gli procacciarono l'onore di essere dai greci paragonato ad Esculapio. Ma il più illustre principe di questa dinastia è *Snefru*. Con lui cominciano i monumenti a spandere la loro luce, ed a farci conoscere non solo la storia dei loro re, ma ci rivelano ancora nelle numerose scene che adornano le tombe dei suoi tempi i generi di vita di quelle antiche popolazioni. Questo re fece guerra nel principio del suo regno alle tribù nomadi dell'Arabia Petrea, spingendo le sue armi vittoriose sino al fondo della penisola del Sinai, il cui possesso fu poscia sempre ambito dai re egiziani per le sue ricche miniere di rame e di turchesi; e la sua vittoria contro questi popoli nomadi è ricordata in un basso rilievo sopra una delle roccie di *Wady-Magarah*, ove il re è rappresentato in atto di percuotere colla terribile sua ascia, un nemico che egli ha gettato a terra, e chiamato nell'iscrizione che accompagna la scena, *il re del Nord e del Sud*, *il Signore dei due diademi*, *Signore di Giustizia*, *Horo vincitore*, *Snefru*, *Dio grande*. Ed a fine di proteggere il *Delta* dalle scorrerie di questi barbari, faceva costrurre lungo le frontiere una serie di fortezze, di cui una col nome di *She-Snefru* esisteva ancora ai tempi della XII dinastia. La bella piramide, che oggi si vede ancora nelle vicinanze di *Meidoum*, sarebbe stata, secondo il Brugsch, costrutta da questo re, per la sua tomba, e presso questa piramide un personaggio della sua corte costruiva pure la propria tomba, scoperta dal Mariette, che mostra nelle scene e scritture, le quali ne coprono i muri, fatte in variato mosaico coi più vivi colori, quanto l'arte egiziana avesse progredito sotto questa dinastia. Ma la rinomanza di questo re, non ostante i molti suoi meriti, è offuscata da quella dei suoi tre immediati successori, i potenti Faraoni della quarta dinastia.

Il periodo della IV dinastia segna il punto culminante della coltura e civiltà dell'antico Impero. A un'epoca in cui le altre nazioni sono ancora involte nelle tenebre dell'età preistorica, l'Egitto già si mostra nel pieno suo sviluppo. Dalle cataratte al Mediterraneo innumerevoli barche a vele quadrate solcano il Nilo, portando il commercio e la vita alle tante città che sorgono sulle sue sponde. Ampi poderi, ove si alleva un numeroso bestiame, e dove antilopi, cicogne ed oche selvatiche sono

tenute allo stato di domesticità, arricchiscono le campagne ; e le scene effigiate sulle tombe ci dimostrano l'elegante architettura delle loro case, ove il proprietario amato e rispettato da' suoi famigli passa il tempo or coltivando i fiori, ora cacciando e pescando nei numerosi canali che irrigano la contrada. E l'arte egiziana raggiunge sotto i principi di questa dinastia il suo massimo splendore. I monumenti che sono a noi pervenuti ci dimostrano, come il carattere distintivo dell'arte egiziana in quella remota epoca fosse nell'architettura un meraviglioso studio delle proporzioni, mostrandosi nelle sue costruzioni grave e sobria di ornamenti, e nella statuaria un sommo studio per imitare la natura in tutta la sua verità, senza cercare in alcun modo d'idealizzarla. Le grandi piramidi innalzate da questi famosi re attestano la valentia degli architetti che idearono ed eseguirono quelle gigantesche moli. Le numerose statue che di quel periodo si conservano nel Museo di Boulaq, sebbene di forme alquanto atticciate, ma però tutte ben proporzionate, mostrano e nella movenza del corpo e nell'espressione del volto tanta naturalezza, che più che statue le diresti ritratti di antichi egiziani. Ma il capolavoro dell' arte egiziana di quel periodo è la famosa statua in legno, trovata nella tomba di un personaggio, che visse a Memfi nella prima metà della IV dinastia, e riprodotta in tre bellissime fotografie nel grande *album* del Museo di Boulaq, pubblicato in occasione delle feste pel taglio dell'istmo di Suez. Rappresenta questa statua un personaggio in atto di camminare, che tiene nella mano sinistra il bastone, segno del comando, ed i cui occhi fatti di una pasta vitrea trasparente, ed incastrata in palpebre di bronzo, danno al volto tratteggiato con grande maestria tanta espressione, che la si direbbe vivente e parlante.

Il titolo di *Mer-Pe-Schai* ([hieroglyphs]), *sovraintendente della casa dei libri*, che noi troviamo portato da personaggi i quali occupavano alti gradi alla corte dei Faraoni, ben dimostra come già allora avessero biblioteche per conservare i tesori della loro sapienza civile e religiosa. Le loro dottrine morali si possono dire riassunte in queste massime dettate da un principe di quei tempi : " ascoltare la parola, amare ed ubbidire è adempiere i " buoni precetti. Il figlio che riceve la parola del padre non ha

" alcun pensiero di libertinaggio: eleva in tuo figlio un uomo
" docile, la sua prudenza farà la delizia dei grandi, la sua bocca
" sarà riservata nelle sue parole. Il ribelle che non ubbidisce
" fa assolutamente nulla, egli vede la scienza nell'ignoranza,
" la virtù nel vizio, e commette ogni giorno con audacia ogni
" sorta di frodi, ed in ciò vive come fosse morto „. Questo principe poneva quindi la base della morale e dell'ordine nell'obbedienza figliale estesa ai rapporti col governo, che egli considera come investito di una vera autorità paterna. È sommamente interessante seguire le semplici parole, che in un antico stile rappresentano i pensieri di questo vecchio principe: " Se
" tu, egli scrive, sei divenuto grande dopo che sei stato umile;
" se tu hai ammassato ricchezze dopo la povertà, essendo di-
" venuto per questo il primo nella tua città; se tu sei cono-
" sciuto per la tua ricchezza, e sei divenuto un grande Signore,
" non lasciare inorgoglire il tuo cuore a causa delle tue ric-
" chezze, perchè è Dio che è l'autore di esse per te; non di-
" sprezzare un altro, che è come tu eri; sii verso di lui come
" verso il tuo uguale „.

A capo di questa dinastia troviamo *Xufu*, il Cheope dei Greci, il fondatore della più grande piramide di *Gizeh*. Alla costruzione di questa gigantesca mole è fama, che per lo spazio di trent'anni lavorassero centomila uomini, che si rinnovavano ad ogni trimestre, e non bastando alla colossale opera gli schiavi ed i prigionieri di guerra, che secondo l'uso erano riservati ai lavori manuali, costrinse pure a questi i liberi egiziani. Il che diede origine alle gravi accuse contro questo potente monarca, che leggiamo in Erodoto ed in altri scrittori greci, i quali lo dipingono come un tiranno, che per odio agli Dei fece chiudere tutti i templi proibendo al popolo di fare offerte alle divinità del paese, nè si ritenne dal fare persino mercato della propria figlia onde sopperire alle spese di sì ingente opera. Oggi invece apprendiamo dai monumenti essere stato questo re uno dei più attivi e potenti Faraoni, terribile ai nemici, e pio verso gli Dei. Egli guerreggiò coi popoli nomadi del deserto dell'Arabia, difendendo contro i loro attacchi la coltivazione delle miniere di rame e di turchesi, che *Snefru* aveva aperto nella penisola del Sinai. E la sua pietà verso gli Dei egli dimostrò colla restaurazione dell'antico tempio di Iside presso la grande Sfinge,

come risulta dal seguente passo di una stela ultimamente scoperta: *Horo vivente, re dell' alto e basso Egitto, Xufu, datore di vita, ha trovato il tempio della sfinge al Nord-Ovest del tempio di Osiride, Signore di Rosta*; e ricorda la donazione che egli " ha " fatto a sua madre Iside, la divina madre, che è Hathor, la " regina della Necropoli. Egli ha rinnovato il suo culto, rico- " strutto in pietra il suo santuario, e ritrovato gli Dei che " erano nel suo tempio „. Ed un altro tempio la cui restaurazione è pure attribuita a questo re, è quello della Dea *Hathor* a Denderah; ed a dimostrare infine quanto fosse ingiusta l'accusa di ateismo lanciata a questo re dagli autori greci, piacemi ricordare il nome di *Xufu-mer-neter-u*, *Xufu* l'*amico* o l'*amante degli Dei*, portato da un personaggio di quei tempi. Ma l'opera che ne eternò il nome è la sua grande piramide, il monumento più colossale, che mai mano d'uomo abbia elevato, e che fu giustamente annoverato dagli antichi fra le sette meraviglie del mondo.

Come successore di Xufu, abbiamo *Xaf-ra*, il fondatore della seconda grande piramide, il *Cefreno* dei Greci, che questi descrivono come un re tiranno non meno del suo predecessore, odiato per la sua empietà.

I monumenti invece ce lo rappresentano come un potente monarca, che seppe tenere con mano ferma lo scettro, e mostrarsi pio verso gli Dei. Di questa sua pietà fanno fede le numerose statue da lui fatte eseguire per l'abbellimento del tempio della Sfinge presso Gizeh e specialmente il titolo datogli dai suoi contemporanei di *Horo-buono*, che accompagna quasi sempre nei monumenti il suo cartello reale. Egli fu sopratutto un re costruttore, e la statuaria sotto il suo regno raggiunse il massimo grado di sviluppo.

Monumenti e tradizione sono invece concordi a rappresentarci il successore di *Xafra*, *Men-kau-ra*, il Micerino dei Greci, il fondatore della terza grande piramide, come un re giusto, pio e benefico, che meritò per il suo grande amore della giustizia e per la sua pietà verso gli Dei di essere, dopo morte, venerato dagli Egiziani come un Dio, ed il suo nome è frequentemente ricordato nei loro libri più sacri. Il suo magnifico sarcofago, che era tenuto per uno dei più splendidi monumenti dell'arte memfitica, andò perduto nel naufragio presso le coste

del Portogallo, colla nave che lo trasportava in Inghilterra, e solo si salvò, grazie al materiale di cui era formato, il coperchio in legno che ora si conserva nel Museo di Londra, il quale porta incisa in geroglifici la seguente leggenda: “ Oh! Osiride, “ re dell'alto e basso Egitto *Men-kau-ra*, vivente per sempre, “ figlio del cielo, concepito nel seno di *Nun*, germe di Seb! “ Tua madre stende le sue ali su te, nel suo nome di mistero “ del cielo; essa ti divinizza, annientando i tuoi nemici, o *re* “ *Men-kau-ra*, vivente per sempre „. Questa leggenda nella sua brevità è di somma importanza, poichè ci dimostra come la dottrina dell'assorbimento dell'anima giustificata in Osiride, su cui si aggira tutto il *Libro dei morti*, era già professata a quei tempi. Secondo questa dottrina l'anima del defunto re, liberata dalla parte soggetta a morte, passa attraverso gli immensi spazi del cielo per unirsi col Dio, dopo aver trionfato del male col quale ebbe a lottare durante il suo viaggio terrestre.

Dopo *Men-kau-ra*, il regno d'Egitto passò a *Spep-Ses-Kaf*, con cui termina, secondo i monumenti, la IV dinastia. A questo re, che è dagli istoriografi greci annoverato fra i grandi legislatori dell'Egitto, sono attribuiti i grandiosi propilei innalzati nella parte orientale del tempio di *Ptah* (il Vulcano dei Latini), ed Erodoto, parlando di questi propilei, dice che erano di immensa mole e bellissimi a guardare, ed aggiunge che tutti i propilei sogliono essere vagamente istoriati, e offrire aspetti di variatissima architettura, ma che questi del tempio di Vulcano non soffrono paragone.

La prosperità e lo splendore, che procacciarono all'Egitto queste prime dinastie, seppero mantenere ancora i re della V dinastia, sostenendo parecchie fortunate guerre contro i popoli nomadi dell'Asia, ma nessun fatto storico importante li raccomanda alla nostra attenzione, ed essa termina con *Unas*, il costruttore della grande piramide tronca a *Saqqarah,* chiamata dagli Arabi *Mastabat-el-Faraoun*, ossia la *sedia del Faraone*, il quale chiude la serie dei famosi re memfiti, che come discendenti di Mene, esercitarono senza interruzione il potere regio su tutto l'Egitto per lo spazio di mille e duecento anni.

Colla sesta dinastia sorge una nuova real casa a contendere la successione dei re dell'antico Impero. Pare tuttavia che questo cambiamento di dinastia non avvenisse senza contrasti.

Poichè il re *Teta*, il legittimo successore dei re menfiti, si vide contrastata l'autorità regia nell'alto Egitto da un principe di Elefantina per nome *Ati*, l'*Othoes* di Manetone, il fondatore della VI dinastia, il quale dopo breve regno, ucciso da una delle sue guardie, lasciò la corona a *Meri-ra-pepi*, che non tardò a riunire sotto il suo scettro tutta la contrada. Questo principe colla sottomissione della Nubia e con parecchie altre guerre fortunate contro gli *Aamu* ed altre tribù della Siria allargò i confini dell'Egitto, spingendo le sue conquiste più lungi che alcun altro Faraone abbia fatto prima di lui. Sotto il suo regno ebbe pur luogo la prima spedizione marittima, che ricordi la storia, menzionata in una stela di un personaggio, che aveva già servito il re nelle precedenti guerre, con queste parole: " Ecco " che io partii ancora una volta sopra navigli, e presi terra agli " ultimi confini di questa regione (cioè della Siria), e riportai una " completa vittoria sull'inimico ". Il celebre tempio di *Hathor* in Denderah, la cui fondazione risaliva al periodo mitico dell'Egitto, caduto in rovina, fu da *Meri-ra-pepi* ricostrutto sul disegno primitivo tracciato su pelle di gazzella ai tempi degli *Hor-šesu* o seguaci di Horo, e ritrovato per caso ai suoi tempi. E questa sua pietà verso una delle divinità più venerate dell'Egitto, gli procacciò il titolo di *figlio di Hathor*, che fu aggiunto al suo cartello reale. Egli costrusse pure la sua piramide, chiamata *Men-nefer* (la *buona dimora*), che fu scoperta nel 1885 dall'illustre egittologo Enrico Brugsch nel gruppo di piramidi mezzo diroccate, che si scorgono all'occidente del villaggio di *Sakkara*, nell'altipiano che separa la sua grande selva di palme dal deserto, e che colle sue numerose iscrizioni arricchì di preziosi testi la letteratura geroglifica.

Dopo i brevi regni di *Mer-en-ra* e di *Nefer-ka-ra*, figli del glorioso re *Meri-ra-pepi*, ebbe la corona dell'Egitto *Mentu-souphis*, ma i tentativi di rivolta, che già si erano manifestati nel principio di tale dinastia, si rinnovarono più forti sotto questo principe, il quale dopo un anno di regno fu ucciso in una sommossa. La regina *Nitokris*, la *bella dalle gote di rosa*, come la chiama Manetone, volendo vendicare la morte del fratello e marito, fece costrurre un'ampia galleria sotterranea, che per un segreto canale comunicava col Nilo. Sotto pretesto quindi di inaugurare la nuova fabbrica, vi invitò a splendido convito

i principali autori dell'uccisione, e mentre lietamente banchettavano, fatto aprire il canale, che metteva nel fiume, tutti li annegò.

Con questa regina, chiamata nei monumenti *Net-aker-ti*, termina, secondo Manetone, la VI dinastia. Essa avrebbe usurpato per sua tomba la piramide di Micerino. Raddoppiatene poscia le dimensioni le fu dato quell'ultimo rivestimento di pietre ben pulite e liscie come vetro, la cui spesa assorbì, secondo i greci storiografi, le somme immense che la cortigiana Rhodope raccolse dalla rovina de' suoi amanti, e sostituendo a quello di *Nitokris* il nome di questa cortigiana, narrano che un giorno mentre *Rhodope* si bagnava nel fiume, un'aquila le rapì uno dei suoi sandali, e portatolo nella direzione di Memfi lo lasciò cadere sui ginocchi del re, che rendeva giustizia in un luogo aperto. Il re colpito e dalla singolarità dell'avventura e dalla bellezza del sandalo, fece cercare per tutta la contrada la donna, a cui apparteneva il sandalo, e così Rhodope divenne regina dell'Egitto, ed alla sua morte fu seppellita nella terza piramide. Il Cristianesimo e la conquista araba modificarono ancora il carattere di questa leggenda, senza cancellare del tutto il ricordo di *Nitokris*. Narrano cioè, che lo spirito della piramide appare talvolta al di fuori di essa in forma di una bella donna nuda, le cui maniere di agire sono tali, che quando vuol darsi a qualcuno e renderlo pazzo, ella gli sorride e questi si accosta a lei che lo attira coi vezzi, e lo affascina sì che perde la ragione, e corre errante per il paese. Quando nel mezzogiorno od al tramonto del sole la si vedeva girovagare attorno alla piramide, dicevano essere *Nitokris*, che sorvegliava il monumento da lei condotto a termine.

Ma le lotte per la successione al trono che già cagionarono la morte di Mentu-sophis continuarono ancora ad affliggere l'Egitto, e durante tutto il periodo, che abbraccia la VII e VIII dinastia, fu questa contrada smembrata in parecchi stati retti da principi che consumarono le loro forze a contendersi il primato. Verso la fine di questo periodo un re per nome *Ochthoes*, che la tradizione rappresenta come uno dei più efferati tiranni dell' Egitto, riuscì ad imporsi agli altri principi, e la città di Eracleopoli, che gli fu culla, divenne la capitale del regno. Questo principe, che può considerarsi lo stipite delle due

dinastie Eracleopolitane, la IX e X, che chiudono l'antico Impero, finì per impazzire, e venne ucciso da un coccodrillo.

Per la mancanza totale di monumenti questo lungo periodo che separa la VI dalla XI dinastia, rimarrà il più oscuro della storia egiziana, se pure una fortunata scoperta di qualche nuovo monumento non verrà, come faro, a rischiararci la via fra le le tenebre in cui sono avvolte le ultime dinastie dell'antico Impero.

Colla XI dinastia ha principio l'Impero di mezzo, che abbraccia un periodo di 1360 anni. Memfi, la capitale dell'antico Impero, la culla delle arti, e che sotto gli antichi re memfiti aveva prodotti tanti capolavori, cominciò a declinare dal suo splendore ed in mezzo alle rivoluzioni, che afflissero l'Egitto sotto le ultime dinastie, perdette la sovranità, e fu surrogata da Tebe, chiamata alla vita politica dagli *Antef* e *Mentuhotep*, principi della XI dinastia.

Antef, il fondatore della nuova dinastia, governava col titolo di *Erpa* o principe, il paese del sud sotto la sovranità dei re Eracleopolitani. Vassallo da principio di questi re, a poco a poco si sottrasse al loro impero, formando dell'alto Egitto uno Stato indipendente, che trasmise a' suoi eredi. Questi continuarono la lotta contro i re Eracleopolitani confinati nel *Delta*, finchè *Mentuhotep IV* pervenne a riunire sotto il suo scettro tutto l'Egitto. Tuttavia i suoi successori non seppero mantenere il potere, e dopo un dominio di poco più di mezzo secolo, dovettero cedere il posto al fondatore della XII dinastia, *Amen-em-ha I*, lasciandoci pochi monumenti ad attestare colla loro rozzezza quanto l'arte egiziana fosse decaduta in quei lunghi periodi di discordie civili.

Colla XII dinastia, e per opera dei gloriosi suoi principi, gli *Amen-em-ha* e gli *Usertasen*, risorge l'Egitto alla sua antica potenza. Infatti al nord riacquista le sue antiche frontiere che sono il Mediterraneo e la penisola del Sinai. Al sud, pretendendo come suo patrimonio tutte le terre che bagna il Nilo, porta vittorioso le armi contro i Cushiti, e fonda al di là della seconda cataratta, sulla destra e sinistra sponda del Nilo le due fortezze conosciute ancor oggi coi nomi di *Kummeh* e *Semneh*, che segnano la frontiera meridionale dell'Impero dei Faraoni sotto questa dinastia. E tali vittorie contro la nazione *Cushita*

sono ricordate in una stela trovata nella magnifica tomba di *Knum-hotep*, che oggi ancora attira l'ammirazione dei forestieri per l'eleganza dell'architettura, per la grazia, bellezza e freschezza dei colori delle pitture, che ne adornano le pareti. Ma l'opera più splendida di questa dinastia è la costruzione del *Lago di Meri* col suo celebre labirinto.

Tutti sanno come l'Egitto debba la sua prodigiosa fertilità alla periodica innondazione del suo fiume, ma se questa scarseggia, la parte di terra, che non viene innondata rimane sterile; se invece è sovrabbondante, straripando con violenza ne danneggia i campi e minaccia le città. A scongiurare questi due egualmente terribili flagelli, un re della XII dinastia ideò ed eseguì un progetto gigantesco. A poca distanza da Memfi esiste ad occidente una vasta pianura, nel centro della quale *Amen-em-ha III* costrusse un lago artificiale della superficie di 10 milioni di metri quadrati con una profondità di più di 25 m., che fece comunicare col Nilo per due canali muniti di chiuse a regolare l'entrata e l'uscita dell'acqua. All'epoca dell'innondazione, se questa era deficiente, l'acqua condotta e conservata nel lago serviva ad irrigare non solo le terre attornianti il lago, ma ancora tutta la riva sinistra del Nilo sino al mare. Se invece l' innondazione eccedeva, il lago riceveva la sovrabbondanza delle acque, che guardava sino al momento in cui il Nilo cominciava a decrescere. Questa colossale opera, la più utile che mai Faraone abbia intrapreso per l'Egitto, è conosciuta sotto i due nomi di *Meri,* cioè il *lago per eccellenza*, e che i Greci tradussero per *Meris*, facendolo erroneamente derivare dal nome di un re; e di *Pi-om,* che significa il mare, donde venne il *Fayoum* degli Arabi. Alla testa poi di questo lago edificava il labirinto, che Erodoto non dubitò di affermare essere opera tale da disgradarne tutti gli edifizi e monumenti della Grecia possibili a ricordare, i quali nè per perfezione, nè per ricchezze potrebbero mai stargli a confronto. E presso ad un angolo del labirinto si ergeva ancora una piramide di duecentoquaranta piedi di altezza con sopravi scolpite grandi figure, e vi si entrava per mezzo di una via sotterranea.

La prosperità che procacciarono all'Egitto le potenti famiglie degli *Amen-em-ha* e degli *Usertasen* si mantenne ancora per qualche tempo sotto la XIII dinastia, ove si distinsero prin-

cipalmente i *Sebek-hotep* ed i *Nefer-hotep*; ed il Dio *Sebek* a testa di coccodrillo ebbe sotto questi principi il maggior culto. Ma verso la fine di questa dinastia, principi deboli ed impotenti a frenare le fazioni trasportarono la sede del potere da Tebe in una città del basso Egitto detta *Xois*, ove ben tosto dovettero cedere la corona ad una nuova dinastia, la XIV, chiamata, dal nome del luogo in cui sorse, *Xoita*.

E fu sotto questa dinastia che avvenne il più grande flagello che abbia mai colpito l'Egitto, l'invasione cioè degli *Hik-s'os* o re pastori.

È questa invasione ricordata dallo storico egiziano Manetone colle seguenti parole: " Vi fu un re, chiamato *Timaios*. Sotto " il suo regno non so perchè Dio soffiò su di noi un vento sfa- " vorevole; uomini ignobili e senza fama venuti dall'Oriente " invasero subitamente il paese, e se ne impossessarono quasi " senza combattimento, saccheggiandone le città, devastandone " i templi, maltrattandone tutti gli indigeni, massacrandone una " grande parte, riducendone l'altra colle donne e fanciulli in " ischiavitù. Poscia si nominarono a re uno di essi chiamato " Salati. Questi risiedendo a Memfi impose tributi all'alto e " basso Egitto, e lasciò presidii nei luoghi più importanti. Avendo " poi trovato nel nomo Setroitico una città favorevolmente si- " tuata all'oriente del ramo bubastita del Nilo, chiamata Avaris, " la fortificò di solide mura, e vi pose dentro una guarnigione " di 240.000 opliti ". Secondo lo stesso autore, Salati ed i suoi successori regnarono in Egitto 511 anni. Tuttavia i successori di Salati subirono ben tosto l'influsso della civiltà egiziana e finirono per adottare il culto ed i costumi dei Faraoni, aggiungendo al Panteon egiziano il loro Dio nazionale, il guerriero *Sutek*, che essi identificarono coll'egiziano *Set*. Tanis divenuta la capitale del loro regno vide riaprirsi i suoi templi, ed aumentarsi il numero de' suoi palazzi. E fu sotto uno di questi successori di *Salati*, chiamato *Apepi*, che ebbe luogo l'avvenimento narrato dalla Bibbia, di Giuseppe, e la successiva immigrazione di Giacobbe in Egitto.

Intanto che i re pastori dominavano nel basso Egitto, i principi tebani organizzarono nell'alto Egitto la resistenza del paese, fondando una nuova dinastia, la XV, che lottò ancora per qualche tempo contro questi invasori, ma alla fine caduta

anche questa, si trovò tutto l'Egitto sotto la signoria dei re pastori, finchè dalla Nubia, ove si erano rifugiati i principi indigeni, fecero re *Taaa*, che fondò la XVII dinastia, in opposizione alla XVI, formata dai re pastori. Egli, riuniti sotto la sua bandiera gli Egiziani che mal soffrivano il dominio straniero, ricominciò la guerra dell'indipendenza, e dopo lunghe ed accanite lotte, costrinse i re pastori a rifugiarsi nella loro fortificata *Avaris*, ove resistettero ancora per molti anni ai continui sforzi di parecchi re, e ne furono solo cacciati nel quinto anno del suo regno, da *Aah-mes* il glorioso fondatore della XVIII dinastia.

Liberata così felicemente la contrada, *Aah-mes* rivolse l'animo a riparare i danni, che la lunga e rovinosa guerra contro gli *Hik-s'os* aveva cagionato sopratutto alle grandi città, e gli Egiziani, a distruggere persino la memoria della lungamente patita straniera dominazione, si fecero a cancellare dai monumenti e ovunque, i nomi degli odiati nemici.

Ma rimangono tuttavia a dimostrare lo stato dell'arte sotto i re pastori le due grandi sfingi in granito roseo, che ora si conservano nel Museo del Louvre, portanti traccie del cartello reale di Apepi, e parecchie altre statue, scoperte da Mariette-Bey negli scavi di Tanis, la favorita residenza di questi, le quali tutte si distinguono per gli occhi piccoli, il naso vigoroso ed alquanto schiacciato e pei zigomi prominenti, che danno all'insieme del volto una certa ruvidezza, la quale più non si ravvisa in quelle dell'età posteriori. E forse non errerebbe chi volesse attribuire a quell'epoca anche la statua di granito roseo, portante il cartello reale di Ramesse II, che trovasi nel nostro Museo a lato a quella bellissima di basalto nero dello stesso re; poichè la concavità che presenta il cartello reale di Ramesse, scolpito sulla cintura, ben rivela essere stato questo sovrapposto ad un altro nome, e tutta la statua poi troppo si scosta da quella grazia e finitezza di lavoro, che raggiunse la scultura sotto i Ramessidi.

La lunga guerra sostenuta per la loro indipendenza svegliò negli Egiziani una tal forza di espansione, che da oppressi che furono, divennero a loro volta oppressori. *Aah-mes*, dopo avere riconquistato al Sud gli antichi confini, portò le armi nella Palestina, ed iniziò quella serie di gloriose spedizioni, che sotto

gli Amenofi, i *Toth-mes* ed i *Ramses* resero rispettato e temuto il nome dei Faraoni in Oriente. I suoi successori *Amenofi I* e *Tothmes I* ne estesero maggiormente i confini: il primo, conducendo gli Egiziani nel cuor dell'Etiopia, ne compie la conquista; il secondo, rivolgendosi al Nord, attraversa i deserti che separano l'Assiria dall'Egitto, e porta la guerra ai *Retennu*, che popolano le pianure tra l'Eufrate ed il Tigri, lasciandovi stele commemorative delle sue vittorie.

Ma il più celebre re della XVIII dinastia fu *Thotmes III.* Succeduto questi a suo fratello *Thotmes II* in ancor tenera età, ebbe a tutrice nei primi anni di regno la sorella maggiore *Hata-su*, che impadronitasi del potere, si fece rappresentare sui monumenti sotto forme virili, aggiungendo al suo nome, colle insegne e coi titoli di re, il cartello reale di trono: *Ra-ma-ka*, ed illustrò il suo breve regno con una splendida spedizione marittima sulle coste meridionali dell'Arabia, compita non per desiderio di conquista, ma per aprire solo amichevoli commerciali rapporti con gli abitanti di quelle contrade, che producevano i preziosi aromi così cari agli Egiziani pel culto dei loro Dei. Ed a perpetuarne la memoria fece scolpire sulle mura del Tempio, da lei innalzato in Tebe, di *Deir-el-Bahari*, in grandi e bellissimi bassorilievi le principali scene di questa sua gloriosa spedizione, che sono oggi riprodotte ed illustrate dal Dümichen nella sua bella opera pubblicata col titolo: *La flotta di una regina egiziana nel XVII secolo avanti Cristo.*

Pervenuto Thotmes alla maggiore età, rivendicò a sè la corona, e sotto il suo scettro l'Egitto raggiunse l'apogeo della sua potenza. Nell'interno una previdente organizzazione delle forze del paese assicurò da per tutto l'ordine ed il progresso, e numerosi e magnifici edifizi sorsero per opera sua a Eliopoli, a Memfi, a Tebe, a Elefantina, e sino nella Nubia. Al Nord come al Sud il suo regno non fu che una serie di guerre fortunate; flotte egiziane s'impadronirono dell'isola di Cipro, e dopo diciotto anni di incessanti vittoriose lotte sottopose al suo scettro tutta l'Asia occidentale: cosicchè il suo impero si estendeva sull'Abissinia, sulla Nubia, sulla Siria, sulla Mesopotamia, sul Kurdistan, e sull'Armenia, onde fu giustamente chiamato dal Brugsch l'Alessandro Magno dell'Egitto. Dopo 54 anni di regno lasciò morendo a' suoi successori l'Egitto più forte, più influente e più

temuto che mai. Tanto era il terrore della potenza dei Faraoni, destato nel cuor dei nemici dalle vittorie di Tothmes III, che fu facile a' suoi due immediati successori, Amenofi II e Tothmes IV, conservare e difendere le conquiste del loro glorioso predecessore. Ma con Amenofi III cominciano le lotte dei barbari, che tentano sottrarsi al giogo egiziano, e non meno potente di Tothmes III, egli è celebrato pel suo valore in una iscrizione del tempio di *Louqsor* con le seguenti pompose parole: " Egli " è Horo il potente, colui che domina per la spada, e distrugge " tutti i barbari... Egli colpisce i capi di tutte le contrade, Egli " incede e somiglia la Vittoria, come Horo, figlio di Iside, come " il Sole nel cielo. Egli abbatte tutte le fortezze ed ottiene pel " suo valore all'Egitto i tributi di tutte le nazioni ". Fra le grandi costruzioni attribuite a questo potente principe vi era il magnifico tempio da lui consacrato al Dio Ammone, sulla riva sinistra del Nilo, in faccia al *Louysor*, considerato dagli antichi come una delle migliori opere dell'architettura egiziana. Innanzi a questo tempio, oggi del tutto distrutto, stavano due statue colossali di questo re, che furono per lungo tempo oggetto di meraviglia al mondo antico. Poichè avendo un terremoto fatto cadere la parte superiore di una di esse, si avvertì ben tosto che la parte rimasta in piedi, bagnata dalla rugiada della mattina, mandava al levar del sole un suono simile a corda di lira che si spezza. Donde nacque la leggenda dei Greci, che vollero vedere in essa la statua del re Memnone, che saluta al levar del sole la sua divina madre, l'Aurora.

Morendo, lasciò il trono a suo figlio Amenofi IV, che fu causa di gravi mali all'Egitto per la riforma che introdusse nella religione. Sotto il suo regno il Dio Ammone, così venerato in Tebe, fu proscritto ed il suo nome cancellato sui monumenti, e sostituito con quello di' *Aten* (disco) ed il suo stesso nome cangiò in quello di *Xu-en-Aten*, che significa *splendore del disco*, come si può vedere in un monumento di pietra calcare del nostro Museo, che porta i cartelli reali di questo re. E perchè più nulla ricordasse l'antica religione, fondò una nuova città, ove trasportava la sede del governo. Ne vennero quindi guerre civili e religiose, che travagliarono per lungo tempo il paese; finchè *Hor-em-heb*, l'ultimo re di questa dinastia, ristabilì la pace, e distruggendo sin dalle fondamenta la nuova capitale, che

Xu-en-aten aveva innalzato a *Tell-el-Amarna*, ristorò dovunque l'antico culto, ridonando all'Egitto il benessere e l'autorità, che gli avevano procacciato le conquiste degli Amenofi e dei *Toth-mes*. Ed il nostro Museo possiede un bellissimo gruppo in marmo bianco venato rappresentante in forme colossali *Amon-ra*, il dio supremo di Tebe, seduto sopra un trono, avente al fianco suo sinistro, ma in dimensioni molto più piccole, il re *Hor-em-heb*, ritto in piedi sopra una predella, e chiamato nell'iscrizione che l'accompagna l'*amico di Ammone*.

Alla sua morte, non avendo *Hor-em-heb* eredi diretti, passò la corona in una nuova famiglia, che diede origine alla dinastia XIX. Il capo d'essa fu Ramesse I, il quale salito sul trono in età avanzata, lasciò pochi monumenti del suo regno, e gli successe il figlio *Seti*, il *Setos* dei Greci, che si mostrò grande guerriero, e promotore ad un tempo delle arti e della prosperità dell' Egitto. Infatti dai monumenti di Karnak noi apprendiamo che lunghe e lontane guerre egli condusse in persona, combattendo ora contro gli abitanti di Pount, ora contro i *Keta* ed i *Retennu*, attaccando Ninive e Babilonia, e spinse fino nell'Armenia le vittoriose sue armi. L'arte poi deve a lui la sala ipostile di Karnak, uno dei più bei lavori dell'architettura egiziana, ed è pure opera sua il grande tempio d'Abido, ove Mariette Bey trovò la celebre tavola di questo nome, rappresentante questo re col giovane figlio Ramesse in atto di far omaggio a' suoi antenati. Ed a promuovere la prosperità del paese congiunse per mezzo di un canale il Nilo al Mar Rosso, e rese praticabile alle carovane il cammino che da Radasieh per la valle del deserto conduceva alle miniere dell'oro di *Gebel-Abky*, colla costruzione di uno di quei pozzi, che sono detti artesiani. Le iscrizioni, che adornano il tempio ivi innalzato alle divinità del paese, ricordando quest'opera, glorificano il re, " d'avere " scavata la montagna per farne scaturire l'acqua ".

Ma il più grande e munificente monarca di questa dinastia fu Ramesse II, di cui il nostro Museo possiede l'imagine nella bellissima statua di basalto nero, che ho testè accennato. Associato sin dall'infanzia al trono dal padre *Seti* per i diritti, che da parte della madre vantava alla corona, all'età di dieci anni già si faceva compagno al padre nelle lunghe e lontane di lui guerre, sicchè ebbe campo a sviluppare il suo valore personale,

di cui diede poi così splendida prova nella terribile guerra, che gli suscitarono verso il quinto anno del suo regno i *Keta* uniti in lega con altre nazioni, che sino allora non avevano preso parte alle guerre contro l'Egitto. A questa minaccia Ramesse raccoglie il suo esercito e marcia verso il nemico. Ma un giorno ingannato da falsi rapporti delle spie nemiche, essendosi allontanato dal suo corpo d'armata con piccola scorta, si trova tutto ad un tratto circondato dall'intiero esercito dei confederati. I pochi egiziani, che lo accompagnavano, sorpresi fuggono ed il re in tanto pericolo, invocato il Dio Amone, spinge il suo carro contro i nemici, e per ben sei volte si precipita in mezzo ad essi, abbattendone i principali guerrieri, e ne sostiene per lungo tempo l'urto, finchè raggiunto dal suo esercito, la mischia si fa generale, ed interrotta dalla notte, ricomincia tosto all'indomani con maggior accanimento, e dopo sanguinosissima lotta vengono i *Keta* ed i loro alleati pienamente dispersi. E fu questa celebre guerra contro i *Keta* che formò il soggetto del grande poema di *Pentaur*, tenuto in tanto pregio dagli Egiziani da riprodurlo più volte sulle mura dei loro templi. I numerosi tributi ed i ricchi bottini riportati dalle sue tante guerre egli impiegò ad accrescere i comodi e lo splendore del suo paese, e nessun altro Faraone innalzò mai tanti monumenti quanto Ramesse II. In Nubia il grande speco di Isambul, scavato tutto nella roccia, co' suoi portentosi colossi, eretto a perpetuare la memoria delle sue campagne contro i Negri ed i Siriani; in Egitto il *Ramesseion* colle sue magnifiche sculture, rappresentanti i principali fatti della guerra contro i *Keta*, gli obelischi e le tante statue ed altri monumenti portanti il suo nome, molti dei quali oggi adornano i Musei d'Europa, mentre fanno fede della munificenza di quel re, attestano pure l'eccellenza delle arti di quei tempi. — A Ramesse II successe nel trono in età avanzata il suo decimo-terzo figlio *Menephtah I*, che fu il Faraone dell'Esodo; il suo breve regno fu tuttavia illustrato da una splendida vittoria contro una nuova colleganza di popoli, ricordata in una iscrizione del tempio di Karnak con queste parole: " Le nazioni " riunite dal capo dei Libii, che sono gli Achei, gli Etruschi, i " Licii, i Sardi, i Siculi, popoli settentrionali, venuti da tutte " le terre del dintorno del gran mare (cioè del Mediterraneo), " il re *Menephtah I* li ha vinti per la vigilanza del suo padre

" Amone „; e prosegue enumerando il massacro, che si fece di tutti questi popoli confederati, il bottino riportato sopra i vinti, i prigionieri condotti in trionfo, che montarono a circa diecimila.

Ma sotto la mano malferma del vecchio re non seppe l'Egitto trarre alcun vantaggio da sì splendida vittoria, e già nel suo regno apparvero segni di quelle discordie, che poi nella successiva dinastia dovevano togliere la corona ai legittimi re, e darla a principi di razza straniera. Tuttavia al principio della XX dinastia ebbe l'Egitto ancora un momento di splendore sotto Ramesse III, chiamato dallo Chabas il Salomone egizio. Dovette questi combattere lungamente per l'integrità del territorio egiziano contro le nazioni del Nord e dell'Ovest nuovamente sollevatesi, e le sue vittorie rappresentate nei basso-rilievi del palazzo da lui costrutto di *Medinet-habou*, furono riprodotte ed illustrate dal Rosellini nella sua splendida opera: *I monumenti dell'Egitto e della Nubia.* Ed il nostro Museo possiede un bellissimo papiro jeratico giudiziario di questi tempi, pubblicato nel *Journal asiatique* dal Deveria, che contiene il processo e la condanna dei principali complici della congiura contro questo re, ordita dal fratello con parecchi grandi della Corte e colle donne dell'*Arem*, congiura, che gli autori greci erroneamente pongono sotto il regno di Ramesse II. Ma non ostante le vittorie di questo Faraone, l'Egitto spossato da quattro secoli di continue guerre camminava a grandi passi verso la sua decadenza.

Alla morte di Ramesse III, caduto lo scettro in mano di principi deboli ed inetti, sorsero ben tosto nuovi pretendenti a contendere loro la corona; così nell'alto Egitto i grandi Sacerdoti di Ammone, che durante la XX dinastia avevano occupati i più alti uffici civili e militari, alla morte di Ramesse XI elessero re uno di essi, che portò il nome di *Her-Hor*, mentre nel basso Egitto, a Tanis, si formava con *Smende* una nuova dinastia, la XXI, che si stabiliva nel *Delta.* E così l'Egitto rimase smembrato in due regni sino a *Šešonki*, il fondatore della XXII dinastia, che riunì nuovamente sotto il suo scettro tutto l'Egitto. Questo principe d'origine semitica, chiamato Sesak dalla Bibbia, portò ancora una volta vittoriose le armi nella Palestina, prese Gerusalemme, e di ritorno in Egitto coi tesori che Salomone aveva ammassato nel tempio, fece incidere sulle mura di

Karnak i nomi delle città da lui conquistate, e fu l'unico fatto, che illustrò questa dinastia; ed i cartelli reali del suo fondatore sono pure incisi in una delle grandi statue leontocefale di diorite della Dea *Sexet* nel Museo torinese. Ma i suoi successori lasciarono l'Egitto più diviso ancora di quello che fosse all'epoca in cui questo re s'impadronì della corona. Infatti l'Egitto durante la XXIII dinastia era al Nord composto di piccoli Stati governati da capi, che si usurparono le funzioni ed il titolo di re, mentre al Sud l'alto Egitto era divenuto una provincia del Soudan. Tale era lo stato dell'Egitto quando l'Etiope *Sabakone*, discese le cataratte, s'impadronì di tutta la contrada sino al Mediterraneo, e preso l'infelice *Boccoris*, che Manetone dà come l'unico re della XXIV dinastia, lo fece ardere vivo.

La dinastia etiopica che fu la XXV governò alla foggia dei Faraoni l'Egitto per lo spazio di cinquant'anni, alla fine dei quali l'ultimo suo re, *Taraka*, si ritirò spontaneamente nel suo regno di Etiopia, abbandonando l'Egitto a' suoi principi indigeni. Questi formarono una dodecarchia, che durò 15 anni, finchè uno d'essi per nome Psammetico, coll'aiuto dei mercenari greci spodestò gli altri principi, e prese la corona dell'alto e basso Egitto, fondando la XXVI dinastia, detta Saitica, che fu l'ultima delle grandi dinastie nazionali.

Sotto i suoi principi ebbe ancora l'Egitto anni di prosperità, e le arti da essi protette non tardarono a riprendere l'antico splendore, così che il periodo saitico, vuoi per la finezza e delicatezza de' suoi lavori, vuoi per l'ammirabile perfezione, con cui sono tracciati sui loro monumenti i geroglifici, occuperà pur sempre nella storia dell'arte un segnalato posto.

Psammetico I per legittimare i suoi diritti alla corona sposò una principessa discendente dall'infelice Boccoris, il Faraone della XXIV dinastia. Guadagnatesi con tal matrimonio le simpatie degli Egiziani, cercò di afforzare il suo potere coll'assicurarsi l'appoggio di quei soldati greci che gli avevano procacciata la vittoria sopra i suoi rivali. A tal fine li invitò a prendere regolare servizio sotto la sua bandiera, formando di essi la sua guardia d'onore. Quest' atto offese grandemente la classe dei guerrieri indigeni, per cui deliberarono di abbandonare il re, ed in numero di 200.000, secondo Erodoto, uscirono dall'Egitto in cerca di una nuova patria; e sebbene Psammetico all'annunzio

di questa sì grande diserzione cercasse di arrestare la loro marcia e li facesse inseguire sin nella Nubia, tuttavia non riuscì nè colle preghiere, nè colle minaccie a farli ritornare in Egitto. La diminuzione delle forze militari prodotta da questa grave diserzione non distolse Psammetico dal tentare, sull'esempio degli altri fondatori di dinastie, di ottenere il prestigio dalle conquiste straniere. Egli invade con forte esercito la Siria, e ridotta la Fenicia ad una specie di vassallaggio, ritorna in Egitto, ove consacra gli ultimi anni di sua vita a promuovere le arti e le scienze, ma specialmente l'architettura.

Alla sua morte successe nel regno il figlio *Nekau*, il *Necao* della Bibbia, che ereditando gli ambiziosi disegni del padre sulla Siria e la Palestina, e conoscendo di quanta utilità per la conquista di queste due regioni fosse l'avere nella sua spedizione terrestre l'appoggio di una forte flotta per mare, capace di contendere con quella dei re fenici, consacrò i primi anni del suo regno alla costruzione di essa. Ma invece delle navi ad un solo ordine di remi, usate dai suoi predecessori, egli sul modello di quelle dei Greci e dei Carii fece costrurre delle triremi, ed in pochi anni avendo nei porti dei due mari, il Mediterraneo e l'Eritreo, che bagnano l'Egitto, costrutto un grande numero di queste triremi, escogitò un grande progetto a fine di riunirle tutte insieme in una sola flotta. Già i grandi re della XIX dinastia avevano costrutto un canale, che serviva di comunicazione tra i due mari, il quale prendendo l'acqua dal Nilo presso Bubasti, passando pei laghi amari, metteva capo al golfo di Suez; ma questo canale fatto non per fini militari, ma per servizio solo del commercio, era stato eseguito su piccola scala. *Nekau* si propose quindi di approfondare ed allargare questo canale in modo che due delle sue grandi triremi potessero agiatamente passare di fronte. Ma questo suo grandioso progetto fallì, ed egli, come ci dice Erodoto, ruppe l'opera a mezzo, trattenuto da un oracolo sentenziante che Nekau si affaticava colla sua impresa a benefizio dei barbari. Ma forse più probabilmente ne fu distolto dalla grave perdita d'uomini già patita prima ancora di essere arrivato alla metà della sua impresa. Infatti Erodoto narra che in questo lavoro di scavazione perirono sotto *Nekau* ben 120.000 Egiziani. Ma, supposto anche esagerato questo numero, è però un fatto, che in un clima come quello

dell'Egitto, e nei deserti arsi dal sole, ove doveva eseguirsi il lavoro, la concentrazione di un sì grande numero d'uomini, quale richiedeva la colossale opera, e l'insufficienza di provvigioni quasi inevitabile in simili circostanze, non potevano a meno di essere causa di grandi malattie, e di mortalità fra quegli operai, per cui migliaia d'uomini perirono nel corso di pochi mesi. Epperò, vuoi per compassione de' suoi sudditi, vuoi per timore del loro risentimento, *Nekau* dovette certo a malincuore desistere dal suo disegno e lasciare incompiuta questa sua grande opera.

L'idea tuttavia di riunire insieme le sue triremi non l'aveva del tutto abbandonato, ed avendo udito dai Greci, che l'Oceano circondava tutta la terra, ne conchiuse dover essere l'Affrica una penisola, per cui si potesse navigare tutt'attorno. Egli fece partire dal Mar Rosso un corpo di marinai fenici, i quali navigando a traverso mari sino allora ignorati, raggiunsero il Capo di Buona Speranza, e costeggiata l'Affrica occidentale, per lo stretto di Gibilterra vennero, dopo una perigliosa navigazione di circa tre anni, ad approdare al luogo da cui erano partiti. Questo felice risultato gli dimostrò bensì l'esistenza di un passaggio di congiunzione dei due mari, ma il tempo che si richiedeva per compierlo era tale da renderlo di nessuna pratica utilità.

Dopo avere quindi occupato i primi anni del suo regno in questi tentativi, si risolse d'incominciare le sue militari spedizioni, e raccolto un forte esercito invase la Siria, ed appoggiato dalla flotta già stava per attaccare Megiddo (Magdalo), quando si trovò di fronte il re di Giuda, Josia, che con numeroso esercito tentò di arrestargli la marcia. Si ebbe quindi fra i due re una terribile battaglia, in cui Josia fu pienamente sconfitto, e *Nekau* ottenuta con questa vittoria la sottomissione della contrada sino a *Carchemis (Circesio)*, ritornò in Egitto. Ma ben tosto ebbe a lottare con un più terribile nemico. Il re di Babilonia *Nabopolassar*, avendo associato al trono il suo figlio maggiore *Nabucodonossor*, lo mandò con un potente esercito a ritogliere agli Egiziani il possesso della Siria. *Nekau*, avutone l'avviso, si mosse tosto a difendere con numerose forze la contrada testè conquistata, e presa a Carchemis una forte posizione, attese l'oste nemica. E ben tosto s'impegnò una sanguinosa battaglia tra Babilonesi ed Egiziani, ove *Nekau* perdette il fiore de' suoi sol-

dati, ed egli stesso si salvò colla fuga, e così Nabucodonossor, con una battaglia si trovò padrone di tutta la Siria, e già stava per invadere l'Egitto, quando la morte del padre lo chiamò repentinamente a Babilonia. E così ebbe *Nekau* un po' di tregua, che consacrò a riparare le subite perdite, e sino alla sua morte rimase tranquillo in Egitto; ma pochi sono i monumenti che lo ricordano.

Gli succedette nel trono il figlio Psammetico II, che illustrò il suo regno con una campagna militare contro gli Etiopi, i quali avevano esteso il loro dominio sino quasi alle frontiere dell'Egitto presso l'isola di Elefantina. Come re costruttore Psammetico II si distinse per i motti dei bassorilievi con cui adornò i templi di Abido e di File, ed il suo nome è pure ricordato nell'obelisco, che egli innalzò in Eliopolis, e che trasportato a Roma, è oggi conosciuto col nome di *Obeliscus Campensis*. Ma specialmente la statuaria ebbe da lui il maggior impulso; e le numerose statue, che di esso sono pervenute sino a noi, dimostrano sino a qual grado di perfezione sia giunto lo scalpello egizio sotto la dominazione Saitica; rimarchevolissima fra tutte per la sua bellezza è quella, che oggi si ammira nella collezione egiziana del Vaticano. Ma il suo regno fu di breve durata, e dopo appena sei anni che sedeva sul trono, moriva lasciando la corona al figlio, chiamato nei monumenti *Uah-ab-ra*, e dai Greci Apries.

Questo principe, che nella tradizione greca è rappresentato come uno dei più potenti e gloriosi monarchi della XXVI dinastia saitica, avendo felicemente terminata la guerra con gli Etiopi, incominciata dal padre suo, portò le armi contro la Fenicia e l'isola di Cipro, e presa Sidone, e riportata sulla flotta alleata dei Fenici e dei Ciprioti una splendida vittoria, ritornò con ricco bottino in Egitto. Incoraggiato da questi successi pensò rinnovare sulle contrade assire le conquiste, che i grandi re della 18ª-19ª dinastia avevano con tanta gloria compiute. A tal fine contrasse alleanza con Zedechia, re di Giuda, che ribellatosi apertamente a Nabucodonossor, si trovò ben tosto assediato in Gerusalemme dal re babilonese. Apries tosto si mosse in aiuto al suo alleato, ed entrato con grande apparato di forze nella Palestina, si avanzava lungo la costa, quando si trovò di fronte all'esercito babilonese, onde ne seguì una sanguinosa bat-

taglia, in cui Nabucodonossor riportò una grande vittoria, ed *Apries* strascinato dai suoi nella fuga, si ritirò in Egitto senza più fare alcun tentativo.

Poco tempo dopo questo rovescio di fortuna ebbe a lottare con un altro più grave pericolo. Un grandissimo numero di guerrieri egizi essendo repentinamente insorto contro di lui, egli mandò un suo generale per nome Amasi a domare la rivolta. Ma mentre Amasi, giunto in mezzo agli ammutinati li esortava a desistere dalla ribellione, un Egiziano, che gli stava d'accanto, posegli un elmo sul capo, e così facendo gridò, che gli imponeva quell'elmo come un segno regale. Nè Amasi si mostrò offeso, ed appena fu egli acclamato re dai sediziosi, si apparecchiò a marciare contro il suo re. A questa notizia Apries manda un alto personaggio della sua corte, chiamato Partemis, perchè gli conduca prigioniero Amasi. Partemis non riesce nella sua missione, e ritorna al re senza Amasi. Allora il re acciecato dall'ira fa tagliare il naso e le orecchie a Partemis. A questa pena tenuta dagli Egiziani per la più ignominiosa, inflitta ad un personaggio di così alto grado, si commossero tutti, e senza indugio passarono essi pure agli insorti. Apries, riunite le sue milizie ausiliarie, composte di Jonii e di Carii, marcia contro gli insorti guidati da Amasi, ma esso è pienamente sconfitto, e fatto prigioniero, viene condotto a Sais, ove poco dopo è posto a morte dalla sua stessa nazione.

Come re costruttore lasciò Apries pochi monumenti che attestino il suo amore per le arti. Noi possediamo tuttavia di lui due piccoli obelischi, uno dei quali, posto dal fantastico Bernini sul dorso di un elefante, adorna ora la piazza della Minerva in Roma, e l'altro trovasi nella città di Urbino.

Tolto in tal modo di mezzo Apries, regnò in Egitto Amasi, che per avere un legittimo titolo al trono dei Faraoni sposò una figlia di Psammetico II, e sorella di Apries, e sebbene cominciasse il suo regno sotto disastrose circostanze, riuscì tuttavia a procacciare all'Egitto una grande prosperità, ed a fargli un autorevole posto fra le nazioni. In pace coi vicini consacrò i lunghi anni del suo regno a promuovere le arti e le scienze, e Sais, la sede del governo, ebbe le principali sue cure, ed il tempio della Dea Neith fu abbellito di immensi colossi e di altissimi androsfingi. Nè in Sais solo, ma in tutti i più splendidi templi

d'Egitto egli dedicò opere grandi e degnissime d'ammirazione. Ebbe pure fama di legislatore, e per le sue saggie istituzioni, e per la prudenza con cui amministrò la giustizia nella contrada, divenne per gli Egiziani il modello dei buoni re. Alla sua morte fu seppellito a Sais nella tomba, che si era preparata nel circuito del tempio della Dea Neith, ed il suo sarcofago in marmo nero coperto di geroglifici eseguiti con somma arte e bellezza, si conserva ora nel grande Museo britannico.

Chiude la gloriosa dinastia Saitica Psammetico III, che succeduto al padre suo Amasi, quando la invasione persiana era già in via di compiersi, tenta indarno di opporsi alle innumerevoli schiere dei Persiani, e l'Egitto diviene preda di Cambise, che con barbarico fanatismo ne devasta i templi, profana e saccheggia le tombe dei re, e da Assuan a Tebe, da Tebe a Memfi segna di rovine il suo cammino.

Alla morte di Cambise Dario I tenta con una saggia amministrazione far dimenticare agli Egiziani il giogo che pesava su essi, ma le rovine e le profanazioni di Cambise parlavano troppo vivamente al cuore degli Egiziani, e tentativi di rivolta venivano ad ogni tratto a provare, che l'Egitto non obliava le ingiurie che aveva a vendicare, e cento anni dopo la conquista persiana, sotto Dario II, l'Egitto riusciva ancora una volta a farsi indipendente, e troviamo di nuovo i nomi dei nativi re nei templi di Karnak, ma dopo tre dinastie che si seguirono con rapida successione durante lo spazio di 64 anni, durante il regno di *Nectanebo II*, ricadde l'Egitto sotto il dominio dei Persiani, e con lui si spense la lunga serie dei Faraoni, che aveva cominciato con Mene, e governato l'Egitto come una grande Monarchia per quasi quaranta secoli.

L'Accademico Segretario
GAETANO DE SANCTIS.

PROGRAMMA

PER IL

XVII PREMIO BRESSA

La Reale Accademia delle Scienze di Torino, uniformandosi alle disposizioni testamentarie del Dottore Cesare Alessandro Bressa, ed al programma relativo pubblicatosi in data 7 Dicembre 1876, annunzia che col 31 Dicembre 1908 si chiuse il Concorso per le scoperte e le opere scientifiche fatte nel quadriennio 1905-1908, al quale concorso erano solamente chiamati Scienziati ed Inventori Italiani.

Contemporaneamente essa Accademia ricorda che, a cominciare dal 1° Gennaio 1907, è aperto il Concorso per il diciassettesimo premio Bressa, a cui, a mente del Testatore, saranno ammessi **Scienziati ed Inventori di tutte le Nazioni.**

Questo concorso ha per iscopo di premiare quello Scienziato di qualunque nazione egli sia, che durante il quadriennio 1907-1910, " a giudizio dell'Accademia delle Scienze di Torino, " avrà fatto la più insigne ed utile scoperta, o prodotto l'opera " più celebre in fatto di scienze fisiche e sperimentali, storia " naturale, matematiche pure ed applicate, chimica, fisiologia e " patologia, non escluse la geologia, la storia, la geografia e " la statistica ".

Questo Concorso verrà chiuso col 31 Dicembre 1910.

La somma destinata al premio, dedotta la tassa di ricchezza mobile, sarà di lire **9300** (novemila trecento).

Chi intende presentarsi al concorso dovrà dichiararlo, entro il termine sopra indicato, con lettera diretta al Presidente dell'Accademia ed inviare l'opera con la quale concorre. L'opera

dovrà essere stampata; **non si terrà alcun conto dei manoscritti.** Le opere presentate dai Concorrenti, che non venissero premiati, non saranno restituite.

Nessuno dei Soci nazionali, residenti o non residenti, dell'Accademia Torinese potrà conseguire il premio.

L'Accademia dà il premio allo Scienziato che essa ne giudica più degno, ancorchè non si sia presentato al concorso.

Torino, 1° gennaio 1909.

Il Presidente dell'Accademia
E. D'Ovidio.

Il Segretario della Giunta
L. Camerano.

PREMII DI FONDAZIONE GAUTIERI

L'Accademia Reale delle Scienze conferirà nel 1909 un premio di fondazione Gautieri all'opera di Filosofia, inclusa la Storia della Filosofia, che sarà giudicata migliore fra quelle pubblicate negli anni 1906-1908. Il premio sarà di L. 2500, e sarà assegnato ad autore italiano (esclusi i membri nazionali residenti e non residenti dell'Accademia) e per opere scritte in italiano.

Gli autori, che desiderano richiamare sulle loro pubblicazioni l'attenzione dell'Accademia, possono inviarle a questa. Essa però non farà restituzione delle opere ricevute.

Torino — Vincenzo Bona, Tipografo delle LL. MM. e RR. Principi.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 10 Gennaio 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti i Soci: Naccari, Direttore della Classe, Spezia, Segre, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Morera, Fusari e Camerano, Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Vengono presentati in omaggio alla Classe i lavori seguenti:

1° dal Socio Jadanza: *Osservazioni di ascensioni rette eseguite nel R. Osservatorio di Torino negli anni 1904-06* e *In Æquationem quam decimalem vocant animadversiones*, del prof. G. Boccardi;

2° dal Socio Mattirolo: *Contributo alla conoscenza delle relazioni del patrizio Veneziano Pietro Antonio Michiel con Ulisse Aldrovandi*, del prof. G. B. De-Toni;

3° dal Socio Mattirolo due suoi opuscoli: *Sulla profilassi contro gli avvelenamenti dei funghi* e *Species novae in excelsis Ruwenzori in expeditione Ducis Aprutii lectae*;

4° dal Socio Fusari il suo *Trattato elementare di Istologia generale e di tecnica istologica*.

Vengono presentate per gli *Atti* le note seguenti:

1° Dott. A. C. Bruni: *Contributo alla conoscenza dell'istogenesi delle fibre collagene,* dal Socio Fusari;

2° Prof. A. Garbasso: *Su la composizione delle vibrazioni armoniche*;

3° Dott. G. Ponzio: *Sul comportamento di un sale di diazonio verso i solventi organici*, dal Socio Fileti.

Il Presidente pronuncia parole di viva ammirazione per il grande slancio della carità italiana e straniera in pro' degli sventurati colpiti dal recente immane disastro e interpretando il pensiero di tutta la Classe scongiura, che se si deve riedificare le cadute città, ciò si faccia secondo i dettami della scienza, in modo che esse possano difendersi, per quanto è possibile, contro il ripetersi dei fenomeni tellurici nelle località testè colpite.

LETTURE

Contributo alla conoscenza dell'istogenesi delle fibre collagene.

Ricerche del Dott. ANGELO CESARE BRUNI, Settore.

(Con una Tavola).

Nel corso di una serie di osservazioni sui tessuti connettivi, iniziate per consiglio del mio illustre Maestro, prof. ROMEO FUSARI, mi accadde di osservare alcune particolarità degne di nota nell'istogenesi del *ligamentum intervertebrale*, particolarità che mi pare possano portare qualche luce nella questione tuttora aperta dello sviluppo delle fibre collagene.

Perchè se le opposte opinioni sull'origine intracellulare (SCHWANN, VALENTIN, KUSNETZOFF, OBERSTEINER, ROBIN, BOLL, FLEMMING, REINKE, SPULER, ZACHARIADÈS, MAXIMOW, PES, ecc.), od estracellulare (HENLE, BRUCH, KILIAN, v. HESSLING, DRUMMOND, ROLLET, RANVIER, KOLLMANN, OGNEW, KÖLLIKER, MERKEL, EBNER, RENAUT, ecc.) delle fibre collagene parvero conciliate col sorgere della teoria dell'*ectoplasma*, parecchie divergenze esistono ancora, specialmente sul modo di considerare l'ectoplasma stesso.

Però alla scienza fu conquistato un fatto positivo di grande importanza con la dimostrazione che la sostanza fondamentale degli antichi AA. ha valore di protoplasma più o meno differenziato (*metaplasma* di HEIDENHAIN) e così la principale barriera che separava le due teorie sulla genesi della fibra collagena fu abbattuta. Già ROLLET aveva molto chiaramente espressa questa opinione, ma essa venne riportata ad onore in questi ultimi tempi, specialmente per opera di WALDEYER, di EBNER, di RETTERER, di HANSEN, di STUDNICKA, di SCHAFFER, di MALL e specialmente di M. HEIDENHAIN, e si può ora ritenere generalmente ammessa.

A parte la questione dell'opportunità delle denominazioni di *endo-* ed *ectoplasma*, negata da RETTERER, da LAGUESSE, da

Ebner, sta il fatto che oggi la tendenza predominante è di considerare la fibra collagena come formatasi nella parte periferica della cellula, non direttamente da elementi fibrillari costitutivi del protoplasma cellulare (Flemming), ma indirettamente per trasformazione del protoplasma, appunto secondo l'antico concetto di Rollet. Salvo i particolari, si esprimono in questo senso Hansen (1899), Reinke (1901), Laguesse (1903-04), Retterer (1905), Golowinski (1907), Petersen (1908); Spalteholz (1906) invece in base alle sue ricerche sullo sviluppo dei tendini conserva l'opinione che le fibre collagene siano da considerarsi come " parte costitutiva delle cellule che le circondano ". Ad ogni modo per tutti questi AA. la cellula è sempre il punto di partenza per la formazione delle fibre.

Ebner (1897-1906) si scosta da essi, poichè dimostra per alcuni organi speciali (astuccio della corda nei pesci inferiori, fibrille connettive del dente) l'origine delle fibre nella sostanza fondamentale, intesa però come *metaplasma*, lontano da ogni cellula, specialmente per azione delle sollecitazioni meccaniche. Questo A., fondandosi su fatti speciali consimili di fibrillazione, che si osservano nei vegetali e in certi organi di animali invertebrati (involucro chitinoso), tende a generalizzare i suoi reperti per spiegare l'origine di tutte le fibre collagene.

Per Hansen è *ectoplasma* quella parte periferica della cellula, che assume la funzione di formare fibrille collagene nel connettivo fibroso, o di formare sostanza fondamentale nella cartilagine jalina; esso si produrrebbe per differenziazione del protoplasma cellulare; la parte di quest'ultimo che non si differenzia costituirebbe l'*endoplasma*. Tale concetto, osserva giustamente Ebner, è affatto diverso da quello, secondo cui l'ectoplasma è inteso da Mall e da Studnicka. Secondo questi AA. il punto di partenza pei varii tessuti connettivi è, come del resto aveva già dimostrato Retterer, un sincizio, proveniente dalla fusione in un protoplasma comune del protoplasma delle primitive cellule mesenchimali individualizzate.

Mall considera come *endoplasma* quella parte del simplasma, che assume un aspetto granuloso e circonda il nucleo; come *ectoplasma* la rimanente parte, che si differenzia in una rete fibrillare.

Studnicka mi pare concilii in parte le opinioni di Hansen

e di MALL, poichè dà valore di *ectoplasma* alle parti periferiche delle trabecole della rete protoplasmatica sinciziale, in cui si raccolgono le fibre; considera poi come sostanza fondamentale amorfa o meglio come *Interzellularflüssigkeit* il contenuto delle maglie, in cui verranno anche sospinte col progredire dello sviluppo le fibre collagene.

RETTERER, nel 1905, riassume le sue vedute sull'origine delle fibrille connettive distinguendo tre periodi successivi: 1° la formazione di un *plasmodio* (*sincizio* degli altri AA.); 2° trasformazione del plasma perinucleare in sostanza granulosa *cromofila*, che si continua attraverso tutta la massa con prolungamenti anastomotici (*endoplasma* di MALL) formando una rete, le cui maglie sono riempite di *jaloplasma* (*ectoplasma*); 3° elaborazione nel jaloplasma per addensamento e differenziazione di fibrille connettive. Salvo la nomenclatura ciò si accorda abbastanza con lo schema di STUDNICKA; di più vi è tenuto conto dello stato amorfo dell' ectoplasma che precede la formazione delle fibrille, su cui LAGUESSE ha richiamato l'attenzione.

La denominazione di *ectoplasma* nel senso di MALL (come quella di *jaloplasma* nel senso di RETTERER) corrisponde assai bene alla denominazione di *metaplasma* introdotta da HEIDENHAIN; con essa l'A. riassume in una sola parola il concetto di WALDEYER che la sostanza fondamentale derivi da metamorfosi del protoplasma, non da secrezione. Nel senso di HANSEN invece la parola *ectoplasma* indica soltanto la parte periferica della cellula, avente la proprietà di produrre gli elementi formati, che successivamente passano nella sostanza fondamentale (fibre collagene nel caso del tessuto connettivo fibroso).

A scanso di confusioni, dovendo riferire delle mie ricerche io mi atterrò alle denominazioni di *cellula* e *sostanza fondamentale*, e indicherò come *protoplasma* il plasma componente la cellula, come *metaplasma* quello componente la sostanza fondamentale.

⁂

Io ho seguito sistematicamente lo sviluppo del *lig. intervertebrale* delle prime vertebre lombari in 25 embrioni e feti

bovini, che, misurati freschi dal vertice alla radice della coda, presentavano le seguenti dimensioni:

I	mm. 21	VIII	mm. 76	XIV	mm. 132	XX	mm. 186
II	„ 33	IX	„ 87	XV	„ 141	XXI	„ 196
III	„ 41	X	„ 92	XVI	„ 151	XXII	„ 215
IV	„ 44	XI	„ 100	XVII	„ 165	XXIII	„ 220
V	„ 49	XII	„ 112	XVIII	„ 172	XXIV	„ 240
VI	„ 55	XIII	„ 120	XIX	„ 176	XXV	„ 250
VII	„ 63						

È noto come appunto sui dischi intervertebrali di feti bovini assai più grossi (oltre i 40 cm.) Hansen abbia potuto mettere in rilievo le particolarità, su cui fondò la sua teoria dell'ectoplasma.

Come liquido fissatore ho usato prevalentemente quello di Zenker, altre volte mi sono servito delle miscele di Mingazzini o di Bouin (formolo picrico-acetico) o di Kleinenberg. Per la decalcificazione, ove mi occorse, feci uso dell'acido tricloroacetico. Ho eseguito sezioni frontali comprendenti anche i corpi vertebrali adiacenti, e sezioni trasversali. Come metodi di colorazione ho scelto quelli che furono proposti come elettivi pel tessuto connettivo, e cioè la picrofucsina di Hansen, la miscela di Mallory (fucsina, Methylwasserblau, orange), l'ematossilina fosfomolibdica di Mallory secondo la modificazione di Ribbert con o senza safranina base (Curtis), il metodo di Bielschowsky modificato da Levi pel tessuto connettivo. Eccellenti risultati ottenni dalla triplice colorazione di Flemming (safranina, violetto di genziana, orange) e più che tutto dall'ematossilina ferrica di Heidenhain, sostituendo al differenziamento in allume ferrico ammoniacale il differenziamento in picrofucsina di Hansen. Quest' ultimo metodo è senza dubbio quello che svela contemporaneamente e con grande chiarezza il maggior numero di particolarità.

Nei più piccoli degli embrioni da me esaminati (da mm. 21 a mm. 87) si può osservare come il disco intervertebrale consti di una cavità pressochè centrale, contenente i resti della corda dorsale, nettamente delimitata da alcuni sottili strati di fine fibrille ondulate, parallele fra di loro ed all'asse del rachide. All'intorno di questa cavità esiste una zona, ove, su sezioni

frontali (più opportune delle trasversali, in cui le cellule appaiono un po' appiattite e viste di coltello), spiccano scarsi nuclei grossi, irregolarmente ovali o tondeggianti, di cui alcuni sono in divisione cariocinetica. I nuclei sono circondati da uno strato irregolare, sempre assai sottile, di protoplasma reticolare, che costituisce dei corpi cellulari, provvisti di scarsi prolungamenti. Le cellule così formate, irregolarissime per forma e dimensioni, talvolta anastomizzate fra di loro, sono immerse in una sostanza fondamentale a struttura finemente fibrillare, anzi si può dire che la loro periferia in alcuni punti sfuma in questa sostanza. Per ciò si riceve molto chiara l'impressione che la cellula altro non sia che l'addensamento perinucleare di un protoplasma comune, di cui la rimanente parte ha subìto una trasformazione fibrillare; il che collimerebbe con quanto Mall ha potuto rilevare nei primi stadii dello sviluppo del connettivo in Anfibii e Mammiferi. In mezzo alla trama di finissime fibrille, assolutamente disordinate, che solo pallidamente si colorano coi coloranti specifici del collageno, ma che si mettono facilmente in evidenza con molti altri metodi, compaiono delle lamine, che si colorano elettivamente come collageno, esse pure disordinate (Fig. 1[a]). Questo reperto deve essere paragonato a quello di Renaut, che descrisse, parteggiando per l'origine estracellulare delle fibre collagene, la formazione di una tramula di fibrille elementari nella sostanza fondamentale, e il secondario ordinamento e accollamento di esse a costituire dei fasci. Noterò subito che la differenza essenziale consiste nel significato da attribuirsi alla sostanza intercellulare in cui la trama fibrillare sorge. Per Renaut essa è la primitiva sostanza fondamentale mucosa; nei miei preparati il rapporto di continuità tra di essa e le cellule dimostra trattarsi di una parte differenziata del primitivo protoplasma comune (quale lo hanno descritto Retterer e Mall in stadii assai più precoci), cioè di un *metaplasma*. Osserverò pure come il disordine con cui sorgono le prime fibrille e anche le prime lamine contrasti con l'opinione di Ebner che le sollecitazioni meccaniche siano, almeno in questo caso, il fattore determinante della produzione delle fibrille; più probabilmente tali sollecitazioni sono uno dei fattori per cui le lamine, una volta formate, si orientano.

Dalla zona pericordale, sempre su sezioni frontali, si passa

progressivamente alle parti periferiche del disco. I nuclei si fanno gradatamente più piccoli e più numerosi, acquistano una forma allungata, e si dispongono secondo un certo numero di archi concentrici, rivolti con la loro concavità verso la zona centrale. Analogamente si dispongono le lamine, sempre più numerose e più ordinate, mentre, verso la periferia, appaiono fra di esse delle fibre isolate, che pare si possano ritenere una differenziazione per scomposizione delle lamine stesse.

Negli embrioni più piccoli, giungendo alle zone affatto esterne, ove le cellule sono molto numerose, non troviamo più delle lamine, ma soltanto delle fibre, piuttosto grosse ed isolate, apparentemente disposte senz'ordine, come le cellule, per cui molte, colpite trasversalmente, appaiono in forma di punti. Negli embrioni un poco più avanzati (49 mm.) appare invece ben evidente in queste porzioni più periferiche una speciale disposizione, che, a parte i caratteri del tessuto, si può vedere descritta e figurata da Fick nel disco intervertebrale adulto dell'Uomo. Le cellule, di forma allungata con nucleo a bastoncino e protoplasma granulare, e le fibre hanno direzione tale che si incontrano tutte sotto un determinato angolo (non retto) lungo linee arciformi dirette come le prime lamine formatesi; cellule e fibre sono tagliate obliquamente in modo da dare un aspetto pennato molto regolare e caratteristico alla sezione di ogni strato. Nelle sezioni frontali così vicine alla superficie ventrale del disco da interessarne solo le parti più periferiche, le cellule, sempre allungatissime, appaiono tutte orientate secondo due direzioni incrociantisi ad angolo ottuso. Qui non abbiamo più nè lamine, nè fibrille elementari, ma solo delle fibre parallele alle cellule, alcune delle quali così aderenti per un certo tratto al corpo cellulare da parere quasi una parte di esso che se ne distacchi, come Zachariadès avrebbe visto nell'aponeurosi del ginocchio e nel connettivo posto sotto il tendine di Achille nella rana. Le fibre hanno due caratteristiche: 1° di essere isolate e non mai raccolte in fasci; 2° di non avere il decorso ondulato solito delle fibre dei fasci connettivi definitivi. L'intimo rapporto di alcune di esse con le cellule, preso a sè, potrebbe senz'altro esser ritenuto come prova evidente della diretta origine della fibra da una o più cellule anastomizzate (Fig. 2), ma vediamo che questa può essere semplicemente un' apparenza, se noi pa-

ragoniamo questo reperto all'altro, assai facile a constatarsi nelle parti centrali del disco, di lamine, sorgenti in mezzo alla trama fibrillare intercellulare, accostate alle cellule in modo da parerne fino a un certo punto dipendenti. Sono visibili sufficienti gradi di passaggio per dimostrare che le lamine e le fibre non hanno un modo di originarsi diverso, ma piuttosto rappresentano due stadii successivi di uno stesso processo. Le lamine fanno assumere alla zona del disco intermedia fra la centrale e la periferica un aspetto tale, che alcuni AA. (Disse, O. Schultze) parlano di uno stadio precartilagineo, o anche cartilagineo del *lig. intervertebrale.* Retterer nega questo stadio e a me non accadde di osservarlo, è però certo che in un preparato col metodo di Bielschowsky-Levi in cui le cellule siano poco evidenti e appaia invece bene la trama fibrillare, si trova una notevole somiglianza tra la zona intermedia del disco e la cartilagine attigua (Fig. 3).

Le lamine formatesi nella zona pericordale si orientano, portandosi verso i corpi vertebrali, intorno alle cellule, che divengono più numerose e gradatamente di forma tondeggiante per passare alla cartilagine: quelle della zona intermedia passano nella cartilagine direttamente, mentre le fibre della zona più periferica vi giungono dopo essersi raccolte nuovamente in lamine.

Osserverò come le lamine, così penetrate nel disco, si possano seguire molto profondamente nella cartilagine, non si può anzi dire dove cessino, perchè tra le cellule piccole e numerose della zona di cartilagine confinante col disco troviamo dei setti di notevole densità, formati direttamente dalle lamine del disco; profondamente, ove le cellule sono un po' più distanti, i setti si risolvono nella sostanza fondamentale sotto forma di una tramula di fibrille di estrema finezza (Fig. 4), mentre a delimitare le cellule rimangono dei fasci un po' meno densi. Se a queste fibrille ne siano mescolate di simili, formatesi nella prima condrificazione diretta, che ha originato il corpo vertebrale, non si può stabilire; certo si è che tutta la sostanza fondamentale consta a quest'epoca di una trama fibrillare molto delicata, non paragonabile ad una rete con punti nodali ed anastomosi, poichè le fibrille a decorso ondulato pare solo che si accavallino. Le fibrille appaiono affatto indipendenti dalle cellule cartilaginee,

tanto negli strati profondi quanto nella zona di passaggio. Anche nella formazione dei gruppi isogeni, quando due cellule sono appena divise e queste cominciano ad allontanarsi, alcune fibrille si insinuano nel piccolo spazio che si forma tra le due cellule, e si avanzano sempre più profondamente e più numerose, formando una piccola lamina man mano che le cellule si allontanano; mentre apparirebbero subito fra le due membrane cellulari (sempre assai evidenti) per tutta l'estensione del loro contatto, se fossero un prodotto diretto della cellula. In periodi successivi quest' elegante trama, che si mette in evidenza facilmente con tutte le colorazioni elettive del collageno, viene mascherata: ricompare però sempre, e con questi precisi caratteri, nella sostanza fondamentale della cartilagine della zona di ossificazione, come fin dal 1877 LEBOUCQ aveva osservato. Ad essa ho voluto accennare, poichè, fra le tante formazioni, che a ragione o a torto furono interpretate come rappresentanti della sostanza collagena nella cartilagine jalina, merita certo considerazione. Invece essa è la più trascurata, limitandosi quasi tutti gli AA. a parlare di continuazione dei fasci connettivi del disco intervertebrale e in generale del pericondrio nella cartilagine, quale si vede ad esempio nella fig. 5ª riferentesi a stadii assai più avanzati. Qui i fasci collageni definitivi si arrestano in strati assai superficiali, e comparandoli con le fibrille che riappaiono nella zona di ossificazione, si può tosto rilevare come, almeno per la struttura, se non sostanzialmente, si tratti di due formazioni del tutto diverse.

Frequentissimi e ben riconoscibili sono gli artefatti provocati dai reagenti in queste esili fibrille; essi consistono essenzialmente in accollamenti nel senso della lunghezza, e, da soli, furono rilevati da molti AA., che interpretarono variamente questi, come gli artefatti di altra natura, facilissimi a prodursi nella cartilagine jalina. HANSEN e STUDNICKA se ne occuparono, dando loro il nome di *pseudostrutture*, ad indicare che esse non sono *preformate*, ma *predisposte*. Voglio però osservare che STUDNICKA considera come artefatti delle particolarità che forse non lo sono, così i prolungamenti cellulari, che, descritti da molti AA. (COLOMIATTI, TIZZONI, VOGEL, VAN DER STRICHT, FUSARI, LIONTI, SRDINKO, ecc.), si possono benissimo spiegare, almeno in molti casi, e nel nostro quando si trovano nelle parti più

vicine al disco intervertebrale, come cellule connettive che non hanno ancora compiuta la loro evoluzione in cellule cartilaginee durante la produzione della cartilagine d'apposizione.

Avanzando nello sviluppo, senza che per un certo tempo siano profondamente modificate le condizioni descritte, si estende maggiormente la zona pericordale e in essa aumenta notevolmente il numero delle cellule, dei loro prolungamenti e delle anastomosi, che le collegano. Questa zona si può considerare come il centro germinativo del disco intervertebrale, poichè qui appunto appaiono i primi fenomeni di produzione delle fibrille, ciò che del resto già implicitamente fu notato da HANSEN. Ora qui appunto, a partire dal feto di 92 mm. della mia serie, si rende evidente una nuova e ben più attiva produzione di fibrille collagene, che presto assumono i caratteri tipici delle fibrille definitive (aggruppamento in fasci, decorso ondulato). Questa nuova produzione avviene secondo un processo alquanto differente, almeno nei particolari, da quello sopra descritto. Le particolarità che erano fino ad ora visibili nella sostanza fondamentale gradatamente si fanno meno evidenti, per lasciar posto (fig. 6ª, feto di 112 mm.) ad una struttura reticolare, perfettamente analoga a quella del protoplasma perinucleare; quest'ultimo si distingue solo per una densità e una colorabilità un po' maggiore. Vi ha anzi uno stadio, invero molto fuggevole, in cui non si può neppure rilevare la lieve differenza tra il protoplasma perinucleare e il metaplasma della sostanza fondamentale, per il che possiamo ritenerci di fronte ad un sincizio quasi tipico. Specialmente nelle parti laterali della zona pericordale si notano nel sincizio delle modificazioni di colorabilità per cui nelle sezioni frontali appaiono alcune striscie arciformi, con la concavità guardante verso i resti della corda (notevolmente aumentati di volume, ma ancora ben delimitati), striscie che hanno assunta la colorazione tipica delle fibre collagene, ad esempio un colore lilla caratteristico con l'ematossilina MALLORY-RIBBERT. Di fronte a questo reperto, a parte le differenti condizioni, dipendenti dal genere diverso di tessuto studiato, non si può far a meno di pensare al *precollageno* di LAGUESSE, nel quale sorgeranno le fibrille collagene definitive.

Basta infatti passare a parti più periferiche, per vedere tosto gli archi colorati come collageno, alternati con altri, colo-

rati semplicemente come protoplasma comune, farsi sempre più frequenti e disegnarsi in essi dei fascetti di fibrille.

Non mi riuscì di poter stabilire il destino delle lamine e delle fibre diritte ed isolate che caratterizzavano il tessuto nei primi periodi dello sviluppo. Sono esse ricacciate negli strati assolutamente più periferici, o, almeno per ciò che riguarda le lamine, vengono mascherate o forse anche utilizzate per la formazione del nuovo sincizio? Io non ne vidi più traccia alcuna nè in questo stadio nè nei successivi.

Altrettanto utili e dimostrative sono le sezioni trasversali. Alcuni punti della zona pericordale presentano ancora lo stato sinciziale; appaiono cioè i nuclei, circondati da un protoplasma nettamente reticolare, con vacuoli evidentissimi e con diversi prolungamenti, il quale si perde gradatamente in un metaplasma più pallidamente colorato, pure reticolare e vacuolizzato. Si può assistere alla graduale fibrillazione del metaplasma intercellulare dapprima (parti centrali del disco) e poi dei prolungamenti e perfino degli interi corpi cellulari (parti periferiche). L'accrescimento e la fusione dei vacuoli appaiono fattori concomitanti della formazione delle fibrille (fig. 7[a], feto di mm. 141): questo ci richiama alla mente che, fin dal 1871, Rollet aveva attribuito la formazione delle fibrille al modo di comportarsi degli spazi che si determinano nel metaplasma da lui descritto come *Prägung* delle fibrille stesse.

Le fibre si producono dapprima nella parte del sincizio che reagisce come collageno, ma poi anche in quella che reagisce solo come protoplasma; la picrofucsina di Hansen mette bene in evidenza soltanto la parte collagena.

Quanto Hansen ha descritto in stadii più avanzati (nei quali, come ho potuto controllare su due feti di 40 cm. circa non considerati nella serie, i fatti, che ora descrivo, si manifestano ancora) mi pare sia soltanto una parte del fenomeno complessivo. Posseggo infatti dei preparati alla picrofucsina, secondo il metodo di questo A., in cui il mantello di fibrille intorno alle cellule (ectoplasma di Hansen) è evidente, mentre assai meno chiare sono le altre particolarità. Hansen in vero accenna al fatto che nel disco intervertebrale ci sono fibrille connettive che hanno origine estracellulare, ma non si ferma a spiegare per qual processo esse si formino.

Procedendo, nell'esame delle sezioni trasversali, dal centro alla periferia si vedono le cellule farsi sempre più piccole e le fibre sempre più stipate e più ordinate secondo strati concentrici, e fra di esse aumenta progressivamente il numero di quelle che reagiscono come collageno definitivo. Il metodo più utile per la dimostrazione di questo stadio è quello dell'ematossilina HEIDENHAIN differenziata con picrofucsina HANSEN.

In stadii successivi non si osservano modificazioni notevoli; seguita la produzione di fibrille nel modo ora indicato, e, siccome per molto tempo il sincizio pericordale non scompare, bisogna ammettere che veramente esso sia il focolaio di produzione della sostanza generatrice di fibrille. Queste aumentano enormemente di numero per le nuove aggiunte, e forse anche perchè crescono e si moltiplicano indipendentemente le già formate (HEIDENHAIN).

La cavità contenente i resti della corda, che si dilata ancora e perde i suoi limiti netti, su sezioni frontali appare circondata dallo strato sinciziale; intorno a questo sono dei fasci connettivi già sviluppati a decorso ellittico, che lo limitano anche verso la cartilagine; la zona esterna (*annulus fibrosus*) presenta numerosissimi strati ad arco, a cui i fasci collageni, tagliati obliquamente, dànno l'aspetto penniforme già ricordato.

Nel feto di 220 mm. si osserva che alcune cellule dello strato di fibre a decorso ellittico vengono a trovarsi in cavità ben delimitate dalle fibre collagene; così esordisce la formazione delle cellule cartilaginee, prima che esse si circondino delle caratteristiche capsule, secondo il processo descritto da HANSEN, per cui il disco, fin qui formato di puro tessuto connettivo fibroso, passa, in qualche parte almeno, ad una struttura fibrocartilaginea.

Il processo, per cui si formano i fasci collageni definitivi nel *lig. intervertebrale*, apparentemente si può ridurre allo schema di STUDNICKA. Le stesse figure che si osservano sui preparati vi corrispondono assai bene: però bisogna tener presenti alcuni fatti che in questo schema non sono considerati.

Il primo e più importante si è che le fibre, le quali presentano fin dall'inizio della loro formazione i caratteri del collageno, sorgono in determinate zone del sincizio che hanno modificata la reazione chimica, e sono così disposte da preludere già, almeno

in modo grossolano, alla direzione dei fasci futuri; zone che comprendono cellule e sostanza intercellulare. Perciò in questo caso sarebbe insufficiente ed inesatto limitarci a dire con STUDNICKA che le fibre si formano o si raccolgono nell'ectoplasma. Un secondo fatto notevole è l'accrescimento dei vacuoli durante la produzione delle fibre, sia quando queste sorgono nella sostanza intercellulare, sia quando sorgono nel corpo cellulare. STUDNICKA, attenendosi all'opinione di FLEMMING, ritiene le fibrille collagene omologhe delle fibrille protoplasmatiche di altre cellule (ad esempio delle cellule epiteliali) e le fa originare dapprima nell'intera cellula; solo più tardi esse si raccoglierebbero alla periferia costituendo l'ectoplasma. Le nostre osservazioni ci portano a ritenere, che esse si formino dapprima nel metaplasma intercellulare poi anche nel corpo cellulare secondo un processo analogo per ambedue i luoghi. Un terzo fatto notevole è che non tutte le fibre reagiscono fin dall'inizio come vero collageno, ma parecchie acquistano solo secondariamente questa reazione.

A proposito della cartilagine dei corpi vertebrali, senza fermarmi sui fatti già noti della penetrazione in essa dei fasci fibrosi del disco (fig. 5ª) e del pericondrio, ricorderò come sempre, anche negli stadii più avanzati da me presi in esame, la struttura a fini fibrille si smascheri nella zona di ossificazione.

Inoltre, a un certo periodo dello sviluppo, quando il centro di ossificazione del corpo vertebrale si è abbastanza avvicinato a quello dell'arco (feti di mm. 186-196) compare una struttura a lamine, che su sezioni trasversali ha l'aspetto di un reticolo. Per l'identità delle figure e della descrizione io non dubito punto che essa corrisponda (fig. 8ª) alla “*formation cloisonnante*„ di RENAUT. La miscela di MALLORY pel connettivo dimostra chiaramente la formazione in questione colorandola più intensamente che la sostanza fondamentale. STUDNICKA classifica anche questa fra le pseudostrutture, come del resto aveva fatto HANSEN, e alcuni miei preparati di stadii precedenti appoggerebbero fino a un certo punto questa ipotesi. Vi contrasta però un fatto, ed è che il reticolo in determinati luoghi modifica la sua disposizione in modo veramente utile per la funzione.

Esso infatti, formato di maglie poligonali abbastanza regolari in quasi tutta l'estensione della sezione, consta di maglie

molto allungate tra il centro di ossificazione del corpo e quello dell'arco; così i pezzi di sostanza fondamentale inclusi nelle maglie, stretti ed allungati in direzione perpendicolare a quella della risultante delle forze, che possono sollecitare l'arco, hanno la disposizione più opportuna per distribuire equamente sul corpo vertebrale le pressioni trasmesse dall'arco.

Non escludo che si possa trattare di accollamento di fibrille mascherate dalla sostanza condromucoide basofila, ma non è del tutto improbabile che questo accollamento, anzichè essere artificiale, rappresenti una preformata struttura funzionale.

* * *

Volendo riassumere abbiamo visto che nel *ligamentum intervertebrale* si possono seguire due periodi istogenetici ben distinti, caratterizzati da un diverso modo di formarsi e di presentarsi delle fibre collagene.

Nel *primo periodo* vediamo sorgere una trama di fibrille elementari, che si compongono successivamente in lamine e fibre, paragonabile a quella descritta da Renaut. Si devono però fare delle riserve sul modo di considerare la sostanza fondamentale intercellulare, in cui compaiono le fibrille: essa non si può intendere come un prodotto di secrezione amorfo ed inerte, ma deve ritenersi come un vero *metaplasma*. Le fibre mature in questo periodo sono sempre piuttosto grosse, liscie, quasi perfettamente rettilinee, non mai raccolte in fasci.

Durante lo svolgersi di questo periodo, la cartilagine dei corpi vertebrali cresce rapidamente per apposizione di nuovi strati da parte del disco, e in questo accrescimento del tessuto cartilagineo per apposizione vi si stabilisce la trama collagena. Questa è destinata a persistere con gli stessi caratteri anche durante il secondo periodo dello sviluppo del disco.

Nel *secondo periodo* istogenetico del disco intervertebrale la formazione delle fibre collagene avviene in seno ad un sincizio, nel quale possiamo ben presto distinguere un *protoplasma* perinucleare, che costituisce delle cellule ramificate, ed un *metaplasma* che costituisce la sostanza fondamentale intercellulare. Le fibre possono formarsi in una parte del sincizio che reagisce già come collageno, oppure nel sincizio stesso allo stato primitivo,

e assumere dopo le reazioni del collageno. Esse a completo sviluppo sono sottili, ondulate, sempre raccolte in fasci.

Molti dei singoli fatti, che ebbi occasione di rilevare, concordano con l'una o con l'altra delle teorie fino ad oggi emesse sull'istogenesi delle fibre collagene, e ciò prova che le divergenze piuttosto che ad errori di interpretazione, od all'osservazione di artefatti prodotti dai reattivi sono imputabili a incompiutezza di osservazione. Potremo cercare la regola generale, se pure esiste, che presiede alla formazione di tutte le fibre collagene, solo quando conosceremo completamente l'istogenesi di tutti gli organi che ne contengono.

Dall'Istituto anat. dell'Univ. di Torino, diretto dal prof. Romeo Fusari.
Dicembre 1908.

BIBLIOGRAFIA

Per brevità citerò soltanto, fra i molti lavori consultati, quelli più recenti e che contengono delle rassegne riassuntive sull'istogenesi del tessuto connettivo, segnando con asterisco (*) quelli che contengono anche gli elenchi bibliografici più completi.

Ebner, *Die Chorda dorsalis der niederen Fische und die Entwicklung des fibrillären Bindegewebes*, " Zeitschrift f. wiss. Zoologie „, Bd. 62, pag. 469, 1897.

— *Ueber die Entwicklung der leimgebenden Fibrillen, inbesondere in Zahnbein*, " Sitzungsber. der kaiserl. Akad. der Wissenschaften in Wien. Math.-naturw. Klasse „, Bd. 115, Abt. 3, pag. 285, 1906.

*Flemming, *Die Histogenese der Stützsubstanzen, ecc.*, in " O. Hertwig's Handbuch der vergleich. und experim. Entwickelungslehre der Wirbeltiere „, Bd. III, Th. II. Jena, 1906.

Fusari, *Trattato elementare di Istologia generale*, Torino, 1909.

Fusari e Monti, *Compendio di Istologia generale*, Torino, 1891.

*Golowinski, *Zur Kenntniss der Histogenese der Bindegewebsfibrillen*, " Anatomische Hefte „, H. 99 (Bd. 33 H. 1), 1907.

*Hansen, *Untersuchungen ueber die Gruppe der Bindesubstanzen: I. Der hyalin Knorpel*, " Anatomische Hefte „, H. 83 (Bd. 27 H. 3), 1905.

*Heidenhain, *Plasma und Zelle: I. Allgemeine Anatomie der lebendigen Massen*, in " Bardeleben's Handbuch der Anatomie des Menschen „, Jena, 1907.

*LAGUESSE, *Sur l'histogenèse de la fibre collagène et de la substance fondamentale dans la capsule de la rate chez les Sélaciens*, "Archives d'Anatomie microscopique „, T. 6, pag. 99, 1903-04.

PRENANT, BOUIN e MAILLARD, *Traité d'Histologie*, T. 1, Paris, 1904.

RENAUT, *Traité d'Histologie pratique*, T. 1, Paris, 1893.

RETTERER. Si consultino di questo A. i numerosi lavori contenuti in: " Journal de l'Anatomie et de la Physiologie „, annate 1892 e 1900; " C. R. de la Soc. de Biologie „, annate 1899, 1905, 1907, 1908; " C. R. de l'Association des Anatomistes „, Montpellier, 1902; " C. R. de l'Acad. des Sciences „, Paris, 1908 (N. 1).

*SPULER, *Beiträge zur Histiologie und Histiogenese der Binde- und Stütz-Substanz*, " Anatomische Hefte „, H. 21 (Bd. 7, H. 1), 1896.

STUDNICKA, *Sckematische Darstellungen zur Entwickelungsgeschichte einiger Gewebe*, " Anat. Anzeiger „, Bd. 22, pag. 537, 1903.

*— *Histologische und histogenetische Untersuchungen über das Knorpel, Vorknorpel und Chordagewebe*, " Anatomische Hefte „, H. 67 (Bd. 21, H. 2), 1903.

*SZILY, *Ueber des Entstehen eines fibrillären Stützgewebes im Embryo und dessen Verhältniss zum Glaskörperfrage*, " Anatomische Hefte „, H. 107 (Bd. 35, H. 3), 1908.

Per quanto riguarda l'istogenesi del *lig. intervertebrale* in particolare citerò:

DISSE, *Skeletlehre* (*Wirbelsäure, Thorax*), in " Bardeleben's Handbuch der Anatomie des Menschen „, Jena, 1896.

FICK, *Gelenke*, ibidem, Jena, 1904.

HANSEN, *Ueber die Genese einiger Bindegewebsgrundsubstanzen*, " Anatom. Anzeiger „, Bd. 26, pag. 417, 1899.

KÖLLIKER, *Handbuch der Gewebenlehre des Menschen*, Bd. 1, Leipzig, 1889.

— *Embryologie* (versione francese di A. SCHNEIDER), Paris, 1882.

ROBIN, *Dictionnaire enciclopédique des sciences médicales*. Voci: *Cartilage, Fibreux, Rachis*.

— *Mémoire sur le développement des vertèbres*, " Journal de l'Anat. et de la Phys. „, 1864, pag. 274.

SCHNEIDER, *Lehrbuch der vergleich. Histologie*, Jena, 1902.

SCHULTZE O., *Grundriss der Entwicklungsgeschichte des Menschen und der Säugethiere*, Leipzig, 1897.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. 1ª. — Zona pericordale del disco intervertebrale di un embrione bovino di mm. 33. Sezione frontale. *Fissazione*: Zenker; *colorazione*: *ematossilina* Mallory-Ribbert e *safranina base* (Curtis); imm. omog. $^1/_{12}$, Zeiss, tubo mm. 160, oc. 4.

Fig. 2ª. — Sezione frontale vicina alla superficie ventrale del disco intervertebrale di un embrione bovino di mm. 49. *Fissazione e colorazione* come sopra, imm. omog. 1,5 mm., ap. 1,30, Zeiss, tubo mm. 160, oc. 8 comp.

Fig. 3ª. — Parte del disco intervertebrale (*d*) e della cartilagine del corpo vertebrale (*c*) di un embrione bovino di mm. 55. Sezione frontale. *Fissazione*: Zenker; *colorazione*: Bielschowsky-Levi; imm. omog. $^1/_{12}$, Zeiss, tubo mm. 160, oc. 4.

Fig. 4ª. — Particolare della sostanza fondamentale della cartilagine nel preparato precedente, imm. omog. 1,5 mm., ap. 1,30, Zeiss, tubo mm. 160, oc. 8 comp.

Fig. 5ª. — Passaggio dal disco intervertebrale (parti periferiche) alla cartilagine. Feto bovino di mm. 92. Sezione frontale. *Fissazione*: Zenker; *colorazione*: *ematossilina* Mallory-Ribbert; imm. omog. $^1/_{12}$ Zeiss, tubo mm. 160, oc. 6 comp.

Fig. 6ª. — Disco intervertebrale di un feto bovino di mm. 120. Sezione frontale della zona pericordale. *Fissazione e colorazione* come sopra; imm. omog. $^1/_{12}$, Zeiss, tubo mm. 160, oc. 4.

Fig. 7ª. — Cellule con vacuoli in cui si originano delle fibre collagene. Disco intervertebrale di feto bovino di mm. 141 Sezione trasversale. *Fissazione*: Zenker; *colorazione*: *ematossilina ferrica* Heidenhain e *picrofucsina* Hansen; imm. omog. $^1/_{12}$, Zeiss, tubo mm. 160, oc. 4.

Fig. 8ª. — Sezione trasversale del corpo di una vertebra lombare di un feto bovino di mm. 196. Dimostra la *formation cloisonnante* di Renaut a maglie poligonali in basso, a maglie allungate in alto, tra il centro di ossificazione del corpo (*a*) e quello dell'arco (*b*). *Fissazione*: Zenker; *decalcificazione*: *acido tricloroacetico*; *colorazione*: *miscela di* Mallory, ob. 5 Koristka, oc. 4.

Su la composizione delle vibrazioni armoniche.

Nota di ANTONIO GARBASSO.

(Con una Tavola).

§ 1. — Nelle mie *Vorlesungen über theoretische Spektroskopie* [1] (pag. 65 e seguenti) ho indicato un artificio meccanico, il quale permette di comporre insieme, automaticamente, un numero qualunque di moti armonici.

Io mi propongo adesso di svolgere la teoria di tale disposizione, e di indicare le norme che si devono seguire per la migliore riuscita delle esperienze.

Accennerò anche ad alcuni resultati preliminari.

Una tavoletta, sospesa a foggia di pendolo, reca n altri pendoli di varie lunghezze. Per rendere possibile il calcolo consideriamo i singoli elementi del sistema come pendoli *semplici*.

Sia l_0 la *lunghezza* del pendolo costituito dalla tavoletta, e l_ν la *lunghezza* del ν-esimo pendolo inferiore ($\nu = 1, 2, \ldots, n$).

Sia poi m_0 la *massa* della tavoletta e m_ν la *massa* della lente per il ν-esimo pendolo inferiore.

Le posizioni si determinano con variabili angolari

$$\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\nu, \ldots, \theta_n.$$

L'energia cinetica del sistema avrà la forma

$$(1) \qquad T = \frac{1}{2}\left[m_0 l_0^2 \dot{\theta}_0^2 + \sum_1^n{}_\nu\, m_\nu (l_0 \dot{\theta}_0 + l_\nu \dot{\theta}_\nu)^2\right],$$

e la potenziale sarà

$$(2) \qquad U = \frac{g}{2}\left[m_0 l_0 \theta_0^2 + \sum_1^n{}_\nu\, m_\nu (l_0 \theta_0^2 + l_\nu \theta_\nu^2)\right] \ [2].$$

---

[1] Il libro porta la data del 1906, ma fu pubblicato realmente nel dicembre del 1905.

[2] Si considerano solamente oscillazioni di minima ampiezza.

Le equazioni di LAGRANGE si scrivono dunque

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot\theta_0} + \dfrac{\partial U}{\partial \theta_0} = 0\,, \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot\theta_\nu} + \dfrac{\partial U}{\partial \theta_\nu} = 0. \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Ma sostituendo per T ed U le loro espressioni (1) e (2) le (3) diventano

$$(4)\qquad \begin{cases} m_0 l_0 \ddot\theta_0 + \sum_1^n{}_\nu\, m_\nu (l_0\ddot\theta_0 + l_\nu \ddot\theta_\nu) + g(m_0 + \sum_1^n{}_\nu\, m_\nu)\,\theta_0 = 0, \\[1ex] l_0\,\ddot\theta_0 + l_\nu\,\ddot\theta_\nu + g\theta_\nu = 0. \end{cases}$$

La prima delle (4) assume poi un aspetto più semplice se si scrive

$$c_\nu = \frac{m_\nu}{m_0}\,;$$

e il sistema si riduce alla forma

$$(5)\qquad \begin{cases} l_0\,\ddot\theta_0 + \sum_1^n{}_\nu\, c_\nu (l_0\ddot\theta_0 + l_\nu\,\ddot\theta_\nu) + g(1 + \sum_1^n{}_\nu\, c_\nu)\theta_0 = 0\,, \\[1ex] l_0\ddot\theta_0 + l_\nu\,\ddot\theta_\nu + g\theta_\nu = 0. \end{cases}$$

Ponendo ancora, secondo una notazione ben conosciuta,

$$D^2 = \frac{d^2}{dt^2}\,,$$

risulta dalle (5)

$$(6)\qquad \begin{cases} [l_0(1 + \sum_1^n{}_\nu\, c_\nu)D^2 + g(1 + \sum_1^n{}_\nu\, c_\nu)]\,\theta_0 + D^2 \sum_1^n{}_\nu\, c_\nu\, l_\nu\,\theta_\nu = 0, \\[1ex] l_0 D^2\theta_0 + (l_\nu D^2 + g)\theta_\nu = 0. \end{cases}$$

Moltiplichiamo ciascuna delle equazioni rappresentate dalla seconda delle (6) per il c_ν corrispondente, e sommiamo. Verrà

$$l_0 D^2 \sum_1^n{}_\nu\, c_\nu\,\theta_0 + D^2 \sum_1^n{}_\nu\, c_\nu\, l_\nu\,\theta_\nu = -\,g \sum_1^n{}_\nu\, c_\nu\,\theta_\nu\,,$$

e le (6) assumeranno l'aspetto definitivo

$$(7)\qquad \begin{cases} [l_0 D^2 + g(1 + \sum_1^n{}_\nu c_\nu)]\theta_0 - g \sum_1^n{}_\nu c_\nu \theta_\nu = 0 \,, \\ l_0 D^2 \theta_0 + (l_\nu D^2 + g)\theta_\nu = 0. \end{cases}$$

La caratteristica del sistema (7) potremo scriverla sotto la forma

$$\begin{vmatrix} l_0 D^2 + g(1 + \sum_1^n{}_\nu c_\nu) & -gc_1 & -gc_2 & \dots & -gc_n \\ l_0 D^2 & l_1 D^2 + g & 0 & \dots & 0 \\ l_0 D^2 & 0 & l_2 D^2 + g & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_0 D^2 & 0 & 0 & \dots & l_n D^2 + g \end{vmatrix} = 0,$$

ovvero, addizionando tutte le verticali alla prima,

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} l_0 D^2 + g & -gc_1 & -gc_2 & \dots & -gc_n \\ (l_0 + l_1) D^2 + g & l_1 D^2 + g & 0 & \dots & 0 \\ (l_0 + l_2) D^2 + g & 0 & l_2 D^2 + g & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (l_0 + l_n) D^2 + g & 0 & 0 & \dots & l_n D^2 + g \end{vmatrix} = 0.$$

Svolgendo la (8) si ottiene, come è facile vedere,

$$(9)\qquad \left\{ (l_0 D^2 + g) + g \sum_1^n{}_\nu \frac{c_\nu[(l_0 + l_\nu)D^2 + g]}{l_\nu D^2 + g} \right\} \prod_1^n{}_\mu (l_\mu D^2 + g) = 0.$$

A questo punto si osserverà che è identicamente

$$(10)\qquad gc_\nu[(l_0 + l_\nu)D^2 + g] = \frac{gc_\nu}{l_0 - l_\nu}\,[l_0(l_0 D^2 + g) - l_\nu(l_\nu D^2 + g)].$$

Ora, facendo uso della (10), la (9) diventa

$$(11)\quad \left\{(l_0D^2+g)\left[1+gl_0\sum_1^n\nu\frac{c_\nu}{(l_0-l_\nu)(l_\nu D^2+g)}\right]-g\sum_1^n\nu\frac{c_\nu l_\nu}{l_0-l_\nu}\right\}\cdot \prod_1^n\mu(l_\mu D^2+g)=0.$$

Consideriamo adesso l'equazione

$$(12)\quad \left(l_0D^2+g-g\sum_1^n\nu\frac{c_\nu l_\nu}{l_0-l_\nu}\right)\prod_1^n\mu\left(l_\mu D^2+g+g\frac{c_\mu l_0}{l_0-l_\mu}\right)=0,$$

svolgendola risulta

$$\left\{(l_0D^2+g)\left[1+gl_0\sum_1^n\nu\frac{c_\nu}{(l_0-l_\nu)(l_\nu D^2+g)}\right]-g\sum_1^n\frac{c_\nu l_\nu}{l_0-l_\nu}\right\}\cdot \prod_1^n\mu(l_\mu D^2+g)+\Gamma=0,$$

dove con Γ si è indicata una somma di termini, che sono di secondo ordine, o di ordini superiori, nelle c_ν.

A meno di termini di questa natura la (12) coincide dunque con la (11), o, in altre parole, la (11) ha per radici

$$\begin{cases} D^2=-\dfrac{g}{l_0}\left(1-\sum_1^n\nu\dfrac{c_\nu l_\nu}{l_0-l_\nu}\right), \\ D^2=-\dfrac{g}{l_\nu}\left(1+\dfrac{c_\nu l_0}{l_0-l_\nu}\right); \qquad (\nu=1,2,\ldots,n) \end{cases}$$

o ancora

$$(13)\quad \begin{cases} D=\pm i\sqrt{\dfrac{g}{l_0}}\left(1-\dfrac{1}{2}\sum_1^n\nu\dfrac{c_\nu l_\nu}{l_0-l_\nu}\right), \\ D=\pm i\sqrt{\dfrac{g}{l_\nu}}\left(1+\dfrac{1}{2}\dfrac{c_\nu l_0}{l_0-l_\nu}\right). \qquad (\nu=1,2,\ldots,n) \end{cases}$$

Di qui si deducono i periodi

$$(14)\quad \begin{cases} T_0^*=2\pi\sqrt{\dfrac{l_0}{g}}\left(1+\dfrac{1}{2}\sum_1^n\nu\dfrac{c_\nu l_\nu}{l_0-l_\nu}\right), \\ T_\nu^*=2\pi\sqrt{\dfrac{l_\nu}{g}}\left(1-\dfrac{1}{2}\dfrac{c_\nu l_0}{l_0-l_\nu}\right); \qquad (\nu=1,2,\ldots,n) \end{cases}$$

vale a dire, se si pone per semplicità

$$(14)\qquad \begin{cases} T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_0}{g}} = 2\pi\tau_0, \\ T_\nu = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_\nu}{g}} = 2\pi\tau_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

e si sostituisce,

$$(15)\qquad \begin{cases} T_0^* = T_0\left(1 + \dfrac{1}{2}\sum_1^n{}_\nu \dfrac{c_\nu l_\nu}{l_0 - l_\nu}\right), \\ T_\nu^* = T_\nu\left(1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{c_\nu l_0}{l_0 - l_\nu}\right), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

ossia

$$(16)\qquad \begin{cases} T_0^* = 2\pi\tau_0^*, \\ T_\nu^* = 2\pi\tau_\nu^*, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

con

$$(17)\qquad \begin{cases} \tau_0^* = \tau_0\left(1 + \dfrac{1}{2}\sum_1^n{}_\nu \dfrac{c_\nu l_\nu}{l_0 - l_\nu}\right), \\ \tau_\nu^* = \tau_\nu\left(1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{c_\nu l_0}{l_0 - l_\nu}\right). \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

Le T_0 e T_ν definite dalla (14) hanno un significato fisico immediatamente chiaro; esse rappresentano infatti i periodi che spetterebbero ai singoli pendoli del sistema, quando oscillassero separatamente e fossero sospesi a punti fissi.

Ne concludiamo intanto che la θ_0 e ogni θ_ν risulteranno dalla somma di $2(n+1)$ termini periodici, coi periodi

$$T_0^*,\ T_1^*,\ T_2^*,\ \ldots,\ T_n^*,$$

leggermente diversi da quelli che corrispondono ai pendoli isolati. Ogni periodo ricompare due volte.

§ 2. — Ciò posto, riprendiamo le (7) e scriviamole anzitutto, tenendo conto delle (14), sotto la forma

$$(18)\qquad \begin{cases} (\tau_0^2 D^2 + 1 + \sum_1^n{}_\nu c_\nu)\theta_0 - \sum_1^n{}_\nu c_\nu\theta_\nu = 0, \\ \tau_0^2 D^2\theta_0 + (\tau_\nu^2 D^2 + 1)\theta_\nu = 0; \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

e poniamo ancora

$$(19)\quad \theta_0 = A_0 \cos \frac{t}{\tau_0{}^*} + B_0 \sin \frac{t}{\tau_0{}^*} + \sum_1^n{}_\mu \left(A_\mu \cos \frac{t}{\tau_\mu{}^*} + B_\mu \sin \frac{t}{\tau_\mu{}^*} \right).$$

La seconda delle (18) fornisce immediatamente

$$\theta_\nu = - \frac{\tau_0{}^2 D^2}{\tau_\nu{}^2 D^2 + 1}\, \theta_0\,,$$

ovvero, per la (19),

$$(20)\quad \begin{aligned} \theta_\nu = & \frac{\left(\frac{\tau_0}{\tau_0{}^*}\right)^2}{1 - \left(\frac{\tau_\nu}{\tau_0{}^*}\right)^2} \left(A_0 \cos \frac{t}{\tau_0{}^*} + B_0 \sin \frac{t}{\tau_0{}^*} \right) + \\ & + \sum_1^n{}_\mu \frac{\left(\frac{\tau_0}{\tau_\mu{}^*}\right)^2}{1 - \left(\frac{\tau_\nu}{\tau_\mu{}^*}\right)^2} \left(A_\mu \cos \frac{t}{\tau_\mu{}^*} + B_\mu \sin \frac{t}{\tau_\mu{}^*} \right). \end{aligned}$$

Tenendo conto delle (16) viene

$$\begin{aligned} \theta_\nu = & \frac{1 - \sum_1^n{}_\mu \frac{c_\mu l_\mu}{l_0 - l_\mu}}{1 - \left(\frac{\tau_\nu}{\tau_0}\right)^2 . \left(1 - \sum_1^n{}_\mu \frac{c_\mu l_\mu}{l_0 - l_\mu}\right)} \left(A_0 \cos \frac{t}{\tau_0{}^*} + B_0 \sin \frac{t}{\tau_0{}^*} \right) + \\ & + \sum_1^n{}_\mu \frac{\left(\frac{\tau_0}{\tau_\mu}\right)^2 . \left(1 + \frac{c_\mu l_0}{l_0 - l_\mu}\right)}{1 - \left(\frac{\tau_\nu}{\tau_\mu}\right)^2 . \left(1 + \frac{c_\mu l_0}{l_0 - l_\mu}\right)} \left(A_\mu \cos \frac{t}{\tau_\mu{}^*} + B_\mu \sin \frac{t}{\tau_\mu{}^*} \right), \end{aligned}$$

o, con facili riduzioni,

$$\begin{aligned} \theta_\nu = & \frac{\tau_0{}^2}{\tau_0{}^2 - \tau_\nu{}^2} \left(1 - \frac{\tau_0{}^2}{\tau_0{}^2 - \tau_\nu{}^2} \sum_1^n{}_\mu \frac{c_\mu l_\mu}{l_0 - l_\mu} \right) \left(A_0 \cos \frac{t}{\tau_0{}^*} + B_0 \sin \frac{t}{\tau_0{}^*} \right) + \\ & + \left(\sum_1^{\nu-1}{}_\mu + \sum_{\nu+1}^n{}_\mu \right) \left[\frac{\tau_0{}^2}{\tau_\mu{}^2 - \tau_\nu{}^2} \left(1 + \frac{\tau_\mu{}^2}{\tau_\mu{}^2 - \tau_\nu{}^2} \frac{c_\mu l_0}{l_0 - l_\mu} \right) \left(A_\mu \cos \frac{t}{\tau_\mu{}^*} + \right.\right. \\ & \left.\left. + B_\mu \sin \frac{t}{\tau_\mu{}^*} \right) \right] - \\ & - \left(\frac{\tau_0}{\tau_\nu}\right)^2 \frac{l_0 - l_\nu}{c_\nu l_0} \left(A_\nu \cos \frac{t}{\tau_\nu{}^*} + B_\nu \sin \frac{t}{\tau_\nu{}^*} \right), \end{aligned}$$

e nei soliti limiti di approssimazione

$$
(21)\qquad \begin{aligned}
\theta_\nu = \frac{\tau_0^2}{\tau_0^2-\tau_\nu^2}\left(A_0\cos\frac{t}{\tau_0^*}+B_0\sin\frac{t}{\tau_0^*}\right)+ \\
+\left(\sum_1^{\nu-1}\mu+\sum_{\nu+1}^{n}\mu\right).\frac{\tau_0^2}{\tau\mu^2-\tau_\nu^2}\left(A\mu\cos\frac{t}{\tau\mu^*}+B\mu\sin\frac{t}{\tau\mu^*}\right)- \\
-\left(\frac{\tau_0}{\tau_\nu}\right)^2\frac{l_0-l_\nu}{c_\nu l_0}\left(A\nu\cos\frac{t}{\tau_\nu^*}+B\nu\sin\frac{t}{\tau_\nu^*}\right).
\end{aligned}
$$

§ 3. — Noi poniamo adesso, come condizioni iniziali,

$$
\theta_0=0,\qquad \dot\theta_0=0,
$$
$$
\theta\nu=\Theta\nu,\qquad \dot\theta\nu=0,
$$

e otteniamo anzitutto, per la (19) e la (21),

$$
(22)\quad \left\{\begin{aligned}
&\theta_0 = A_0\cos\frac{t}{\tau_0^*}+\sum_1^n\mu\, A\mu\cos\frac{t}{\tau\mu^*},\\
&\theta\nu = \frac{\tau_0^2}{\tau_0^2-\tau_\nu^2}A_0\cos\frac{t}{\tau_0^*}+\left(\sum_1^{\nu-1}\mu+\sum_{\nu+1}^{n}\mu\right)\frac{\tau_0^2}{\tau\mu^2-\tau_\nu^2}A\mu\cos\frac{t}{\tau\mu^*}\\
&\qquad -\alpha\nu A\nu\cos\frac{t}{\tau_\nu^*},
\end{aligned}\right.
$$

con

$$
(23)\qquad \alpha\nu=\left(\frac{\tau_0}{\tau_\nu}\right)^2\frac{l_0-l_\nu}{c_\nu l_0}=\left(\frac{\tau_0}{\tau_\nu}\right)^2\frac{\tau_0^2-\tau_\nu^2}{c_\nu\tau_0^2}=\frac{\tau_0^2-\tau_\nu^2}{c_\nu\tau_\nu^2}.
$$

Si avranno dunque per determinare le A le $n+1$ equazioni di condizione

$$
(24)\quad \left\{\begin{aligned}
&0=A_0+A_1+A_2+\ldots+A_n,\\
&\Theta_1=\frac{\tau_0^2}{\tau_0^2-\tau_1^2}A_0-\alpha_1A_1+\frac{\tau_0^2}{\tau_2^2-\tau_1^2}A_2+\ldots+\frac{\tau_0^2}{\tau_n^2-\tau_1^2}A_n,\\
&\Theta_2=\frac{\tau_0^2}{\tau_0^2-\tau_2^2}A_0+\frac{\tau_0^2}{\tau_1^2-\tau_2^2}A_1-\alpha_2A_2+\ldots+\frac{\tau_0^2}{\tau_n^2-\tau_2^2}A_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Theta_n=\frac{\tau_0^2}{\tau_0^2-\tau_n^2}A_0+\frac{\tau_0^2}{\tau_1^2-\tau_n^2}A_1+\frac{\tau_0^2}{\tau_2^2-\tau_1^2}A_2+\ldots-\alpha_nA_n.
\end{aligned}\right.
$$

§ 4. — Come primo esempio tratteremo il problema di un solo pendolo sospeso alla tavoletta.

Viene immediatamente dalle (22) e (23)

$$(25)\quad \begin{cases} \theta_0 = A_0\left(\cos\frac{t}{\tau_0{}^*} - \cos\frac{t}{\tau_1{}^*}\right), \\ \theta_1 = A_0\left(\frac{\tau_0^2}{\tau_0^2-\tau_1^2}\cos\frac{t}{\tau_0{}^*} + \frac{\tau_0^2-\tau_1^2}{c_1\tau_1^2}\cos\frac{t}{\tau_1{}^*}\right); \end{cases}$$

e se ne deduce dunque che il moto della tavoletta e quello del pendolo risulteranno da una serie di battimenti. Le massime ampiezze della prima oscillazione corrispondono alle minime della seconda, e reciprocamente.

§ 5. — La risoluzione delle (24) nel caso generale non dà luogo a nessuna difficoltà analitica, ma i calcoli diventano estremamente lunghi e faticosi.

Si possono scegliere però le condizioni dell'esperienza per modo che i termini nelle α diventino prevalenti; basta per questo fare assai piccole le c.

E allora le (24) prendono la nuova forma

$$(26)\quad \begin{cases} 0 = A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_n, \\ \Theta_\nu = -\alpha_\nu A_\nu. \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

In pratica, volendosi ottenere dalla tavoletta il moto risultante di n moti armonici, si devono considerare come date le A_ν, e si calcoleranno dunque le Θ_ν con la formola

$$(27)\quad \Theta_\nu = \frac{\tau_\nu^2 - \tau_0^2}{c_\nu \tau_\nu^2} A_\nu,$$

essendo

$$(28)\quad \begin{cases} \tau_0^2 = (\tau_0{}^*)^2 . \left[1 - \sum_1^n{}_\nu \frac{c_\nu(\tau_\nu{}^*)^2}{(\tau_0{}^*)^2 - (\tau_\nu{}^*)^2}\right], \\ \tau_\nu{}^2 = (\tau_\nu{}^*)^2 . \left[1 + \frac{c_\nu(\tau_0{}^*)^2}{(\tau_0{}^*)^2 - (\tau_\nu{}^*)^2}\right]. \end{cases}$$

E lo spostamento angolare della tavoletta sarà dato dalla

$$(29)\quad \theta_0 = -\cos\frac{t}{\tau_0{}^*} . \sum_1^n{}_\nu A_\nu + \sum_1^n{}_\nu A_\nu \cos\frac{t}{\tau_\nu{}^*}.$$

§ **6.** — Per dare un saggio dei resultati, che si possono ottenere col metodo testè descritto, mi accontenterò di citare alcune esperienze da me compiute con l'apparecchio della figura.

I moti venivano registrati come al solito sopra un cilindro affumicato; i particolari della disposizione si ricavano del resto dalla figura stessa.

Ricordo soltanto, per rendere possibili i calcoli numerici di controllo, che nel modello costruito era sensibilmente

$$c_1 = 0{,}01.$$

Si impiegarono uno dopo l'altro sei pendoli, i cui periodi erano espressi dai numeri

1.22 1.14 1.04 0.92 0.82 0.73,

essendosi posto uguale ad 1 il periodo della tavoletta. Le figure 1-7 della tavola riproducono appunto i diagrammi sperimentali. Il

primo diagramma è relativo al moto della tavoletta isolata, gli altri corrispondono ai battimenti, che la tavoletta compie quando viene accoppiata coi singoli pendoli.

La concordanza dei dati sperimentali con quelli teorici è più che sufficiente.

§ 7. — In collaborazione col mio assistente Dr. M. Razeto, sto applicando lo stesso metodo allo studio di alcuni problemi di ottica e di acustica, e spero di poter publicare presto alcuni resultati di qualche interesse.

Genova — Istituto Fisico della R. Università,
decembre 1908.

Sul comportamento di un sale di diazonio verso i solventi organici.

Nota del Dott. G. PONZIO.

Molto interessante è il comportamento, verso i solventi organici, del sale di p-bromofenildiazonio del fenildinitrometano $C_6H_5.C(N_2O_4)(N_2C_6H_4Br)$. Esso infatti può, analogamente ai sali di diazonio che ho già studiato in altre Note (1), subire due trasposizioni intramolecolari: una in benzoil-p-bromofenilnitro-nitrosoidrazina

$$C_6H_5.C(N_2O_4)(N_2C_6H_4Br) \longrightarrow \begin{array}{c} C_6H_5.CO.N - N.C_6H_4Br \\ \quad\quad\quad\quad | \quad\;\; | \\ \quad\quad\quad\quad NO_2 \; NO \end{array}$$

l'altra in p-bromofenil-azo-fenildinitrometano

$$C_6H_5.C(N_2O_4)(N_2C_6H_4Br) \longrightarrow C_6H_5.C\begin{cases}(NO_2)_2 \\ N{=}N.C_6H_4Br\end{cases}$$

ma può inoltre trasformarsi in benzoil-azo-p-bromofenile

$$C_6H_5.C(N_2O_4)(N_2C_6H_4Br) \longrightarrow C_6H_5.CO.N = N.C_6H_4Br.$$

(1) G. Ponzio, *Azione dei sali di diazonio sul fenildinitrometano*, Gazz. Chim., *38*, I, 509 (1908) e G. Ponzio e G. Charrier, *Azione dei sali di diazonio sui dinitroidrocarburi primari*, id. *38*, I, 526 (1908). V[i] anche G. Ponzio e G. Charrier, *Derivati alogenici dei dinitroidrocarburi primarî*, id. *38*, I, 448 (1908).

La benzoil-p-bromofenilnitronitrosoidrazina si forma sciogliendo il sale di diazonio in benzol anidro (ed in genere nei solventi organici, escludendo ogni traccia di umidità); il p-bromofenil-azo-fenildinitrometano risulta trattando il sale di diazonio con alcool; il benzoil-azo-p-bromofenile si ottiene sciogliendo il sale in etere umido (ed in genere nei solventi organici in presenza di una traccia d'acqua).

Quest' ultima trasformazione, che per la prima volta osservo, consiste, in definitiva, nella eliminazione di due atomi di azoto e tre di ossigeno (sotto forma di composti nitrosi) dal sale di p-bromofenildiazonio del fenildinitrometano; essa però, come dimostrerò sperimentalmente, è preceduta dalla formazione dell'isomera benzoil-p-bromofenilnitronitrosoidrazina.

Sale di p-bromofenildiazonio del fenildinitrometano (1).

$C_6H_5.C(N_2O_4)(N_2C_6H_4Br)$.

Per ottenere questo composto si prepara dapprima, coll'ottimo metodo di Hantzsch e Jochem (2), il cloruro di p-bromofenildiazonio solido (da cloridrato di p-bromoanilina, acido acetico glaciale e nitrito di isoamile), lo si scioglie in poca acqua gelata, lo si trasforma in acetato mediante una soluzione di acetato sodico cristallizzato, e vi si fa gocciolare la soluzione acquosa al 2 $^0/_0$ di fenildinitrometanpotassio, avendo cura di agitare continuamente e di mantenere la temperatura a 0° mediante aggiunta di pezzetti di ghiaccio.

Il *sale di p-bromofenildiazonio del fenildinitrometano* $C_6H_5.C(N_2O_4)(N_2C_6H_4Br)$ si separa così sotto forma di una polvere di color giallo oro. Raccolto, lavato con acqua e seccato nel vuoto, si dimostra perfettamente puro, come risulta dall'analisi. Rendimento quantitativo.

I. Gr. 0,2414 di sostanza fornirono cc. 32,5 di azoto (Ho = 735,58 t = 12°), ossia gr. 0,037495.

II. Gr. 0,5348 di sostanza fornirono gr. 0,2759 di bromuro di argento.

---

(1) Conservo ai composti $R.C(N_2O_4)(N_2Ar)$, che risultano per azione degli acetati dei diazonî sui sali potassici dei dinitroidrocarburi primarî, il nome di " sali di diazonio „ fino a che ne sia bene schiarita la costituzione.

(2) *Berichte 34,* 3338 (1901).

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{13}H_9N_4O_4Br$
	I	II	
Azoto	15,53	—	15,34
Bromo	—	21,95	21,91

Si fonde a 98° con viva decomposizione; è facilmente solubile a freddo in etere, benzolo, cloroformio, solfuro di carbonio; poco solubile nell'alcool e negli eteri di petrolio.

Si può conservare inalterato non oltre 48 ore, trascorse le quali comincia ad assumere un colore rosso sempre più intenso, trasformandosi nell'isomero p-bromofenil-azo-fenildinitrometano. Si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione bruna; riscaldato con alcool lo ossida in acetaldeide svolgendo azoto.

La sua principale tendenza è quella di trasformarsi, a contatto dei solventi organici, in benzoil-p-bromofenilnitronitrosoidrazina e, se i solventi sono umidi, in benzoil-azo-p-bromofenile (che è il prodotto di decomposizione di questa). Tuttavia coll'alcool, a freddo, può dare una piccola quantità dell'isomero p-bromofenil-azo-fenildinitrometano.

Benzoil-p-bromofenilnitronitrosoidrazina

$$\begin{array}{ccc} C_6H_5.CO.N & - & N.C_6H_4Br \\ | & & | \\ NO_2 & & NO \end{array}$$

Si prepara nel miglior modo sciogliendo il sale di p-bromofenildiazonio del fenildinitrometano $C_6H_5.C(N_2O_4)(N_2C_6H_4Br)$ in benzolo anidro e mantenendo la soluzione immersa in acqua e ghiaccio in modo da evitare l'aumento di temperatura che tende a prodursi e che sarebbe dannoso alla purezza del prodotto. Il colore della soluzione da giallo passa al bruno e quasi immediatamente comincia la separazione della *benzoil-p-bromofenilnitronitrosoidrazina* $C_6H_5.CO.N(NO_2).N(NO).C_6H_4Br$ che raccolta rapidamente alla pompa, lavata prima con benzolo e poi con etere e seccata nel vuoto, è perfettamente pura, come risulta dall'analisi. Rendimento: 80 %.

I. Gr. 0,1480 di sostanza fornirono cc. 20,2 di azoto ($H_o = 725,72$ $t = 11^o$), ossia gr. 0,023098.

II. Gr. 0,1586 di sostanza fornirono cc. 20,5 di azoto ($H_o = 741,93$ $t = 9^o$), ossia gr. 0,024150.

III. Gr. 0,2362 di sostanza fornirono gr. 0,1212 di bromuro di argento.

IV. Gr. 0,2501 di sostanza fornirono gr. 0,1297 di bromuro di argento.

Cioè su cento parti:

	trovato				calcolato per $C_{13}H_9N_4O_4Br$
	I	II	III	IV	
Azoto	15,65	15,22	—	—	15,34
Bromo	—	—	21,83	22,03	21,91

Si presenta in laminette di colore leggermente paglierino fusibili a 121° 22° con viva decomposizione. È pochissimo solubile a freddo in benzolo, etere, solfuro di carbonio; poco solubile nel cloroformio; solubile nell'alcool e nell'acqua. Si può conservare inalterata per qualche giorno nel vuoto secco; nell'aria umida si decompone con sviluppo di vapori nitrosi. Dà la reazione di Liebermann.

Ha verso l'acqua, a freddo, lo stesso comportamento delle altre nitronitrosoidrazine che ho descritto in precedenti miei lavori (loc. cit.), cioè si lascia sostituire, colla massima facilità, il gruppo NO_2 con un atomo di idrogeno trasformandosi nella nitrosoidrazina corrispondente.

$$C_6H_5.CO.\underset{\displaystyle NO_2}{\underset{|}{N}} - \underset{\displaystyle NO}{\underset{|}{N}}.C_6H_4Br \longrightarrow C_6H_5.CO.NH.\underset{\displaystyle NO}{\underset{|}{N}}.C_6H_4Br$$

Infatti la sua soluzione acquosa dopo qualche istante si intorbida e, mentre si forma acido nitrico (la cui presenza si può constatare nelle acque), si separano laminette di colore leggermente paglierino, le quali, raccolte e seccate nel vuoto, si fondono a 123° con viva decomposizione e si riconoscono all'analisi per *benzoil-p-bromofenilnitrosoidrazina* $C_6H_5CO.NH.N(NO).C_6H_4Br$.

I. Gr. 0,3390 di sostanza fornirono gr. 0,2016 di bromuro di argento (1).

II. Gr. 0,1358 di sostanza fornirono cc. 15 di azoto ($H_0 = 724,82$ $t = 10°$), ossia gr. 0,017200.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{13}H_{10}N_3O_2Br$
	I	II	
Bromo	25,30	—	25,00
Azoto	—	12,79	13,12

È insolubile nell'acqua e negli eteri di petrolio, un po' solubile nel benzolo e nel cloroformio, molto solubile nell'alcool e nell'etere. Si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione rosso-vinosa e dà la reazione di Liebermann.

Cogli alcali forma sali, p. es. $C_6H_5.CO.NNa.N(NO).C_6H_4Br$, solubili nell'acqua con colorazione giallo-rossastra e dai quali riprecipita inalterata per l'aggiunta di un acido. Questi stessi sali naturalmente risultano, per una reazione analoga a quella sopraccennata, trattando cogli alcali la benzoil-p-bromofenilnitronitrososoidrazina.

Presenta la proprietà, che ho già riscontrato in altre nitrosoidrazine (loc. cit.), di lasciarsi sostituire, per azione dell'acqua a caldo, il gruppo NO con un atomo di idrogeno:

$$C_6H_5.CO.NH.\underset{\underset{NO}{|}}{N}.C_6H_4Br \longrightarrow C_6H_5CO.NH.NH.C_6H_4Br$$

Infatti per ebollizione con acqua sviluppa composti nitrosi e si trasforma in *benzoil-p-bromofenilidrazina* $C_6H_5.CO.NH.NH.C_6H_4Br$, la quale si separa dalla soluzione (filtrata, per eliminare un po' di resina) in laminette bianche, fusibili a 156°.

---

(1) La sostanza per l'analisi I proveniva dall'azione dell'acqua sulla nitronitrosoidrazina; quella dell'analisi II dall'azione dell'idrato sodico sulla stessa e successivo trattamento con acido solforico diluito, come è detto più avanti.

Gr. 0,1075 di sostanza fornirono cc. 9,4 di azoto ($H_0 = 727{,}94$ $t = 18°$), ossia gr. 0,010471.

Cioè su 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_{13}H_{11}N_2OBr$
Azoto	9,74	9,62

La stessa benzoil-p-bromofenilidrazina l'ho più comodamente preparata trattando la p-bromofenilidrazina (2 molecole) sciolta in etere anidro, con cloruro di benzoile (1 molecola) e liberandola dal cloridrato della base, che contemporaneamente si forma, per trattamento con acqua. Cristallizzata dal cloroformio si presenta in larghe lamine bianche fusibili a 156°, come le precedenti (1).

Gr. 0,1575 di sostanza fornirono cc. 13,5 di azoto ($H_0 = 737{,}81$ $t = 16°$), ossia gr. 0,015374.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{13}H_{11}N_2OBr$
Azoto	9,76	9,62

È solubile molto a caldo e discretamente a freddo nell'alcool, molto a caldo e poco a freddo nel cloroformio e nel benzolo, poco solubile nell'etere, quasi insolubile in ligroina e in eteri di petrolio, leggermente solubile nell'acqua bollente.

Può essere con facilità trasformata nel suo nitrosoderivato $C_6H_5.CO.NH.N(NO).C_6H_4Br$. A tale scopo la si scioglie in alcool assoluto, si aggiunge qualche pezzetto di ghiaccio, poi acido cloridrico fumante e si fa gocciolare una soluzione acquosa di nitrito potassico (l'acido ed il nitrito in quantità teorica). Il prodotto, che dopo breve tempo si separa raffreddando la soluzione in ghiaccio, si purifica sciogliendolo in alcool assoluto e riprecipitandolo con acqua: si presenta allora in aghi appiattiti, di color leggermente paglierino, fusibili a 123° con viva decomposizione, ed in tutto identici colla benzoil-p-bromofenilnitrosoidrazina ottenuta dalla benzoil-p-bromofenilnitronitrosoidrazina per azione dell'acqua a freddo, come è detto sopra.

---

(1) Questo prodotto era già stato ottenuto da Freer (*Am. Chem. Journ.*, *21*, 38, 1889)), assieme al meta derivato, trattando con bromo la benzoilfenilidrazina.

Gr. 0,1617 di sostanza fornirono cc. 18 di azoto ($H_0 = 743,56$ $t = 12°$), ossia gr. 0,020993.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{13}H_{10}N_3O_2Br$
Azoto	12,98	13,12

La benzoil-p-bromofenilnitronitrosoidrazina può anche subire un' altra interessante decomposizione, che per la prima volta osservo, ma che probabilmente è comune alle altre nitronitrosoidrazine descritte nei miei precedenti lavori. Essa infatti può perdere due atomi di azoto e tre di ossigeno sotto forma di composti nitrosi e trasformarsi in benzoil-azo-p-bromofenile

$$\begin{array}{ccc} C_6H_5.CO.N & - & N.C_6H_4Br \\ | & & | \\ NO_2 & & NO \end{array} \longrightarrow C_6H_5.CO.N = N.C_6H_4Br.$$

Questa decomposizione ha luogo con facilità in presenza dei solventi organici umidi: mentre, p. es., a contatto dell'etere anidro si conserva inalterata per qualche tempo, se la si sospende in detto solvente (ove è quasi insolubile) e si aggiunge qualche goccia di acqua, l'etere assume tosto un colore rosso sempre più intenso, e, mentre si svolgono composti nitrosi, la sostanza primitiva finisce per scomparire completamente trasformandosi nell'azocomposto, solubile, il quale si può con facilità isolare svaporando il solvente, dopo averlo lavato con idrato sodico diluito allo scopo di eliminare una traccia di benzoil-p-bromofenilnitrosoidrazina formatasi, nel modo sopra indicato, per azione dell'acqua sul nitronitrosocomposto.

Il *benzoil-azo-p-bromofenile* $C_6H_5.CO.N = N.C_6H_4Br$ così ottenuto allo stato solido è quasi puro; cristallizzato dall'alcool si presenta in aghi appiattiti, color ametista, fusibili, senza decomposizione a 71° (1).

---

(1) Il benzoil-azo-p-bromofenile era già stato descritto da Freer (loc. cit.) però con un punto di fusione (69°) alquanto più basso. Detto chimico l'aveva ottenuto, con difficoltà, dalla benzoil-p-bromofenilidrazina ossidandola con ossido di mercurio giallo, in soluzione cloroformica.

I. Gr. 0,1877 di sostanza fornirono cc. 16 di azoto ($H_0 = 738,34$ $t = 14^o$), ossia gr. 0,018352.

II. Gr. 0,3631 di sostanza fornirono gr. 0,2369 di bromuro di argento.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{13}H_9N_2OBr$
	I	II	
Azoto	9,78	—	9,68
Bromo	—	27,74	27,68

La stessa reazione ha pure luogo col benzolo: se questo è anidro la benzoil-p-bromofenilnitronitrosoidrazina non si altera che con lentezza (ed è in tale modo che la si prepara dal sale di diazonio); se il benzolo è umido, in qualche tempo vi si scioglie svolgendo composti nitrosi e trasformandosi in benzoil-azo-p-bromofenile. Ed è per questo motivo che il rendimento in nitronitrosoidrazina dal sale di p-bromofenildiazonio del fenildinitrometano è soltanto dell'80 $^0/_0$: in realtà la trasposizione intramolecolare è completa, ma una parte della benzoil-p-bromofenilnitronitrosoidrazina rimane disciolta nel benzolo e la semplice filtrazione di questo, rendendolo umido, fa sì che il filtrato svolga col tempo composti nitrosi ed assuma un color rosso bruno dovuto alla formazione dell'azoderivato, il quale si può poi realmente ricavare evaporando il solvente.

Identico è il comportamento verso il solfuro di carbonio e verso il cloroformio: con quest'ultimo la reazione è rapidissima, ma dà origine ad un prodotto meno puro.

Tutti i fatti ora riferiti mi pare che si possano spiegar bene colla formola da me adottata per la benzoil-p-bromofenilnitronitrosoidrazina e confermerebbero, in certo qual modo, anche la formola di struttura, che ho altra volta preso in considerazione, pel composto che si forma trattando il fenildinitrometanpotassio con acetato di p-bromofenildiazonio

$$C_6H_5.C\begin{matrix}\diagup NO_2\\ -O-N=N.C_6H_4Br\\ \diagdown NO\end{matrix}$$

e che per conseguenza dovrebbe ritenersi come un O-azocomposto. Questo si trasformerebbe dapprima in un idrazoderivato

$$C_6H_5.C\begin{matrix}\diagup NO_2\\ -O-\\ \diagdown NO\end{matrix}N = N.C_6H_4Br \longrightarrow C_6H_5.C\begin{matrix}\diagup\!\!\diagup O\\ \diagdown N\end{matrix} - N.C_6H_4Br \quad (N{-}NO_2,\ N{-}NO)$$

dal quale finalmente risulterebbe il benzoil-azo-p-bromofenile

$$C_6H_5.C\begin{matrix}\diagup\!\!\diagup O\\ \diagdown N\end{matrix} - N.C_6H_4Br \;(NO_2,\ NO) \longrightarrow C_6H_5.C\begin{matrix}\diagup\!\!\diagup O\\ \diagdown N\end{matrix} = N.C_6H_4Br$$

p-bromofenil-azo-fenildinitrometano

$$C_6H_5.C\begin{matrix}\diagup\!\!\diagup (NO_2)_2\\ \diagdown N = N.C_6H_4Br.\end{matrix}$$

Questo composto si ottiene, però con un rendimento molto piccolo, trattando il sale di p-bromofenildiazonio del fenildinitrometano $C_6H_5.C(N_2O_4)(N_2C_6H_4Br)$ con alcool assoluto a freddo. A poco a poco la maggior parte del sale reagisce coll'alcool ossidandolo e decomponendosi con sviluppo di azoto; una piccola parte subisce la trasposizione intramolecolare in *p-bromofenil-azo-fenildinitrometano* $C_6H_5.C\begin{matrix}\diagup\!\!\diagup (NO_2)_2\\ \diagdown N{=}N.C_6H_4Br\end{matrix}$ che rimane indisciolto sotto forma di una polvere rosso ranciata. Conviene di più prepararlo lasciando a sè in essiccatore il sale di diazonio: il colore della sostanza passa a poco a poco dal giallo al rosso e quando la isomerizzazione è completa, cioè dopo 8-10 giorni, si può facilmente isolare, in buona quantità, l'azodinitrocomposto lavando il prodotto prima con alcool e poi con etere.

Purificato per cristallizzazione dal cloroformio, si presenta in laminette di colore rosso ranciato, fusibili a 162°63° con decomposizione.

I. Gr. 0,1911 di sostanza fornirono cc. 25,7 di azoto ($H_0 = 726,83$ $t = 10°$), ossia gr. 0,029552.

II. Gr. 0,3592 di sostanza fornirono gr. 0,1854 di bromuro di argento.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{13}H_9N_4O_4Br$
	I	II	
Azoto	15,45	—	15,34
Bromo	—	21,96	21,91

È quasi insolubile a freddo nell'alcool, nell'etere e negli eteri di petrolio; poco solubile a caldo nell'alcool; molto solubile a caldo e discretamente a freddo nel cloroformio.

Benzoil-azo-p-bromofenile

$$C_6H_5.CO.N = N.C_6H_4Br.$$

Si prepara, con buon rendimento, dal sale di p-bromofenildiazonio del fenildinitrometano $C_6N_5.C(N_2O_4)(N_2C_6H_4Br)$ sciogliendolo in etere a freddo ed aggiungendo qualche goccia di acqua. Il colore della soluzione da giallo passa a poco a poco al rosso bruno, mentre si osserva lo sviluppo di composti nitrosi, cessato il quale si lava l'etere con idrato sodico diluito, allo scopo di eliminare una piccola quantità di benzoil-p-bromofenilnitrosoidrazina, la quale si isola dal liquido alcalino rosso mediante acido solforico diluito e si purifica sciogliendola in alcool assoluto e riprecipitandola con acqua, in modo ad averla in laminette appena giallognole, fusibili a 123° con decomposizione

Gr. 0,1407 di sostanza fornirono cc. 15,8 di azoto ($H_0 = 740,34$ $t = 14°$), ossia gr. 0,018172.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{13}H_{10}N_3O_2Br$
Azoto	12,91	13,12

Il *benzoil-azo-p-bromofenile* $C_6H_5.CO.N = N.C_6H_4Br$ si ricava dalla soluzione eterea per svaporamento del solvente: cristallizzato dall'alcool si presenta in splendidi aghi appiattiti di color ametista fusibili a 71° senza decomposizione.

I. Gr. 0,2706 di sostanza fornirono cc. 23 di azoto ($H_0 = 738,70$ $t = 11°$) ossia gr. 0,026774.

II. Gr. 0,1327 di sostanza fornirono cc. 11 di azoto ($H_0 = 743,56$ $t = 12°$) ossia gr. 0,012829.

III. Gr. 0,4034 di sostanza fornirono gr. 0,2610 di bromuro di argento.

Cioè su cento parti:

	trovato			calcolato per $C_{13}H_9N_2OBr$
	I	II	III	
Azoto	9,89	9,66	—	9,68
Bromo	—	—	27,53	27,68

È poco solubile a freddo e discretamente a caldo nell'alcool e negli eteri di petrolio, molto solubile negli altri solventi organici.

La costituzione di questo composto risulta dalla sua facile riducibilità: infatti sciolto in alcool e trattato con acido acetico e polvere di zinco si trasforma rapidamente in benzoil-p-bromofenilidrazina $C_6H_5CO.NH.NHC_6H_4Br$, la quale, precipitata con acqua dalla soluzione (che da rossa, com'era all'inizio, diventa poi rapidamente incolora) e cristallizzata dal cloroformio si presenta in aghi appiattiti fusibili a 156°.

Gr. 0,1601 di sostanza fornirono gr. 0,1020 di bromuro di argento.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{13}H_{11}N_2OBr$
Bromo	27,11	27,48

A sua volta la benzoil-p-bromofenilidrazina così ottenuta, riscaldata a 100° per qualche ora con acido cloridrico concentrato, si trasforma in acido benzoico e in p-bromofenilidrazina $BrC_6H_4HN.NH_2$, la quale, messa in libertà dal suo cloridrato e cristallizzata dalla ligroina, si fonde a 106°, conforme ai dati di Neufeld (1).

(1) *Annalen*, *248*, 94 (1888).

La formazione del benzoil-azo-p-bromofenile dal sale di p-bromofenildiazonio del fenildinitrometano ha luogo in due tempi, i quali si possono distinguere benissimo. Dapprima il sale di diazonio subisce l'avanti studiata trasposizione intramolecolare in benzoil-p-bromofenilnitronitrosoidrazina, la quale poi si decompone, nel modo già detto, perdendo due atomi di azoto e tre di ossigeno sotto forma di composti nitrosi:

$$C_6H_5.C(N_2O_4)(N_2C_6H_4Br)$$
$$C_6H_5.CO.N(NO_2).N(NO).C_6H_4Br$$
$$C_6H_5.CO.N=N.C_6H_4Br.$$

Una prova di ciò sta nel fatto, poc'anzi riferito, della formazione contemporanea di un po' di benzoil-p-bromofenilnitrosoidrazina, la quale proviene dall'azione dell'acqua sulla benzoil-p-bromofenilnitronitrosoidrazina; ma la dimostrazione sperimentale la si ha trattando il sale di diazonio con etere perfettamente anidro: dalla soluzione si separa dopo breve tempo la nitronitrosoidrazina, la quale, per successiva aggiunta di qualche goccia d'acqua, a poco a poco poi scompare, trasformandosi, con svolgimento di composti nitrosi, in benzoil-azo-p-bromofenile, che si isola in ultimo col trattamento sopra indicato.

Ancora più evidente è la reazione col benzolo, perchè la benzoil-p-bromofenilnitronitrosoidrazina (che si prepara appunto nel miglior modo con detto solvente anidro) si decompone assai più lentamente col solvente umido; invece col cloroformio i due tempi avvengono con tale rapidità che riesce difficile distinguerli.

Torino. Istituto Chimico della R. Università.
Dicembre 1908.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 17 Gennaio 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti i Soci: MANNO, Direttore della Classe, ROSSI, RENIER, PIZZI, CHIRONI, RUFFINI, STAMPINI, D'ERCOLE, BRONDI, SFORZA e DE SANCTIS Segretario.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente, 3 gennaio 1909.

Il Presidente comunica che la Società ligure di Storia patria inviò in dono un esemplare della medaglia coniata in occasione del cinquantenario della sua fondazione.

D'ufficio è presentato uno scritto offerto in omaggio dal Socio corrispondente BELLIO intitolato: *Limnologia medioevale della regione dei colli Berici* (estratto dagli scritti di geografia e storia della geografia pubblicati in onore di Giuseppe DALLA VEDOVA, Firenze, Ricci, 1908).

Il Socio MANNO presenta uno scritto dell'ing. Camillo BOGGIO su *Lo sviluppo edilizio di Torino dall'assedio del 1706 alla Rivoluzione Francese* (Torino, Lattes, 1909) rilevandone l'accuratezza e l'importanza.

Il Socio CHIRONI offre con parole di vivo encomio due lavori del Socio corrispondente prof. Giuseppe BRINI, *Intorno alle obbligazioni naturali nel diritto romano privato* (estr. dalle “ Memorie della R. Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna „,

ser. I, tomo I, 1906-07) e *La bilateralità delle " pollicitationes „ ad una " res publica „ e dei " vota „ nel diritto romano* (estr. dalle memorie citate, ser. I, t. II, 1907-08); e tre scritti del prof. Carlo Calisse, *Gli usi civici nella provincia di Roma* (Prato, Giacchetti, 1906); *Le riforme della Legge per gli usi civici nella provincia di Roma* (estr. dall'Archivio giuridico " Filippo Serafini „, vol. VII, fasc. 2, Roma, 1907), e *Svolgimento storico del diritto penale in Italia dalle invasioni barbariche alle riforme del secolo XVIII* (Milano, Società editrice libraria, 1906), trattenendosi specialmente su questo ultimo volume di cui mette in luce il grande valore. Presenta poi anche con calde parole di elogio gli *Appunti didattici di diritto romano* del prof. Cesare Bertolini, fasc. 3°, 4° e 9° (Torino, Gerbone, 1906, 1909) e la sua *Bibliografia* (estr. dal " Bullettino dell'Istituto di diritto romano „, a. XX, fasc. I-III, Roma, 1908).

Il Socio Ruffini presenta, facendone rilevare i pregi, il volume *Stato e Chiesa da Berengario I ad Arduino (888-1015)*, Torino, Bocca, 1908, offerto in omaggio all'Accademia dall'autore prof. Silvio Pivano.

L'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

CLASSI UNITE

Adunanza del 24 Gennaio 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Naccari, Direttore della Classe, Spezia, Camerano, Segre, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Morera, Grassi, Fusari;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Manno, Direttore della Classe, Carle, Graf, Renier, D'Ercole, Brondi, Sforza e De Sanctis Segretario.

Si approva l'atto verbale dell'adunanza antecedente a Classi Unite, 14 giugno 1908.

Il Presidente comunica che il Comitato accademico per le onoranze ad Amedeo Avogadro, conforme al voto espresso da molti colleghi nell'occasione dell'ultimo Congresso dell'Associazione italiana per il progresso delle scienze, venne nella deliberazione di trasformarsi in Comitato internazionale. Dopo di che credette opportuno di chiedere l'alto patronato di Sua Maestà il Re. S. M. aderì benignamente a tale richiesta, e il Presidente comunica una lettera di S. E. il generale Ponzio-Vaglia, Ministro della Real Casa, che documenta la sovrana adesione.

Il Presidente legge poi il testo dell'invito, mandato alla nostra Accademia dal Rettore e dal Senato dell'Università di Lipsia, a partecipare alle feste commemorative del quinto centenario della Università stessa, che avranno luogo dal 28 al 30 luglio 1909. Se nessuno dei Soci nazionali residenti o non residenti potrà recarvisi, l'Accademia si farà rappresentare da qualche Socio straniero o corrispondente.

Invitato dal Presidente il Socio Renier, anche a nome dei Colleghi Graf e Sforza, legge la Relazione della Commissione pel premio Gautieri sulla letteratura (triennio 1905-1907). La relazione è inserita negli *Atti*. La Commissione propone che il premio sia diviso tra Michele Barbi per la edizione critica della *Vita nuova* di Dante (Firenze, 1907) e Francesco Torraca pel suo commento alla Divina Commedia (Roma-Milano, Albrighi e Segati, 1907).

Il Presidente dichiara aperta la discussione sulle conclusioni della Relazione, ma nessuno prendendo la parola in proposito, si procederà senz'altro alla votazione in una prossima adunanza.

LETTURE

Relazione della Commissione pel premio Gautieri nella Letteratura.

ONOREVOLI COLLEGHI.

La Commissione da voi eletta per proporvi il conferimento d'un premio di fondazione Gautieri all'opera di Letteratura, Storia letteraria e Critica letteraria giudicata migliore tra quelle uscite negli anni 1905 a 1907, ha adempiuto il suo non agevole còmpito. Volgendo l'occhio alla produzione artistica e critica che nel triennio suddetto vide la luce, e tenendo il debito conto dei libri ed opuscoli spontaneamente inviati dagli autori affinchè si prendessero in considerazione pel premio, la Commissione giunse alle seguenti conclusioni.

Non sembra che durante il triennio 1905 a 1907 sia comparsa opera alcuna letteraria d'eminente ed indiscutibile valore, nè nel campo della produzione originale artistica, nè in quello delle monografie critiche e dei libri meritorî d'insieme. Furonvi bensì, specialmente tra le scritture monografiche e tra le indagini e discussioni particolari, non pochi lavori utili e pregevoli, atti a far progredire le nostre cognizioni; ma nessuno di essi soddisfa a quelle ragionevoli esigenze d'ampiezza e d'irreprensibilità relativa, che sono stimate necessarie per l'assegnazione d'un premio. Ciò considerato, la Commissione volse lo sguardo ad una specie di ricerche e studî che sinora non ebbe incoraggiamento alcuno dall'Accademia nostra, ed è ben lieta di poter affermare che in questo territorio della critica letteraria s'è

imbattuta in due opere di capitale importanza. Le due opere sono una edizione critica ed un commento.

Condurre a termine in modo definitivo l'edizione critica d'un testo antico importante è impresa ardua, che ha d'uopo, non pure di molta e assidua fatica, ma di innumerevoli nozioni e di mille accorgimenti filologici e storici, di cui solo dopo una lunga preparazione scientifica si è in grado di giovarsi convenientemente. Ed a servirsene con sicurezza è mestieri procedere con senno e ponderazione, con perspicacia ed acume, giacchè ad ogni momento sopravvengono nuovi quesiti, e nella ricostruzione dei testi basta un po' di avventatezza o di distrazione o di preconcetto ingiustificato per mettere il piede in fallo e cadere in errori irrimediabili. Tutte le doti scientifiche non comuni che abbiamo testè indicate furono magistralmente messe in opera da Michele Barbi, professore di letteratura italiana nell'Università di Messina, in quella sua recente edizione critica della *Vita Nuova* di Dante (Firenze, 1907), che fu accolta con plauso quasi incondizionato dagli studiosi di tutto il mondo civile. Fa parte questo bel libro dell'edizione critica nazionale delle opere minori dell'Alighieri, che la benemerita Società Dantesca Italiana ha promossa e che, si spera, sarà un giorno coronata da quella edizione definitiva della *Divina Commedia*, che con disdoro non lieve d'Italia, in tanto progresso e lume di studî, ancora difetta. Attese il Barbi all'edizione della *Vita Nuova* per un ventennio circa, nel quale ventennio diede anche altrimenti opera assidua agli studî dantologici, cooperando, come direttore e come scrittore, all'eccellente *Bullettino della Società Dantesca Italiana*. Il libretto giovanile di Dante fu dal Barbi restituito alla sua forma originaria con le maggiori cautele e con tutte le cure che si potevano desiderare, sì da costituire un vero modello d'edizione critica. I criterî fondamentali con che condusse il libro, suggeriti, non già da ragioni di gusto personale, ma da cauta e sapiente esplorazione del materiale manoscritto, nonchè dallo " studio della lingua, degli usi, dei senti-" menti del tempo di Dante ", sono criterî di scientificità non dubbia, ai quali non mancherà mai l'approvazione degli studiosi di storia delle lettere. L'estesa introduzione di ben dugento ottantasei pagine in 8° grande, che va innanzi al testo, è una mirabile disquisizione bibliografica e critica. L'Autore è riuscito

a fissare in modo non più controverso la classazione dei testi a penna, valendosi anche di manoscritti finora inesplorati, massime del prezioso codice di mano del Boccaccio ch'era sinora rimasto rimpiattato nella Capitolare di Toledo. Ma non già seguendo questo o altro prezioso cimelio, come il celebre Chigiano L. VIII. 305, ha procurato egli il suo testo; sì bene ricostruendolo, parola per parola, col sussidio d'una critica altrettanto dotta quanto oculata e penetrante. Opera come questa, che onora veramente il paese nostro e gli studî nostri filologici, sembra a noi che meriti premio.

Ma non discostandoci punto dalla maggior Musa italica, a cui converge tanta parte del lavorio critico odierno, il triennio di cui ci occupiamo ha veduto uscire un altro libro, sul quale vogliamo richiamare la vostra attenzione. È il nuovo commento alla *Divina Commedia* di Francesco Torraca, professore di letteratura italiana nell'Università di Napoli. Fare un commento a Dante può essere cosa facile o difficile, secondo come la si prende. Se si tratta di trascegliere tra le molte interpretazioni dei chiosatori quella che sembra la più convincente o è la più accreditata, il lavoro può essere lungo e faticoso, ma non implica difficoltà veramente grandi. Meno agevole è il raccogliere sensatamente tutte le opinioni altrui, e porvi certo ordine, ed esercitarvi sopra certa critica, e portarvi il contributo di qualche additamento nuovo, come praticarono alcuni commentatori recenti, le cui opere recano servigî considerevoli alle scuole nostre. Difficilissimo è, per contro, il fare un commento originale, personale, dopo quel moltissimo che da secoli l'esegesi dantesca è venuta accumulando. A far ciò in modo soddisfacente, bisogna anzitutto perigliarsi nella gran selva delle chiose d'ogni tempo e d'ogni luogo, uscirne a salvamento con l'anima ancora fresca e la mente ancora pronta, e respingendo di quella gran mole di nutrimento spirituale il troppo ed il vano, far penetrare il meglio di quelli elementi nella propria vita intellettiva, e con essi ma non per essi risentire genuinamente l'opera del sommo poeta. Questo, su per giù, ha fatto il Torraca, che presentò al pubblico il suo commento in poche dispense cominciate nel 1905 e terminate nel 1907 (Roma-Milano, Albrighi e Segati). Gli esperti ravvisano subito in questo libro il frutto di lungo ed intenso lavoro, al quale l'Autore s'è venuto preparando con una serie

di studi critici pregevolissimi e generalmente noti ai cultori di storia delle lettere. Il commento, meditato come pochi altri e saggiato forse con l'esperienza scolastica, ha il pregio raro di essere originale, il più originale forse di quanti commenti uscirono sul poema da quello del Tommaseo in poi. Il commentatore dissimula ogni sua preparazione erudita, e sebbene ben poco gli sfugga di quanto fu scritto sulle innumerevoli e talora intricatissime questioni dantologiche, non s'indugia in discussioni, ma dà l'opinione propria, spesse volte disforme da quella degli altri. Si può anzi dire che il maggior difetto di questo commento è l'esagerazione d'un pregio: il troppo desiderio di risolvere certi quesiti in modo personale condusse talora il critico a proporre interpretazioni arditissime e non verosimili. Ma molte volte, il più delle volte, colpisce nel segno, e sempre fa pensare. Perocchè la sua preparazione storica è eccezionalmente vasta e diretta, vale a dire condotta sui testi; il che gli permette di proporre spesso chiarimenti e riscontri del tutto nuovi, attinti ad una cognizione fondatissima delle letterature medievali. Nè solamente il Torraca s'industria d'addentrarsi nelle ragioni filologiche, storiche, filosofiche del poema dantesco, ma non ne trascura (cosa tanto spesso obliata dai commentatori) l'arte; quell'arte sovrana, onde si spiega la vitalità palpitante e di continuo rinnovata del poema immortale. Al commento storico è qui intercalato, e talora occupa il primo posto, il commento estetico, quasi sempre felice. Data la difficoltà del soggetto e le controversie senza numero ch'esso provocò, è appena necessario l'aggiungere che le obiezioni contro il commento del Torraca possono sorgere a centinaia; ma ciò nonostante l'opera sua esegetica ha pregi valutabilissimi ed è singolarmente e signorilmente elegante.

Egregi Colleghi.

È opinione nostra, come crediamo sia opinione vostra, che i maggiori Sodalizî scientifici adempiano in più encomiabile guisa il loro ufficio allorchè premiano il lavoro intellettuale recondito, meno appariscente, valutato dai soli esperti, atto a far progredire, in modo solido e non discutibile, il sapere. Abituati

alla professione austera di varie discipline scientifiche, è ragionevole che ai prodotti degli studî più severi si dia da noi, con speciale simpatia, la preferenza.

Movendo da questo criterio, la Commissione da voi eletta vi propone unanime di dividere in parti uguali l'attuale premio Gautieri per la letteratura fra Michele Barbi, per l'edizione critica della *Vita Nuova*, e Francesco Torraca, pel nuovo commento alla *Divina Commedia*.

Arturo Graf,
Giovanni Sforza,
Rodolfo Renier, *relatore*.

Gli Accademici Segretari
Lorenzo Camerano.
Gaetano De Sanctis.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 24 Gennaio 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Naccari, Direttore della Classe, Spezia, Segre, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Morera, Grassi, Somigliana, Fusari e Camerano Segretario.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

Vengono presentati per l'inserzione negli *Atti* i lavori seguenti:

Dr. Matteo Bottasso: *Alcune singolarità elementari di un piano multiplo ciclico la cui curva di diramazione è irriducibile*, dal Socio Segre;

Dr. Edoardo Zavattari: *Ricerche sulla muscolatura della lingua dei Geconidi*, dal Socio Camerano.

Il Socio Segre presenta per l'inserzione nelle *Memorie* il lavoro del signor Annibale Comesatti, intitolato: *Sulle curve doppie di genere qualunque, e particolarmente sulle curve ellittiche doppie.* Il Presidente incarica i Soci Segre e D'Ovidio per riferire intorno ad esso.

Il Socio Mattirolo presenta per l'inserzione nelle *Memorie* il lavoro del Dr. Giuseppe Gola, intitolato: *Piante rare o critiche per la flora del Piemonte.* Il Presidente incarica i Soci Mattirolo e Camerano per riferire intorno ad esso.

LETTURE

Alcune singolarità elementari d'un piano multiplo ciclico la cui curva di diramazione è irriducibile.

Nota di MATTEO BOTTASSO.

In una Nota (*), che nel seguito designerò brevemente con $\mathcal{N}$, ho determinato i caratteri d'un piano multiplo ciclico Π_n, a curva di diramazione D irriducibile e generale nel proprio ordine $m = hn$. Ho trovato, in particolare, l'equazione del sistema canonico di Π_n, insieme a quella del sistema $|\Psi|$ aggiunto alla superficie F,

$$(1) \qquad F(x, y, z) = z^n - f_m(x, y) = 0,$$

modello proiettivo in S_3 di Π_n. Seguendo ora la stessa via algebrico-analitica di $\mathcal{N}$, mi propongo di ottenere le modificazioni apportate nell'equazione e nei caratteri indicati dalla presenza, sopra D, d'un punto A s-uplo, ordinario od associato ad un altro punto multiplo infinitamente vicino ad A stesso.

Dopo aver fissato nei n[i] 1, 2, 3, il dovuto comportamento delle Ψ in A, si ricava poi l'equazione delle Ψ e del sistema canonico di Π_n. Siccome però il comportamento dipende dai quozienti e resti successivi delle divisioni che servono ad ottenere il M. C. D. di s ed n, onde evitare eccessive complicazioni ho limitato la completa ricerca a quando le divisioni indicate son due (sole) se $s \geq n$, od una se $s \leq n$ (benchè abbia gli elementi essenziali per la trattazione generale).

(*) V. " Atti della R. Accad. di Torino ", 1908: *I caratteri d'un piano multiplo ciclico, ecc.* Per le definizioni e proprietà che si suppongono acquisite si vedranno le varie citaz. sparse in detta Nota; esse si possono peraltro rinvenire quasi tutte ad es. nell'*Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche*, di F. Enriques (" Mem. Soc. It. dei XL ", serie 3ª, t. X, 1895), ed in F. Severi, *Lezioni di Geometria algebrica* (Padova, A. Draghi, 1908).

Indicando così con l, l_0; n_0, $\epsilon(\leq 1)$ i quozienti e resti rispettivi delle due prime divisioni, e con l, $\epsilon(\leq 1)$ il quoziente e resto della divisione di n per $s(\leq n)$, come equazione del sistema $|\Psi|$ s'ottiene rispett. la (15) del n° 5, o la (20) del n° 8; ed ognuna di queste contiene le forme che compaiono, per il caso ad essa corrispondente, nell'equazione (16) delle curve canoniche di Π_n. Riconosciuta dalla (16) la singolarità della curva canonica generica in A, ed il numero dei punti multipli variabili di questa curva assorbiti da A stesso, ho ottenuto la *diminuzione prodotta* dal punto A *nel genere lineare* $p^{(1)}$ di Π_n; la quale (escluso il caso in cui A renda Π_n razionale) è $s(s-2)^2 l$ quando sia $s \leq n$; e quando s'abbia $s \geq n$ è

$$(s-l-1)[(n-1)(s-1)-1],\ (s-l-2)[(s-2)(n-1)-(1-\epsilon)(n_0-1)-1],$$
$$(s-l-2)[(n-1)(s-2)-1]+2n+l-1,\ 12l^2-3l+1,$$

secondo che si ha, rispettivamente, $n_0=0$, $n-1>n_0>0$, $n_0=n-1>2$, $n_0=n-1=2$.

La (16) permette pure di ottenere la *diminuzione prodotta da* A *nel genere geometrico* P_g di Π_n, la quale risulta (*) $(s)_3 l$, per $s\leq n$; $\left[(n)_3+\frac{1}{2}(n)_2\right]l^2+(n_0)_3(2ll_0+1)+\frac{1}{2}ll_0[(n_0)_2(2\epsilon+1)-n_0\epsilon]$, per $s>n$ ed $n_0>1$; $(n)_3 l^2+(n)_2(l)_2$, per $s\geq n$ ed $n_0\leq 1$.

Nei n[i] 10, 11 si trova infine stabilita l'influenza sui caratteri del piano ciclico triplo di A quando sopra D a questo punto seguano, nel suo intorno di 1° ordine, altri punti multipli generici (in direzioni distinte); e son state esposte nella tabella finale le diminuzioni apportate dai punti di tale specie nelle espressioni del $p^{(1)}$, e del P_g, di Π_3 stesso.

Comportamento delle aggiunte ad F in un punto multiplo della curva di diramazione di Π_n.

1. — Consideriamo dapprima sulla D un *punto* A s-*uplo ordinario di molteplicità non minore dell'indice* n *di* Π_n; sia cioè $s\geq n$.

(*) Si è usato scrivere $(u)_\nu$, od $[u]^\nu$, invece di $\binom{u}{\nu}$.

Introdotta l'omogeneità nelle coordinate, mediante la nuova variabile t, ed assunto A come origine A_t del sistema di riferimento, la sezione della superficie (1) con un piano $y = \lambda x$, generico nel fascio d'asse $A_t A_z$, avrà un'equazione del tipo

$$t^{m-n} z^n = x^s \varphi_{m-s}(x, t), \tag{2}$$

ove $\varphi_{m-s}(x, t)$ è una forma generica d'ordine $m - s$ in x, t (*). Questa (2) rientra nel tipo (17)

$$x^\sigma \varphi_{\mu-\sigma}(x, y, t) = y^\varrho \varphi_{\mu-\varrho}(x, y, t) \tag{3}$$

del n° 5 di $\mathfrak{M}$. Per il teorema III ivi dimostrato la (2) conterrà dunque, come infinitamente vicini e successivi al suo punto n-uplo A_t, altri $l-1$ punti n-upli sull'asse $z=0$, l_0 punti n_0-upli il 1° dei quali sta ancora sul detto asse, l_1 punti n_1-upli, ..., l_r punti n_r-upli, essendo $l, l_0, l_1, \ldots, l_{r-1}, l_r$ tutti i quozienti successivi ed $n_0, n_1, \ldots, n_r$, ϵ i resti corrispondenti nella ricerca, col metodo delle divisioni, del M. C. D. fra s ed n.

Al muoversi del piano $y = \lambda x$, intorno ad $A_t A_z$, le singolarità indicate variano sulla F, mantenendo però inalterate le molteplicità e l'ordine loro di successione, nei vari intorni (infinitesimi) di 1°, 2°, ..., $(l + l_0 + \ldots + l_r - 1)$° ordine del punto A_t sulla F stessa. Quindi ognuno degli intorni di 1°, 2°, ..., $(l-1)$° ordine di A_t sopra F è tale che in un piano generico d'un fascio dà come sezione un punto n-uplo; ognuno degli intorni di l°, $(l+1)$°, ..., $(l + l_0 - 1)$° ordine (di A_t su F) dà come sezione nel predetto piano generico un punto n_0-uplo; e così via. Seguendo le denominazioni introdotte dal Prof. Segre (**) esprimeremo questo dicendo che, *per* $s > n + 1$, *la* F *contiene come infinitamente vicine e successive al suo punto* n-*uplo* A_t, $l - 1$ "*rette infinitesime*" n-*uple*, l_0 *rette infinitesime* n_0-*uple*, ..., n_r *rette infinitesime* n_r-*uple* (le l, l_i ed n_i, ϵ essendo rispettivamente i quoti ed i resti delle divisioni successive fra s ed n). *Inoltre*

(*) Seguendo le notazioni di $\mathfrak{M}$, con le lettere $f, \varphi, \Psi, \chi, \ldots$, seguite da parentesi ed affette da indice s'indicano delle forme nelle variabili racchiuse in parentesi, d'ordine eguale al rispettivo loro indice.

(**) C. Segre, *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche* ("Ann. di Matem.", serie II, t. XXV, 1897).

le prime l *rette infinitesime* (l — 1, n-*uple ed una* n_0-*upla*) *di* F, *appartenenti agl'intorni di* 1°, 2°, ..., l° *ordine di* A_t, *stanno sul piano* z = 0.

Ne segue che, nel caso di $n \leq s < 2n$, una qualsiasi superficie Ψ_μ d'ordine μ, aggiunta ad F, dovrà possedere A_t come $(n-2)$-uplo e contenere le rette multiple infinitesime, successive ed infinitamente vicine ad A_t sopra F, ognuna con molteplicità inferiore di un'unità alla molteplicità della stessa retta (infinitesima) per la F.

In tal modo infatti un piano generico per A_t taglierà Ψ_μ secondo una curva che, insieme ad una retta per A_t, forma un'aggiunta della sezione di F (*).

Similmente, se è $l \geq 2$ la Ψ_μ dovrà a fortiori contenere come $(n-1)$-uplo il punto A_t ed allora, in modo analogo a quanto s'è indicato nel n° 6 di $\mathcal{M}$ (caso di $h=2$), si riconosce che:

Per $s \geq 2n$ *un'aggiunta*, Ψ_μ, *ad* F *conterrà tanto il punto* A_t *quanto le prime* l — 2 *rette infinitesime* n-*uple per* F, *successive ad* A_t, *con la molteplicità* n — 1: *la seguente* (l — 1)ª *di tali rette (infinitesime) come* (n — 2)-*upla; ed ognuna delle successive* l_k *rette infinitesime*, n_k-*uple per* F, *come* (n_k — 1)-*uple* (k = 0, 1, ..., r).

Possiamo indicare una verifica circa il comportamento ora specificato di un'aggiunta Ψ_μ in A_t. S'osservi che se p è il genere della sezione generica, C'_R, di F per A_z, sarà (per il teor. del n° 5 di $\mathcal{M}$) $p - \frac{1}{2}(s-1)(n-1) - \frac{1}{2}(1-\epsilon)(n_r-1)$ il genere della sezione $\mathcal{C}'_R$ generica di F coi piani del fascio $y = \lambda x$. Ed una di queste $\mathcal{C}'_R$ è incontrata n volte dall'asse A_tA_z del fascio: quindi delle $2p-n-2$ intersezioni d'una completa (non escluse cioè, se esistono, le curve eccezionali) curva canonica di F con una C'_R,

$$(4)\quad M = (s-1)(n-1) + (1-\epsilon)(n_r-1) - n = (s-2)(n-1) + (1-\epsilon)(n_r-1) - 1$$

dovranno cadere in A_t, quando si considera una $\mathcal{C}'_R$. Cioè M sarà la molteplicità delle curve canoniche complete di F in A_t,

(*) Vedi F. Enriques, *Introduzione ecc.*, al n° 31 con la 2ª sua nota in calce.

od anche, perchè F non incontra la retta $A_t A_z$ fuori di A_t ed A_z, *la molteplicità in* A_t *delle curve canoniche di* Π_n e dell'eventuali curve eccezionali di Π_n stesso; od infine le intersezioni di $\mathcal{C}'_R$ e d'una Ψ_μ che cadono in A_t.

Ora lo stesso numero può ottenersi calcolando direttamente le intersezioni $\mathcal{I}$ in A_t delle sezioni di F e Ψ_μ in un piano generico $y = \lambda x$, e si ha (*) $\mathcal{I} = (l-1)(n-1)n + n(n-2) + l_0 n_0 (n_0 - 1) + \ldots + l_r n_r (n_r - 1)$; cioè, per le relazioni:

$$(5) \qquad s = ln + n_0, \; n = l_0 n_0 + n_1, \; \ldots, \; n_{r-1} = l_r n_r + \epsilon,$$

fra gl'interi positivi $l, l_0, \ldots, l_r, s, n, n_0, \ldots, n_r, \epsilon$, s'ottiene subito $\mathcal{I} = M$.

2. — Esaminiamo ora il caso in cui *la molteplicità* s *del punto ordinario* A_t *di* D *non è maggiore dell'indice* n *del piano multiplo.*

Come nel caso precedente, la sezione (2) di F sul piano $y = \lambda x$ rientra nel tipo (3). Quindi, se la serie delle successive divisioni eseguite nella ricerca del M. C. D. fra s ed n è rappresentata dalle relazioni:

$$(6) \qquad n = ls + s_0, \; s = l_0 s_0 + s_1, \; \ldots, \; s_{r-1} = l_r s_r + \epsilon,$$

(ove $0 \leq \epsilon \leq 1$), per il n° 5 di $\mathcal{N}$ la sezione considerata di F conterrà come infinitamente vicini ad A_t altri $l-1$ punti s-upli, l_0 punti s_0-upli, ..., l_r punti s_r-upli. Poichè inoltre gli l punti s-upli, compreso in essi A_t, ed il successivo punto s_0-uplo appartengono all'asse $A_t A_z$, al variare, intorno a questa retta, del piano $y = \lambda x$ nessuno dei detti punti cambierà sulla F; mentre i seguenti punti multipli, a partire dall'intorno di $(l+1)^o$ ordine di A_t, varieranno colla sezione considerata, descrivendo ciascuno di essi sulla F una retta infinitesima (nel senso indicato nel n° 1) della molteplicità ad esso spettante. Dunque: *Ogni punto multiplo ordinario* A *della curva* D *di molteplicità* s, *non maggiore dell'indice* n *del piano multiplo* Π_n, *è pure* s-*uplo per la superficie* F *modello proiettivo di* Π_n. *Ad esso inoltre sono*

(*) C. Segre, *Le molteplicità nell'intersezione delle curve piane algebriche, ecc.* ("Giorn. di Matematiche", t. 36, 1898).

infinitamente vicini sulla F *altri* $1-1$ *punti* s-*upli ed un punto* s_0-*uplo, appartenenti alla retta che congiunge* A *col punto* (m — n)-*uplo di* F; *e come successive ed infinitamente vicine ai punti indicati esistono, sopra* F, l_0-1 *rette infinitesime* s_0-*uple*, l_1 *rette infinitesime* s_1-*uple*, ..., l_r *rette infinitesime* s_r-*uple; essendo* $l, l_0, l_1, \ldots, l_r$, *tutti i successivi quozienti ed* $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_r, \epsilon$, *i resti corrispondenti che si ottengono nella ricerca del M. C. D. fra* s *ed* n.

Da ciò segue, in modo analogo a quanto s'è indicato nel caso precedente, il *comportamento di un' aggiunta* Ψ_μ *ad* F nel punto A_t.

Ogni aggiunta Ψ_μ conterrà (coincidenti colle corrispondenti singolarità di F) gli l punti s-upli per F come $(s-2)$-upli; se poi è $l_0=1$ conterrà come (s_0-2)-uplo il successivo punto s_0-uplo per F, ed infine ciascuna delle seguenti rette infinitesime, s_k-uple per F, con la molteplicità s_k-1 $(k=1, 2, \ldots, r)$. Se invece è $l_0>1$, ferme restando le rimanenti molteplicità, la Ψ_μ conterrà tanto il punto s_0-uplo quanto le prime $l-2$ rette s_0-uple per F come (s_0-1)-uple, e come (s_0-2)-upla la seguente retta infinitesima pure s_0-upla per F.

In tal modo la molteplicità d'intersezione in A_t delle sezioni di F e Ψ_μ, sopra un piano generico $y=\lambda x$, è eguale ad $ls(s-2)+s_0(s_0-2)+(l_0-1)s_0(s_0-1)+l_1s_1(s_1-1)+\ldots+l_rs_r(s_r-1)$, ossia, in virtù delle (6) e quando sia $r\geq 0$, è

$$M_1=(n-1)(s-2)+(1-\epsilon)(s_r-1)-1. \tag{7}$$

E questa è pure *la molteplicità in* A_t *d'una curva canonica completa* (unita cioè alle eventuali curve eccezionali) di Π_n quale si ottiene, come nel n° 1, considerando la diminuzione subita dal genere d'una retta n-upla di Π_n, quando questa viene a passare per A_t.

3. — Supponiamo adesso che *al punto* s-*uplo ordinario* A_t *della curva di diramazione* D *siasi avvicinato indefinitamente un secondo punto di molteplicità* $s'\geq 2$, *essendo* $s'\leq s$.

Se all'equazione $f=\varphi_s(x,y)t^{m-s}+\ldots+\varphi_{m-1}(x,y)t+\varphi_m(x,y)=0$

della curva D, contenente A_t come s-uplo, s'applica la trasformazione quadratica (*)

$$(8) \qquad \rho x = x_1 t_1\,, \quad \rho y = y_1 x_1\,, \quad \rho t = t_1(t_1 + y_1)\,,$$

s'ottiene che la curva trasformata d'equazione

$$\varphi_s(t_1, y_1)\,[t_1(t_1+y_1)]^{m-s} + \ldots + \varphi_{m-1}(t_1, y_1) x_1^{m-s-1} t_1(t_1+y_1) + \varphi_m(t_1, y_1) x_1^{m-s} = 0,$$

conterrà il punto A_{t_1} come s'-uplo quando e solo quando è

$$\varphi_{s+k}(t_1, y_1) = y_1^{s'-k} f_{s-s'+k}(t_1, y_1), \text{ (per } k = 0,\ 1,\ \ldots,\ s' - 1);$$

cioè, quando l'equazione precedente può scriversi

$$\sum_{k=0}^{k=s'} y_1^{s'-k} x_1^k [t_1(t_1+y_1)]^{m-s-k} f_{s-s'+2k}(t_1, y_1) + \sum_{k=s'+1}^{k=m-s} x_1^k [t_1(t_1+y_1)]^{m-s-k} f_{s+k}(t_1, y_1) = 0.$$

Applicando allora a questa la trasformazione

$$(8') \qquad \rho_1 x_1 = x(x + y)\,, \quad \rho_1 y_1 = ty\,, \quad \rho_1 t_1 = tx\,,$$

inversa della (8), si ottiene come *equazione della curva* D, *nell'ipotesi che infinitamente vicino al suo punto* s-*uplo* A_t *contenga un punto* s'-*uplo appartenente all'asse* $y = 0$, la seguente:

$$(9) \quad f(x, y, t) = \sum_{k=0}^{k=s'} y^{s'-k} t^{m-s-k} f_{s-s'+2k}(x, y) + \sum_{k=s'+1}^{k=m-s} t^{m-s-k} f_{s+k}(x, y) = 0,$$

ove le f indicano delle forme binarie d'ordine eguale al loro indice.

Dell'attuale superficie F, d'equazione (1), consideriamo dapprima la sezione posta sopra un piano generico $y = \lambda x$. Si vede subito così che la F non acquista altre singolarità (linee multiple infinitesime) nella direzione dell'asse z, o sopra $z = 0$, oltre a quelle riconosciute nel caso in cui A_t è s-uplo ordinario per D.

L'equazione della sezione di F col piano $z = \lambda x$ è

$$(10) \qquad \lambda^n x^n t^{m-n} = \sum_{k=0}^{k=s'} y^{s'-k} t^{m-s-k} f_{s-s'+2k}(x, y) + \sum_{k=s'+1}^{k=m-s} t^{m-s-k} f_{s+k}(x, y).$$

(*) Si vedano nel n° 3 di $\mathfrak{N}$ le principali proprietà di questa particolare trasformazione quadratica e della sua inversa (8').

Quest'equazione, nell'ipotesi di $s+s'\leq n$, può ancora scriversi sotto la forma (9), onde la curva da essa rappresentata contiene, come infinitamente vicino al suo punto s-uplo A_t, un punto s'-uplo sulla retta $y=0$. E poichè al variare del piano sezione intorno all'asse A_tA_y varia sulla F il punto s'-uplo, diremo (V. n° 1) che F presenta, come infinitamente vicina ad A_t sul piano $y=0$, una retta infinitesima s'-upla. Nel caso considerato di $s+s'\leq n$, all'infuori di tale retta infinitesima s'-upla nessun'altra singolarità, infinitamente vicina ad A_t su F, verrà ad aggiungersi a quelle già riconosciute nell'ipotesi di A_t s-uplo ordinario per D.

Se invece è $s>n$, la (10) non contiene più alcuna singolarità infinitamente vicina ad A_t nella direzione di $y=0$, poichè tutte le n tangenti del punto n-uplo A_t coincidono colla retta A_tA_y. Consideriamo però, nella stessa ipotesi, la sezione di F con un piano $z=\lambda y$, d'equazione

$$(11)\qquad \lambda^n y^n t^{m-n}=\sum_{k=0}^{k=s'} y^{s'-k}t^{m-s-k}f_{s-s'+2k}(x,y)+\sum_{k=s'+1}^{k=m-s} t^{m-s-k}f_{s+k}(x,y);$$

se $l+l'$ è il quoziente della divisione di $s+s'$ per n ed n' è il suo resto, applicando $l+l'$ volte alla (11) la (8), e, successivamente nel caso di $l+l'=1$, la trasformazione ottenuta scambiando x con y nella (8), s'avrà un'equaz. del tipo (3) (ove sarà: $\sigma=n'$, $\rho=n$; e $\sigma=s-n$, $\rho=n-n'$ per $l+l'=1$). Si vede così che la sezione considerata (e quindi anche la F) contiene come infinitamente vicini ad A_t sull'asse A_tA_x altri $l+l'-1$ punti n-upli, e come successivo ed infinitamente vicino ad essi, un altro punto singolare di molteplicità n'; a questo seguono sulla (11) dei punti (rette infinitesime su F) le cui molteplicità son indicate nel teor. III di $\mathcal{N}$.

Supposto $s\leq n\leq s+s'$, la (10) per la (8) diventa:

$$(10_1)\qquad \lambda^n x_1^{n-s}t_1^m(t_1+y_1)^{m-n}=\sum_{k=0}^{k=s'} x_1^k y_1^{s'-k}[t_1(t_1+y_1)]^{m-s-k}f_{s-s'+2k}(t_1,y_1)+$$
$$+\sum_{k=s'+1}^{k=m-s} x_1^k[t_1(t_1,y_1)]^{m-s-k}f_{s+k}(t_1,y_1);$$

cioè un'equaz. del tipo (3) (ov'è $\sigma=n-s$, $\rho=s'$). Onde la (10) avrà in A_t un punto s-uplo ed infinitamente vicino a questo

sopra $y=0$ un punto $(n-s)$-uplo; e successivamente singolarità designate dal cit. teor. III di $\mathscr{N}$.

Nel caso considerato la F conterrà dunque, infinitamente vicina ad A_t sopra il piano $y=0$, una retta infinitesima $(n-s)$-upla; poscia altre rette infinitesime di molteplicità eguale a quella delle corrispondenti singolarità della (10). E poichè nell'ipotesi fatta la (11) si può scrivere sotto la forma (9), la F conterrà pure il punto infinitamente vicino ad A_t sull'asse A_tA_z come s'-uplo. Nè, oltre a quelle riconosciute, altre singolarità verranno ad aggiungersi sopra F in A_t a quelle già indicate nell'ipotesi di A_t ordinario ed s-uplo per D. Riassumendo abbiamo che:

Quando la curva di diramazione del piano ciclico Π_n *presenta come infinitamente vicino ad un punto* A s-*uplo un punto* A′ s′-*uplo generico, la superficie* F *(modello proiettivo di* Π_n*) oltre alle singolarità riconosciute nel caso di* A *ordinario conterrà:*

1° *per* $s+s'\leq n$, *una retta infinitesima* s′-*upla infinitamente vicina ad* A *sul piano parallelo all'asse* z *passante per la retta* AA′;

2° *per* $s+s'>n\geq s$, *la retta infinitesima ora indicata come* $(n-s)$-*upla*, *seguìta da altre rette (infin.) multiple se è* $s'\geq 2(n-s)\geq 4$, *od* $s+s'-n\geq 2$; *ed il punto* A′ *come* s′-*uplo;*

3° *per* $s>n$, *sulla retta* AA′ *come infinitamente vicini e successivi agli* $l-1$ *punti* n-*upli infinitamente vicini ad* A *(ed appartenenti alle* $l-1$ *rette infinitesime indicate nel primo enunciato del n° 1), altri* l′ *punti* n-*upli ed un punto* n′-*uplo, essendo* $l+l'$ *il quoziente ed* n′ *il resto della divisione di* $s+s'$ *per* n. *A tali punti seguono su* F *delle rette infinitesime multiple se è* $n\geq 2n'\geq 4$, *od* n', $n-n'\geq 2$; *od* $s-n$, $n-n'\geq 2$, *per* $l+l'=1$.

Dopo ciò rimangono anche fissate le ulteriori condizioni circa il *comportamento in* A *di un'aggiunta* Ψ_μ *ad* F, nel caso in cui il punto s-uplo A della curva di diramazione abbia infinitamente vicino ad esso un punto s'-uplo. Basterà ancora, come s'è riconosciuto nel n° 1, imporre alla Ψ_μ di contenere colla molteplicità $\sigma-2$, o $\sigma-1$ rispettivamente, ogni punto σ-uplo per F dell'intorno infinitesimale d'un certo ordine ρ di A, secondo che esso appartiene ad un gruppo finito od infinito di punti d'eguale molteplicità σ per F e posti pure nell'intorno ρ^o di A. E ciò coll'avvertenza indicata nel n° 1, quando accada che qualcuna delle molteplicità così assegnate in un intorno ρ^o di A risultasse minore di quella imposta nell'intorno di $(\rho+1)^o$ ordine.

Sarà pure facile, dopo quanto precede, indicare le proprietà analoghe relative al caso in cui al punto A s-uplo di D seguano, sopra questa curva, più punti infinitamente vicini ad A stesso, in direzioni distinte e con molteplicità arbitrariamente varie.

Influenza sui caratteri del piano ciclico di un punto multiplo ordinario della curva di diramazione.

4. — Procediamo alla ricerca dell'*equazione generale della superficie* Ψ_μ *aggiunta ad* F nel caso in cui la curva di diramazione D *presenta un punto* s-*uplo ordinario*, *supposto* dapprima $s \geq n$.

Indicato con l il quoziente e con n_0 il resto della divisione di s per n, dopo quanto s'è visto nel n° 1, la sezione

$$\Psi_\mu(x, \lambda x, z, t) = 0, \tag{12}$$

sul piano $y = \lambda x$, della superficie Ψ_μ, dovrà intanto contenere come $(n-1)$-upli i primi $l - 1 \geq 0$ punti n-upli, infinitamente vicini fra loro a partire da A_t, della sezione $F(x, \lambda x, z, t) = 0$ di F: ed il seguente punto, n-uplo per quest'ultima sezione, come $(n-2)$-uplo.

Perchè la sezione (12) contenga i primi $l - 1$ punti come $(n-1)$-upli, in virtù del teorema II, nel n° 4, di $\mathscr{N}$, dovrà aver un'equazione della forma

$$\sum_{k=0}^{k=n-2} x^{(l-1)(n-k-1)} z^k \chi_{\mu-(l-1)(n-k-1)-k}(x, t) + \sum_{k=n-1}^{k=\mu} z^k \chi_{\mu-k}(x, t) = 0. \tag{12_1}$$

Supposto $l > 1$, s'applichi a questa curva $l - 2$ volte la trasformazione

$$\rho x = x_1 t_1, \qquad \rho z = z_1 x_1, \qquad \rho t = t_1(t_1 + z_1), \tag{8_1}$$

del tipo (8); l'equazione precedente assumerà la forma

$$x^{n-1}\chi_{0,\nu}(x, t) + \ldots + x z^{n-2}\chi_{n-2,\nu}(x, t) + z^{n-1}\chi_{n-1,\nu}(x, z, t) = 0, \tag{12_2}$$

(ove le $\chi_{i,\nu}(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ sono forme d'ordine ν) e questa dovrà contenere il punto infinitamente vicino al suo punto

$(n-1)$-uplo A_t sulla $z=0$, colla moltiplicità $n-2$. Applicando quindi nuovamente la (8_1), nella curva trasformata d'equazione

$$\sum_{k=0}^{k=n-2} t^{n-k-1} z^k \chi_{k,\nu}(xt,\, t(t+z)) + z^{n-1}\chi_{n-1,\nu}(xt,\, zx,\, t(t+z)) = 0$$

(a meno d'un fattore t elevato ad un esponente determinato), il punto A_t dovrà essere $(n-2)$-uplo; cioè dovrà essere, per $k=0, 1, 2, \ldots, n-3$:

$$\chi_{k,\nu}(\xi, \zeta) = \sum_{k_1=n-k-2}^{k_1=\nu} \alpha_{k,k_1} \xi^{k_1} \zeta^{\nu-k_1};$$

onde occorre e basta che la (12_2) possa scriversi

$$\sum_{k=0}^{k=n-2} x^{2(n-k)-3} z^k \chi_{\nu-n+k+2}(x, t) + z^{n-1}\chi_\nu(x, z, t) = 0.$$

Risalendo quindi alla (12_1) s'avrà che la (12) dev' essere del tipo

$$(12)' \quad \sum_{k=0}^{k=n-2} x^{l(n-k-1)-1} z^k \chi_{\mu-l(n-k-1)-k+1}(x, t) + \sum_{k=n-1}^{k=\mu} z^k \chi_{\mu-k}(x, t) = 0;$$

la quale equazione vale anche nel caso (prima escluso) di $l=1$, nel quale impone, com'è richiesto, un punto $(n-2)$-uplo in A_t.

Sia ora l_0 il quoziente della divisione di n per n_0, che supporremo, per limitare le nostre ricerche, abbia come resto ϵ lo zero o l'unità. Si dovranno imporre alla sezione (12) di Ψ_μ altri l_0 punti (n_0-1)-upli, infinitamente vicini a quelli già considerati e coincidenti coi corrispondenti punti n_0-upli della sezione staccata dallo stesso piano sopra F. Perciò la curva d'equazione (a meno di un'eventuale potenza di t da staccarsi come fattore)

$$\sum_{k=0}^{k=n-2} z^k t^{2(n-k)-3}(t+z)^{2(n-k)-3}\chi_{\nu-n+k+2}(xt(t+z),\, (t+z)(t^2+tz+xz)) +$$
$$+ z^{n-1} x \chi_\nu(xt(t+z),\, x^2 z,\, (t+z)(t^2+tz+xz)) = 0,$$

ottenuta applicando l volte la trasformazione (8_1) alla $(12)'$ dovrà contenere A_t come (n_0-1)-uplo, e possedere altri l_0-1 punti (n_0-1)-upli infinitamente vicini ad A_t, appartenenti alla retta

$x=0$; ossia, per il teorema del n° 4 di $\mathcal{N}$, tale equazione deve essere del tipo

$$\sum_{q=0}^{q=n_0-1} z^{l_0(n-q-1)} x^q \chi_{\nu_0-l_0(n-q-1)-q}(x,\,z,\,t)=0.$$

Da ciò segue che nella precedente equazione ognuna delle forme $\chi_{\nu-n+k_1l_0+2}(\xi,\,\zeta)$, $\chi_{\nu-n+k_1l_0+3}(\xi,\,\zeta)$, ..., $\chi_{\nu-n+(k_1+1)l_0+1}(\xi,\,\zeta)$, (per $k_1=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,n-2$) non dovrà contenere, in particolare, i termini in $\xi^{n_0-k_1-2}\,\zeta^{\nu'-n_0+k_1+2}$, $\xi^{n_0-k_1-3}\,\zeta^{\nu'-n_0+k_1+3}$, ..., $\xi\zeta^{\nu'-1}$, $\zeta^{\nu'}$, essendo ν' l'ordine della forma considerata.

Ciascuna delle forme esaminate $\chi_{\nu-n+k+2}(x,\,t)$ $(k=0,\,1,\ldots,\,\rho<n-2)$ s'ottiene applicando alla corrispondente forma binaria $\chi_{\mu-l(n-k-1)-k+1}(x,\,t)$ della $(12)'$, $l-2$ volte la (8_1) e, a meno di termini variabili con λ' essendo $\rho t=t_1(t_1+\lambda' z_1)$ nella (8_1), sopprimendo esclusivamente il fattore t elevato ad un esponente conveniente. Ora una potenza qualsiasi della trasformazione (8_1) applicata ad un termine del tipo $x^\varrho t^\sigma$ d'una forma d'ordine $\rho+\sigma$ conduce sempre a qualche termine del tipo $x^\varrho t^{\sigma'}$, supposto che $\rho+\sigma'$ sia l'ordine della forma trasformata e che nel dedurre questa dalla prima si siano staccati solo dei fattori t. Quindi, dalle condizioni dianzi espresse per le forme $\chi_{\nu-n+k+2}(x,\,t)$, seguirà dover essere nella $(12)'$:

$$\chi_{\mu-l(n-k-1)-k+1}(x,\,t)=x^{n_0-i-1}\,\chi_{\mu-l(n-k-1)-k-n_0+i+2}(x,\,t)$$

(per $k=il_0,\ il_0+1,\,\ldots,\,(i+1)l_0-1$; ed $i=0,\ 1,\ 2,\,\ldots,\,n_0-2$).

Inversamente, se sono verificate queste condizioni, cioè se la (12) può scriversi

$$(12)''\quad \sum_{k_1=0}^{k_1=n_0-2}\ \sum_{k=k_1l_0}^{k=(k_1+1)l_0-1} z^k x^{l(n-k-1)+n_0-k_1-2}\chi_{\mu-l(n-k-1)-n_0-k+k_1+2}(x,\,t)+$$
$$+\sum_{k=(n_0-1)l_0}^{k=n-2} z^k x^{l(n-k-1)-1}\chi_{\mu-l(n-k-1)-k+1}(x,\,t)+\sum_{k=n-1}^{k=\mu} z^k\chi_{\mu-k}(x,\,t)=0,$$

è facile riconoscere che questa $(12)''$ contiene pure colla molteplicità n_0-1 ciascuno degli l_0 punti n_0-upli per la corrispondente sezione di F ed infinitamente vicini ad A_t (a partire dall'intorno di l° ordine di A_t stesso).

Perchè la (12) sia riducibile alla $(12)''$, qualunque sia il parametro λ, occorre e basta che l'equazione della superficie Ψ_μ sia del tipo:

$$(13)\quad \sum_{k_1=0}^{k_1=n_0-2}\ \sum_{k=k_1 l_0}^{k=(k_1+1)l_0-1} z^k \Psi_{\mu-k}([x, y; l(n-k-1)+n_0-k_1-2], t) +$$

$$+ \sum_{k=(n_0-1)l_0}^{k=n-2} z^k \Psi_{\mu-k}([x, y; l(n-k-1)-1], t) + \sum_{k=n-1}^{k=\mu} z^k \Psi_{\mu-k}(x, y, t) = 0$$

dove, come per brevità continueremo a fare nel seguito, per indicare una forma Ψ di dato ordine ρ nelle variabili $x_1, x_2, ..., x_u, x_{u+1}, ..., x_r$, la quale contenga in ogni termine le $x_1, x_2, ..., x_u$, complessivamente a grado almeno eguale a τ, si è usato il simbolo $\Psi_\rho([x_1, x_2, ..., x_u; \tau], x_{u+1}, ..., x_r)$.

La (13) *rappresenta così la forma necessaria dell'equazione di una superficie aggiunta qualsiasi* (*d'ordine* μ) *alla superficie* F, *per la presenza sulla curva di diramazione del punto ordinario* A_t *colla molteplicità* $s \geq n$, *quando due (al più) sono le divisioni necessarie nella ricerca del M. C. D. fra* s *ed* n, *ed* l, l_0 *sono i quoti,* n_0 *il primo resto delle divisioni stesse.*

Nel caso in cui il M. C. D. fra s ed n s'ottenga con una sola divisione, basterà supporre nella scritta equazione, $l_0 = 0$.

5. — Limitandoci a considerare le superficie aggiunte le quali staccano sopra F le curve canoniche, ricordiamo dal n° 7 di $\mathfrak{N}$ che, per il comportamento loro in A_z, tali aggiunte hanno un'equazione della forma

$$(14)\quad \Psi_{m-h-3}(x, y, z, t) = \sum_{k=0}^{k=n-2} z^k t^{(h-1)k} \Psi_{h(n-k-1)-3}(x, y, t) = 0.$$

Per la presenza dell'indicato punto s-uplo A_t sulla curva di diramazione, detta equazione deve pure rientrare nel tipo (12)''; s'avrà quindi come equazione generale delle Ψ_{m-h-3}, supposto D priva d'ogni altra singolarità fuori di A_t, la seguente (con la notazione definita per la (12)''):

$$(15)\quad \sum_{k_1=0}^{k_1=n_0-2}\ \sum_{k=k_1 l_0}^{k=(k_1+1)l_0-1} z^k t^{(h-1)k} \Psi_{h(n-k-1)-3}([x, y; l(n-k-1)+n_0-k_1-2], t) +$$

$$+ \sum_{k=(n_0-1)l_0}^{k=n-2} z^k t^{(h-1)k} \Psi_{h(n-k-1)-3}([x, y; l(n-k-1)-1], t) = 0.$$

Dopo ciò, con procedimento analogo a quello seguito in $\mathfrak{N}$ (n° 7) nell'ipotesi di D generale nel suo ordine (eliminando cioè z fra la (1) e la (15)), si otterrà *l'equazione esplicita del sistema delle curve canoniche sul piano* Π_n, sotto la forma

$$(16)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \Psi_{(n-1)h-3} & 0 & f\Psi_{h-3} & f\Psi_{2h-3} & \dots & f\Psi_{(n-2)h-3} \\ \Psi_{(n-2)h-3} & \Psi_{(n-1)h-3} & 0 & f\Psi_{h-3} & \dots & f\Psi_{(n-3)h-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Psi_{h-3} & \Psi_{2h-3} & \Psi_{3h-3} & \Psi_{4h-3} & \dots & 0 \\ 0 & \Psi_{h-3} & \Psi_{2h-3} & \Psi_{3h-3} & \dots & \Psi_{(n-1)h-3} \end{vmatrix} = 0.$$

Ed in ogni Ψ di questo determinante simmetrico Δ le variabili x, y compaiono complessivamente, in ciascun termine, ad un grado minimo determinato non nullo (in generale), quale risulta designato nell'equazione (15); e nella f le x, y compaiono in ogni termine complessivamente almeno al grado s. L'equazione $\Delta = 0$ può pure scriversi sotto la forma

$$(16)' \qquad \sum_{k=0}^{k=n-2} (-1)^k f^k \Psi^n{}_{(n-k-1)h-3} + f.\ \mathfrak{D}(\Psi_{h-3}, \dots, \Psi_{(n-1)h-3}; f) = 0,$$

dove $\mathfrak{D}$ è nullo per $n \leq 3$, mentre per $n > 3$ è un polinomio determinato d'ordine $n-4$ in f, i cui coefficienti son forme determinate nelle $\Psi_{h-3}, \Psi_{2h-3}, \dots, \Psi_{(n-1)h-3}$; inoltre ognuna delle Ψ è contenuta in $\mathfrak{D}$ al più al grado $n-3$, in guisa che ogni termine del polinomio considerato contiene almeno due delle Ψ.

Ammesso, come supporremo sempre nel seguito, che *la curva di diramazione* D *non abbia altre singolarità all'infuori del punto* s-*uplo* considerato in A_t, i coefficienti di tutte le forme Ψ designate in (15), si potranno ritenere affatto arbitrari; e così facendo l'equazione $\Delta = 0$ rappresenterà l'intero sistema delle curve canoniche di Π_n. Ognuna di tali curve è ancora, come nel caso di D generale, d'ordine

$$(17)\qquad N = n[(n-1)h-3],$$

e tocca con contatti d'ordine n la D nei punti d'incontro di questa con una $\Psi_{(n-1)h-3}\ ([x, y; (n-1)l + n_0 - 2], t) = 0$, fuori di A_t. L'insieme dei gruppi di contatti n-punto di D con ogni curva canonica di Π_n è quindi una serie lineare di ordine $nh[(n-1)h-3] - s[(n-1)l + n_0 - 2]$, e di dimensione $[(n-1)h-1]_2 - [(n-1)l + n_0 - 1]_2 - 1$. Questa serie è sempre speciale ed è generalmente incompleta: se d ne è il difetto, il suo indice di specialità sarà $(h+2)_2 - (l+2)_2 + d$.

6. — Vogliamo ora investigare la *singolarità posseduta*, per $s > 2$, *nel punto* A_t *dalla curva canonica generica* Δ (come indicheremo brevemente, anche nel seguito, la $\Delta = 0$). E dapprima otterremo direttamente dalla (16) la molteplicità M, già trovata colla (4), di Δ in A_t.

Per questo consideriamo il determinante numerico, Δ_t, ottenuto mettendo al posto di ogni elemento di (16) l'ordine complessivo minimo al quale compaiono le variabili x, y nei termini dell'elemento considerato, e ponendo inoltre un intero positivo sufficientemente grande al posto degli elementi nulli del determinante Δ. In tale Δ_t si potrà togliere $l(n - k_1 l_0 - k_0) + n_0 - k_1 - 2$ (per $k_1 = 0, 1, \ldots, n_0 - 1$; $k_0 = 1, 2, \ldots, l_0$), da tutti gli elementi della $(k_1 l_0 + k_0)$-esima linea (esclusa l'ultima) e successivamente da tutti quelli della $(n - k_1 l_0 - k_0 + 1)$-esima colonna (esclusa la prima), senza che alcun elemento si riduca ad essere negativo. Risultano così nulli gli elementi della prima linea e dell'ultima colonna; e, soppresse queste, il determinante d'ordine $n - 1$ che si ottiene, astraendo dagli elementi, ξ_k, della sua diagonale principale, è

$$\left|\begin{array}{cccccccccccccc}
\xi_1 & 2 & \ldots & 2 & 2 & 1+\epsilon & 2-\epsilon & 2 & \ldots\ldots\ldots & 2 & 1 & 2 & \ldots & 2 \\
1 & \xi_2 & \ldots & 2 & 2 & 1+\epsilon & 1 & 2-\epsilon & \ldots\ldots\ldots & 2 & 1 & 1 & \ldots & 2 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \xi_{l_0} & 1 & 1 & \ldots\ldots\ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\
2 & 2 & \ldots & 2 & 2 & 1+\epsilon & \xi_{l_0+1} & 2 & \ldots\ldots\ldots & 2 & 1 & 2 & \ldots & 2 \\
1 & 2 & \ldots & 2 & 2 & 1+\epsilon & 1 & \xi_{l_0+2} & \ldots\ldots\ldots & 2 & 1 & 1 & \ldots & 2 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & 1 & \ldots & 1 & 2-\epsilon & 1+\epsilon & 1 & 1 & \ldots\ldots\ldots & \xi_{l_0+1} & 1 & 1 & \ldots & 2-\epsilon \\
1+\epsilon & 1+\epsilon & \ldots & 1+\epsilon & 1+\epsilon & 1+\epsilon & 1+\epsilon & 1+\epsilon & \ldots\ldots\ldots & 1+\epsilon & \xi_{l_0} & 1+\epsilon & \ldots & 1+\epsilon \\
2-\epsilon & 2 & \ldots & 2 & 2 & 1+\epsilon & 2-\epsilon & 2 & \ldots\ldots\ldots & 2 & 1 & \xi_{l_0-1} & \ldots & 2 \\
1 & 2-\epsilon & \ldots & 2 & 2 & 1+\epsilon & 1 & 2-\epsilon & \ldots\ldots\ldots & 2 & 1 & 1 & \ldots & 2 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & 1 & \ldots & 1 & 2-\epsilon & 1+\epsilon & 1 & 1 & \ldots\ldots\ldots & 2 & 1 & 2 & \ldots & \xi_1
\end{array}\right|$$

Ne segue intanto che in ogni termine dello sviluppo di Δ le variabili x, y entrano complessivamente a grado non inferiore ad $n(n-1)l+n_0(n_0-1)l_0-2(n-1)$. Inoltre, poichè si ha pure

$$\Delta = \pm \sum_{k=1}^{k=n-1} \sum_{k'=1}^{k'=n-1} (-1)^{k+k'} \Psi_{kh-3} \Psi_{k'h-3} H_{kk'},$$

ove $H_{kk'}$, è il subdeterminante ottenuto sopprimendo in Δ la prima e la $(k+1)$-esima colonna, insieme all'ultima ed alla $(n-k'-1)$-esima linea; osservato che nel determinante numerico scritto gli elementi son tutti maggiori od eguali all'unità, ne seguirà che le variabili x, y compariranno complessivamente in ogni termine dello sviluppo di Δ a grado almeno eguale ad $n(n-1)l+n_0(n_0-1)l_0-2(n-1)+n-2=M$ (come è espresso dalla (4)).

Si ottengono poi effettivamente nello sviluppo di Δ dei termini contenenti x, y a grado non superiore a quello indicato, considerando il prodotto degli elementi della diagonale principale del minore ottenuto sopprimendo le prime $l_0+\epsilon$ colonne e le ultime $l_0+\epsilon$ linee, per gli elementi della diagonale principale del minore complementare di quello ora designato, cioè nello sviluppo di

$$f^{n-l_0-\epsilon}([x, y; s], t)\, \Psi^n_{(l_0+\epsilon-1)h-3}([x, y; (l_0+\epsilon-1)l-1], t).$$

Si può ancora riconoscere che quando è $\epsilon=1$ non si trovano altri termini contenenti x, y al grado minimo predetto oltre a quelli ottenuti nel modo ora indicato, mentre quando è $\epsilon=0$ di tali termini se ne ottengono pure, per esempio, da

$$\Psi^n_{(n-1)h-3}([x, y; (n-1)l+n_0-2], t), \text{ da } f^{l_0-1}\Psi^n_{(n-l_0-1)h-3}, \text{ ecc.}$$

Dunque: *la molteplicità in* A_t *d'una curva canonica generica* Δ *di* Π_n *è*

$$(4') \qquad M = n[(n-1)l-1] + n_0(n_0-1)l_0 = \\ = (n-1)(s-2) + (1-\epsilon)(n_0-1) - 1.$$

Nel caso di $\epsilon=1$ (*cioè:* $s=ln+n_0$; $n=l_0n_0+1$) *il gruppo delle tangenti di tale punto* M-*uplo è formato da un gruppo generico di* ll_0-1 *rette* n-*uple, le quali non contengono alcuna sin-*

golarità puntuale di Δ *infinitamente vicina ad* A_t, *e dalle* s *tangenti alla curva di diramazione* D *in* A_t *stesso contate ciascuna* $(n_0 - 1)l_0$ *volte. Il detto gruppo di tangenti è invece formato da rette distinte fra loro e dalle tangenti a* D *in* A_t *nel caso di* $\epsilon = 0$ $(n = l_0 n_0)$.

Va notato che il ragionamento precedente con lievi modificazioni di forma *sussiste pure per* $n_0 \leq 1$, *ponendo (ad es.) in tal caso* $l_0 = 0$, $\epsilon = n$. S'ha allora che nel punto di molteplicità $M = n[(n-1)l - 1]$ per Δ, questa ha un gruppo generico di tangenti se è $n_0 = 0$, mentre per $n_0 = 1$ ha come gruppo di tangenti delle rette n-uple generiche, che non contengono alcuna singolarità di punto per Δ, fuori di A_t.

Per $\epsilon = 1$, si ha

$$\Delta = \Delta_0 f^{(n_0-1)l_0} + \Delta_1 f^{(n_0-2)l_0} + \ldots + \Delta_{n_0-2} f + \Delta_{n_0-1},$$

dove $\Delta_i = 0\ (i = 0, 1, \ldots, n_0 - 1)$ è una curva d'ordine

$$N - nh(n_0 - i - 1)l_0,$$

la quale possiede in A_t la molteplicità $M - sl_0(n_0 - i - 1) + i$ ed ha (in generale) le sue tangenti in tale punto tutte distinte fra loro e dalle tangenti a D in A_t stesso.

Da ciò, con procedimento analogo a quello seguito per dimostrare i teoremi dei n[i] 3, 4 di $\mathcal{M}$, applicando cioè le trasformazioni del tipo (8), si deduce facilmente che:

Nell'ipotesi di $\epsilon = 1$ *la curva canonica generica* Δ *di* Π_n *contiene come infinitamente vicini al suo punto* A_t *di molteplicità* $M = (n-1)(s-2) - 1$, s *successioni di punti multipli ciascuna costituita da* l_0 *punti* $(n_0 - 1)$*-upli appartenenti agl' intorni (infinitesimi) di 1°, 2°, ...,* l_0^o *ordine di* A_t *e tali che sopra ognuno degli* s *rami di* D *uscenti da questo punto giace uno degli* s *punti* $(n_0 - 1)$*-upli per* Δ *dell'intorno di 1° ordine di* A_t *stesso.*

È questa una proprietà generale sulle singolarità superiori d'una curva piana Δ, in relazione ad un'altra curva $f = 0$ complanare di Δ.

7. — Il ragionamento fatto nel n° 8 di $\mathcal{M}$ può qui ripetersi per mostrare che, per $n > 3$, i punti doppi variabili d'una Δ generica son quelli in cui essa incontra la curva $\dfrac{\partial \Delta}{\partial \Psi_{(n-2)h-3}} = 0$

all'infuori di D. Questa curva, prescindendo dalla D, è d'ordine $N' = (n-1)[(n-2)h-3]$, e la sua equazione può scriversi

$$(18)\quad \Phi = n\Psi^{n-1}_{(n-2)h-3} + (-1)^{n-1}\frac{\partial}{\partial\Psi_{(n-2)h-3}}\mathfrak{D}(\Psi_{h-3},\dots,\Psi_{(n-1)h-3};f)=0.$$

Con procedimento del tutto simile a quello seguito nel n° 6 per Δ si trova che Φ (come s'indicherà la $\Phi=0$) contiene A_t come M'-uplo per $n-1 > n_0 > 0$; come $(M'-2)$-uplo per $n_0 = 0$, e come $(M'+1)$-uplo per $n_0 = n-1$, essendo $M' = M - 2[(n-1)l + n_0 - 2] - 1$.

Ed il gruppo delle tangenti alla Φ in tale punto è un gruppo generico di rette se è $\epsilon \neq 1$ (cioè $\epsilon = 0$, od $n_0 \leq 1$).

Nel caso di $\epsilon = 1$ ed $l_0 > 1$ si ha

$$\Phi = f^{l_0-2}\sum_{i=0}^{i=\lambda_0-1}\varphi_i f^{(n_0-i-2)l_0} + f^{l_0-1}\sum_{i=\lambda_0}^{i=n_0-3}\varphi_i f^{(n_0-i-2)l_0} + \varphi_{n_0-2}$$

ove λ_0 è la parte intera di $\frac{1}{2}(n_0-1)$ e $\varphi_i=0$, $(i=0, 1,\dots, n-2)$ è una curva tale che la $\varphi_i f^{(n_0-i-1)-\alpha} = 0$, il cui primo membro compare in Φ, contiene A_t come $(M'+i)$-uplo senza che in esso alcuna tangente della $\varphi_i = 0$ coincida con tangenti di D, o di Δ, in A_t stesso.

Per $n_0 = n-1 \geq 3$ si ha $\Phi = \varphi_1 f^{n-4} + \varphi_2 f^{n-5} + \dots + \varphi_{n-2} f + \varphi_{n-3}$, ove $\varphi_i = 0\,(i=1, 2, \dots, n-3)$ è una curva la quale possiede A_t come $[M' - s(n-i-3)+i]$-uplo il cui gruppo delle tangenti non contiene alcuna tangente a D o, per $i > 1$, a Δ in A_t stesso. La φ_1 contiene il fattore Ψ^{n-4}_{h-3}, e quindi le $l-1$ tangenti n-uple di Δ in A_t appartengono come $(n-4)$-uple al gruppo delle tangenti in tale punto alla $\varphi_1 = 0$, ossia alla Φ.

Da questo, come per la proprietà ultima del n° 6, segue che:

1° per $\epsilon = 1$ ed $l_0 > 1$ la Φ contiene come infinitamente vicini al suo punto M'-uplo A_t, e coincidenti con gli sl_0 punti (n_0-1)-upli per Δ, altrettanti punti (n_0-2)-upli, distribuiti in s serie distinte di l_0 punti ciascuna. Questi l_0 punti d'ognuna delle serie indicate son seguiti, se è $l_0 > 2$, da un punto (l_0-2)-uplo per Φ (dell'intorno di $(l_0+1)^\circ$ ordine di A_t), non giacente sulla Δ;

2° per $n_0 = n - 1 > 2$ la Φ possiede come infinitamente vicino al suo punto $(M' + 1)$-uplo A_t, su ogni ramo di D, un punto $(n - 4)$-uplo.

Perciò *la molteplicità d'intersezione* in A_t di Δ e Φ per $n > 3$ sarà (*):

1° $H = MM' + \epsilon(n_0 - 1)(n_0 - 2)sl_0$, per $n - 1 > n_0 > 0$;

2° $H - 2M$, quando si ha $n_0 = 0$, $(\epsilon = n)$;

3° $H + M - s(n-2) + (l-1)(n-4)$, quando sia $n_0 = n - 1 > 2$.

E sarà eguale alla metà di questa molteplicità d'intersezione la diminuzione subìta (per la presenza del punto s-uplo sopra D) dal *numero dei punti doppi variabili* posseduti, per $n > 3$, da una Δ generica: il qual numero quando D è generale è $\frac{1}{2}NN'$.

L'equivalenza in punti doppi del punto singolare A_t di Δ è poi eguale in ogni caso ad

$$E = \frac{1}{2}M(M-1) + \frac{1}{2}\epsilon(n_0 - 1)(n_0 - 2)sl_0.$$

Quindi *il genere di* Δ, che nel caso di D generale è $\frac{1}{2}(N-1)(N-2) - \frac{1}{2}NN' = n[(n-1)h - 3]^2 + 1$, risulterà diminuito, per $n > 3$, di $\frac{1}{2}M(M - M' - 1) = (s - l - 2)M$ unità quando è $n - 1 > n_0 > 0$; di $(s - l - 1)M$ unità quando è $n_0 = 0$; e di $(s - l - 2)(M - 1) + 2n + l - 1$ unità quando si ha $n_0 = n - 1$. E questa è pure la diminuzione subìta dal *genere lineare di* Π_n, finchè sia $s < m - 1$ (escluso cioè il caso di $s = m - 1$ in cui Π_n è razionale), poichè in tale ipotesi può sostanzialmente ripetersi quanto s'è detto nel n° 1 di $\mathfrak{M}$ per mostrare che Π_n è privo di curve eccezionali (la Δ è irriducibile).

Nel caso di $n = 3$ il numero dei punti (comuni a $\Psi_{h-3} = 0$ e $\Psi_{2h-3} = 0$) tripli variabili della Δ generica vien diminuito di $(l-1)(2l-1)$ unità se è $n_0 \leq 1$, e di $2l(l-1)$ unità se è $n_0 = 2$; onde il genere di Δ (o genere lineare di Π_n per

(*) Vedi C. SEGRE, *La molteplicità nell'intersezione delle curve, ecc.*, già cit.

$s < m - 1$) risulta diminuito rispettivamente di $3(2l-1)^2$, o di $12l^2 - 3l + 1$ unità.

La diminuzione subìta dal numero dei parametri indipendenti del sistema delle curve canoniche, cioè l'abbassamento prodotto dal punto A_t di D *nel genere geometrico* P_g *di* Π_n, è eguale al numero dei termini mancanti nelle forme $\Psi_{h-3}, \dots,$

$\Psi_{(n-1)h-3}$, ossia, per $n_0 > 1$, a $P' = [(n)_3 + \frac{1}{2}(n)_2]l^2 + (n_0)_3(2ll_0 + 1)l_0 + \frac{1}{2}ll_0[(n_0)_2(2\epsilon + 1) - n_0\epsilon]$; e per $n_0 \leq 1$ a

$$\frac{1}{12}n(n-1)[(2n-1)l-3]l.$$

Raccogliendo s'avrà:

Se la curva di diramazione D, *d'ordine* $m = hn$, *d'un piano ciclico d'indice* n, Π_n, *possiede un punto* s-*uplo ordinario* A *ed è*

$$m - 1 > s = nl + n_0 \geq n, \qquad n = n_0 l_0 + \epsilon,$$

ove l, l_0, n_0, ϵ *sono degli interi positivi o nulli soddisfacenti alle condizioni* $1 < n_0 < n$, $\epsilon \leq 1$ *od* $n_0 \leq 1$, $\epsilon = n$; *le curve canoniche di* Π_n *formano un sistema d'equazione* $\Delta = 0$, *definito dalle* (15) *e* (16). *Tali curve canoniche segnano coi loro contatti variabili* n-*punto sulla* D *una serie lineare* g_ρ^ν, *ove si ha*

$$\rho = [(n-1)h - 1]_2 - [(n-1)l + n_0 - 1]_2 - 1,$$
$$\nu = nh[(n-1)h - 3] - s[(n-1)l + n_0 - 2].$$

Il genere delle Δ, o genere lineare *di* Π_n è

$$\Omega = n[(n-1)h - 3]^2 - p_1 + 1,$$

ove si ha

$$p_1 = (s - l - 2)(M - 1) + 2n + l - 1, \text{ per } n_0 = n - 1 > 2;$$
$$p_1 = (s - l - 2)M, \text{ per } 0 < n_0 < n - 1;$$
$$p_1 = (s - l - 1)M, \text{ per } n_0 = 0;$$

essendo

$$M = (n-1)(s-2) - (1-\epsilon)(n_0 - 1) - 1;$$

e $p_1 = 12l^2 - 3l + 1$, per $n_0 = n - 1 = 2$.

Il genere geometrico *di* Π_n *è*

$$P_g = h^2(n)_3 + \frac{1}{2}h(h-3)(n)_2 + n - P' - 1,$$

ove per $n_0 > 1$ *è*

$$P' = \left[(n)_3 + \frac{1}{2}(n)_2\right] l^2 + (n_0)_3 (2ll_0 + 1) + \frac{1}{2} ll_0 [(n_0)_2 (2\epsilon + 1) - n_0 \epsilon],$$

e per $n_0 \leq 1$ *è*

$$P' = (n)_3 l^2 + (l)_2 (n)_2 .$$

Nel caso di $s = m - 1$ *il piano ciclico è razionale; non esistono allora curve canoniche ed è* $P_g = 1$.

8. — Supposto ora che *per il punto* A_t *s-uplo ordinario di* D *s'abbia* $s \leq n$, proponiamoci d'ottenere in tale caso le proprietà stabilite per $s \geq n$; e limitiamo la ricerca all'ipotesi che le relazioni (6) si riducano ad una sola $n = sl + \epsilon$.

È noto allora, dal n° 2, che una Ψ_μ aggiunta ad F deve contenere come $(s-2)$-upli gli l punti s-upli di F, infinitamente vicini fra loro a partire da A_t, sull'asse z; epperò, seguendo lo svolgimento del n° 4, s'ottiene come equazione necessaria della Ψ_μ:

$$\Psi_\mu(x, y, z, t) = \sum_{k=n}^{k=s-2} z^{l(s-k-2)} \Psi_{\mu - l(s-k-2)}([x, y; k], z, t) = 0.$$

In particolare le aggiunte le quali staccano sopra F le curve canoniche, dovendo pure rientrare nel tipo (14), saranno rappresentate (valendoci sempre della convenzione fatta colla (13) nel n° 4) dall'equazione

$$(20) \quad \sum_{k_1=0}^{k_1=s-3} \sum_{k=k_1 l}^{k=(k_1+1)l-1} z^k t^{(h-1)k} \Psi_{h(n-k-1)-3}([x, y; s-k_1-2], t) + \\ + \sum_{k=(s-2)l}^{k=n-2} z^k t^{(h-1)k} \Psi_{h(n-k-1)-3}(x, y, t) = 0.$$

Quindi le curve canoniche del piano ciclico saranno rappresentate dall'equazione (16) o (16)', dove in ciascun termine di ognuna delle Ψ_{hi-3} $(i = n-1, n-2, \ldots, n-(s-2)l+1)$ le variabili x, y compaiono complessivamente a grado almeno eguale a quello che è designato nell'equazione ora scritta. Al variare arbitrariamente dei coefficienti di tutte le Ψ si ottengono tutte le curve canoniche del piano ciclico ora in esame, supposto (come facciamo) che D non abbia altre singolarità fuori di A_t.

L'ordine N d'una qualsiasi di queste curve canoniche è sempre espresso dalla (17) ed i suoi contatti n-punto con D al variare della Δ descrivono una $g_{\nu_1}^{\rho_1}$, ove è (per $l > 1$)

$$\rho_1 = [(n-1)h-1]_2 - (s-1)_2 - 1,$$
$$\nu_1 = nh[(n-1)h-3] - s(s-2).$$

Analogamente a quanto s'è fatto nel n° 5 per ottenere M, si può trovare facilmente la molteplicità M_1 d'una Δ generica nel punto A_t, e si ha

$$(7)' \qquad M_1 = s(s-2)l = (n-\epsilon)(s-2).$$

Il gruppo delle tangenti in A_t alla $\Delta = 0$ è formato da rette tutte distinte e generiche se è $\epsilon = 0$, mentre è costituito dalle s tangenti nello stesso punto alla D, contate ognuna $(s-2)l$ volte, se è $\epsilon = 1$.

Nel caso di $\epsilon = 1$ si ha, più precisamente:

$$\Delta = \Delta_0 f^{(s-2)l} + \Delta_1 f^{(s-3)l} + \dots + \Delta_{s-3} f + \Delta_{s-2},$$

ov'è $\Delta_0 = \Psi_{2lh-3}^{n}$, e la $\Delta_i = 0$ $(i = 1, 2, \dots, s-2)$ è una curva che possiede in A_t la molteplicità $M_1 - s(s-i-2)l + i$, con tangenti generalmente tutte distinte fra loro e da quelle della curva di diramazione $f = 0$ in A_t stesso. Quindi nel caso considerato, per la proposizione della fine del n° 6, la Δ avrà come infinitamente vicini al suo punto M_1-uplo, A_t, altri sl punti $(s-2)$-upli distribuiti in s serie distinte, ciascuna delle quali contiene l di tali punti appartenenti agl'intorni infinitesimi di A_t sino a quello di l^o ordine, in guisa che ogni ramo di D contiene il primo punto, dell'intorno di 1° ordine, di una delle serie indicate.

L'*equivalenza in punti doppi della singolarità presentata in* A_t *da una curva canonica generica* sarà perciò eguale ad

$$E_1 = \frac{1}{2} M_1(M_1 - 1) + \frac{1}{2} \epsilon s(s-2)(s-3)l.$$

9. — La curva Φ rappresentata dalla (18), che per $n > 3$ passa per i punti doppi variabili della corrispondente Δ, nel caso del punto s-uplo di D ora esaminato si riconoscerà contenere A_t, per $\epsilon = 1$, $l > 1$, $n > 4$, od $\epsilon = 0$, con la molteplicità

$$M_1' = (s-2)(n-\epsilon-2) - 1;$$

ed il gruppo delle tangenti in tale punto sarà costituito da rette tutte distinte fra loro e generiche se è $\epsilon = 0$.

Si riconosce poi essere per $\epsilon = 1$ e

1° per $s = n - 1 = 3, \quad \Phi = \varphi_0;$

2° „ $l > 1,\ 4 \neq s \geq 3, \quad \Phi = f^{l-2} \sum_{i=0}^{i=\lambda_0-1} f^{(s-i-3)l} \varphi_i + f^{l-1} \sum_{i=\lambda_0}^{i=s-4} f^{(s-i-3)l} \varphi_i + \varphi_{s-3}$

3° „ $l > 1,\ s = 4, \quad \Phi = \varphi_1;$

4° „ $l = 1,\ s = n - 1 \geq 4, \quad \Phi = \varphi_1 f^{n-5} + \varphi_2 f^{n-6} + \ldots + \varphi_{n-5} f + \varphi_{n-4};$

ov'è $\lambda_0 =$ parte intera di $\frac{s-3}{2}$ e le $\varphi_i = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, s-3)$ rappresentano delle curve le quali hanno in A_t la molteplicità $M_1' - s(s-i-3)l - s(l-\alpha) + i$, dov'è $\alpha = 2$ per $l > 1$, $i = 0, 1, \ldots, \lambda_0 - 1$; ed è $\alpha = 1$ negli altri casi.

Da ciò segue, per la ricordata proposizione della fine del n° 6, che nei primi due casi sopra specificati la Φ contiene A_t come M_1'-uplo ed infinitamente vicini ad esso ls punti di molteplicità $s - 3$ (≥ 0) coincidenti con i punti $(s-2)$-upli della Δ. Nei due casi ultimi invece, la Φ contiene A_t come $(M_1' + 1)$-uplo ed infinitamente vicino ad esso un punto $(s-4)$-uplo sopra ciascuno degli s rami di D uscenti da A_t stesso.

La molteplicità d'intersezione in A_t delle due curve Δ e Φ risulterà perciò espressa, com'è facile riconoscere, in ogni caso di $n > 3$, da $H_1 = M_1 M_1' + \epsilon s(s-2)(s-3)l$.

Se è $n > 3$, il numero dei punti doppi variabili d'una curva canonica generica Δ è quindi diminuito, per l'esistenza del considerato punto s-uplo di D, di $\frac{1}{2} H_1$ unità; ed il genere di Δ vien diminuito di $E_1 - \frac{1}{2} H_1 = s(s-2)^2 l = (n - \epsilon)(s-2)^2$ unità. E questa è pure la diminuzione subìta dal *genere lineare* di Π_n, escluso il caso di $m = n = s + 1$ (piano razionale), poichè nella Δ, cioè sopra Π_n, non esistono curve eccezionali.

Quand'è $n = 3$ basta qui considerare il caso di $s = 2$, nel quale, come mostra la (20), l'equazione delle curve canoniche, e quindi tutti i caratteri di un piano ciclico multiplo, non subiscono alcuna variazione per la supposta presenza d'un punto doppio sopra D.

Considerando il numero dei coefficienti mancanti nelle Ψ_{ih-3} $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ si ottiene, come diminuzione P'' subìta dal genere geometrico del piano ciclico dovuta alla presenza del punto s-uplo qui esaminato $(2 \leq s \leq n)$ sopra D:

$$(21) \quad P'' = l\{(s-1)_2 + (s-2)_2 + \ldots + (3)_2 + (2)_2\} = (s)_3 l.$$

Dunque:

Se la curva di diramazione D, *d'ordine* $m = hn$, *d'un piano ciclico d'indice* n, *possiede un punto multiplo ordinario* A *di molteplicità* $s \leq n$ *ed è* $n = ls + \epsilon$, *ove* l *è un intero positivo ed* ϵ *è eguale a zero od uno; le curve canoniche di* Π_n *formano un sistema d'equazione* (16) *nella quale le forme* Ψ_{ih-3} $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ *sono quelle designate nella* (20). *Tali curve canoniche* Δ *segnano coi loro contatti variabili* n*-punto sulla* D *una serie lineare* $g_{\nu_1}^{\rho_1}$, *essendo* $\rho_1 = [(n-1)h-1]_2 - (s-2)_2 - 1$; $\nu_1 = nh[(n-1)h-3] - s(s-2)$.

Una generica di queste Δ *contiene il punto* A *con la molteplicità* $M_1 = s(s-2)l$ *e, per* $\epsilon = 1$, s *serie di punti* $(s-2)$*-upli, ciascuna costituita da* l *di tali punti infinitamente vicini fra loro ed al punto* A, *appartenenti ai successivi intorni infinitesimi di questo punto sino a quello di* 1° *ordine, in guisa che ogni ramo di* D *uscente da* A *contiene (nell'intorno di 1° ordine di* A*) uno dei punti* $(s-2)$*-upli indicati.*

Il genere delle Δ, o genere lineare (*escluso il caso di* $m = n = s+1$) *del piano ciclico, è*

$$n[(n-1)h-3]^2 - s(s-2)^2 l + 1.$$

Il genere geometrico P_g *del piano ciclico è* (*per* $s < m-1$)

$$(n)_3 h^2 + \frac{1}{2}(n)_2 h(h-3) + n - (s)_3 l - 1.$$

In particolare si ha che *un punto doppio (isolato), della curva di diramazione, non ha alcuna influenza sui caratteri del piano multiplo ciclico.*

Principali singolarità elementari d'un piano triplo ciclico.

10. — Esaminiamo *per un piano (triplo ciclico)* Π_3 *l'influenza di due punti multipli* A, A′ *di* D *infinitamente vicini fra loro.*

Siano (conformemente al n° 3) $s = 3l + n_0$, $s' = 3l_1 + n_1$ (ove l, l_1, n_0, n_1 sono interi positivi o nulli, tali che $n_0, n_1 \leq 2$) le moltiplicità di A, A'; ed assumiamo l'origine, A_t, in A e come asse x la retta AA'.

Dei tre casi distinti nella proposizione del n° 3 per le molteplicità s ed s' ($\leq s$), non s'avranno qui a considerare che gli ultimi due; e poichè il penultimo caso ($s + s' \geq n > s$) non si presenta che per $s = s' = 2$, cioè per un tacnodo di D, il quale punto non ha (com'è facile vedere) alcuna influenza sulle aggiunte ad F, rimane solo a considerare il caso di $s \geq 3$.

La F conterrà come infinitamente vicini sull'asse x, a partire da A_t, $l + l_1 + \xi$ punti tripli ($\xi = 1$ per $n_0 + n_1 \geq 3$, $\xi = 0$ negli altri casi), dei quali $l - 1$ appartengono a rette (infinitesime) triple ed η ($\eta = 1$ per $n_0 = 2$, $\eta = 0$ negli altri casi) ad una retta (infinitesima) doppia per F stessa.

Le aggiunte ad F, la cui equazione deve rientrare nel tipo (13), dovranno quindi contenere altri $l_1 + \xi - \eta$ punti di x infinitamente vicini a quelli che già posseggono per la (13) stessa. Onde, com'è facile riconoscere, s'avrà che nella (15), o nell'equazione delle curve canoniche

$$(22) \quad \Delta = \Psi^3_{2h-3}([x, y; 2l + \eta - 1], t) + f([x, y; s], t)\Psi^3_{h-3}([x, y; l - 1], t) = 0$$

(ove la f ha la forma espressa dalla (9), nel n° 3), dev'essere, posto $l' = 2l + l_1 + \xi - 1$,

$$\Psi_{2h-3} = yt^{2h-l'-2}\Psi_{l'-2}([x, y; 2l + \eta - 2], t) + \Psi_{2h-3}([x, y; l'], t).$$

Ne segue che la Δ non passa per A' se è $n_0 = 0$, $s' = 2$; vi passa semplicemente se è $n_0 = 2$, $s' = 2, 3$; contiene A' come quadruplo quando è $n_0 = 2$, $s' \geq 4$; e lo contiene come triplo in ogni altro caso. E poichè A' non influisce sul numero dei punti tripli variabili di Δ, il genere di questa curva risulterà ulteriormente diminuito (oltre a quanto s'è indicato nel n° 7) di zero unità quand'è $n_0 \neq 1$, $s' = 2$; od $n_0 = 2$ $s' = 3$; di 6 (unità) quando si ha $n_0 = 2$, $s' \geq 4$; e di tre (unità) negli altri casi.

S'ha pure immediatamente $l_1 + \xi - \eta$ come diminuzione fatta subire da A' al genere geometrico di Π_3 ed alla dimensione della serie lineare segnata sopra D dai contatti tripunto variabili delle Δ, i quali caratteri nell'ipotesi di A s-uplo ordinario (ed unico) per la D sono rispettivamente eguali ad $\frac{1}{2}(h - 1)(5h - 4) - \frac{1}{2}l(5l + 4\eta - 3)$, $(2h - 1)_2 - (2l + \eta)_2 - 1$.

L'ordine della serie ora indicata rimane invariato, cioè eguale a $3h(2h-3)-s(2l+\eta-1)$ (supposto D non abbia singolarità fuori di A), quando A' è doppio e s'ha $n_0=0$ (od $s=2$), e vien diminuito di s' unità negli altri casi.

Se la curva di diramazione D ($f=0$), *d'ordine* 3h, *d'un piano triplo ciclico* Π_3 *contiene un punto* s-*uplo* A *al quale è infinitamente vicino un punto* s'-*uplo* A', *ed è*

$$s=3l+n_0,\quad s'=3l_1+n_1,\quad s\geq s'$$

(*ove* l, l_1, n_0, n_1 *son interi positivi o nulli tali che* $n_0, n_1 \leq 2$), *l'equazione delle curve canoniche* Δ *di* Π_3 *è data dalla* (22), *avendo posto* $\xi=0$ *per* $n_0+n_1<3$, $\xi=1$ *per* $n_0+n_1\geq 3$, $\eta=0$ *per* $n_0\leq 1$, $\eta=1$ *per* $n_0=2$.

Ogni Δ *ha in* A *la molteplicità* $6l+2\eta-3$ *ed in* A' *la molteplicità* 0, 1, 3, 4 *secondo che è rispett.* $n_0=0$, $s'=2$ (*od* $s=s'=2$); $n_0=2$, $s'=2, 3$; $n_1=1$, *od* $n_0=0$, $s'>2$; $n_0=2$, $s'\geq 4$. *Ed in corrispondenza a ciò vien diminuito, per la presenza di* A', *rispett. di* 0, 0, 3, 6 unità *il genere di* Δ, *o* genere lineare (*escluso il caso di* $l=h-1$, $s>1$, *nel quale la retta* AA' *è una curva eccezionale*) *di* Π_3, *il quale, quando* D *abbia come unica singolarità un punto* s-*uplo ordinario*, è

$$3(2h-3)^2-3(2l-1)^2-\eta(9l-2)+1.$$

Il numero dei punti tripli variabili della curva canonica generica di Π_3, *quando esista su questo il punto* A, *non muta per la presenza di* A', *cioè è* $(h-3)(2h-3)-(l-1)(2l+\eta-1)$.

Supposto sempre che sopra D *non vi siano altri punti singolari fuori di* A, A', *il* genere geometrico *di* Π_3 *è*

$$\frac{1}{2}(h-1)(5h-4)-\frac{1}{2}l(5l+4\eta-3)-l_1-\xi+\eta.$$

11. — Se sopra D seguono al punto s-uplo A, in direzioni distinte (nell'intorno di 1° ordine di A), più punti A'_i di molteplicità $s'_i (i=1, 2, \ldots)$ in modo che risulti $s\geq s_1'+s'_2+\ldots$, si potran applicare i risultati precedenti ad ognuno di tali punti A'_i.

Limitandoci a considerare il *genere lineare* $p^{(1)}$ ed il *genere superficiale* P_g di Π_3, i quali nel caso di D generale nel suo ordine $3h$ sono rispett. eguali a $3(2h-3)^2+1$, $\frac{1}{2}h(5h-9)+2$, esporremo nella seguente tabella la diminuzione apportata in tali caratteri da un qualsiasi punto multiplo della specie indicata.

Punto s-uplo della curva di diramaz.		Diminuzione subìta dal genere	
Valore di s	Punti infinitam. vicini (in direz. distinte)	lineare $p^{(1)}$ di Π_3	superficiale P_g di Π_3
2	1 (eventuale) p^to^ doppio	0	0
3	" " " "	3	1
3	1 punto triplo	6	2
4	" " " o 4-uplo	6	2
4	$0 \leq \alpha_2 \leq 2$ punti doppi	$3 + 3\alpha_2$	$1 + \alpha_2$
$3l \geq 3$	$0 \leq \alpha_i$ punti i-upli	$3(2l-1)^2 + 3(\alpha_3 + \alpha_4 + ...)$	$\frac{1}{2}l(5l-3) + \alpha_3 + .. + 2\alpha_6 + .. + 3\alpha_9 + ...$
$3l + 1$	$(i = 2, 3, ...)$, essendo	$3(2l-1)^2 + 3(\alpha_2 + \alpha_3 + ...)$	$\frac{1}{2}l(5l-3) + \alpha_2 + .. + 2\alpha_5 + .. + 3\alpha_8 + ...$
$3l + 2$	$s \geq 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + ...$	$12l^2 - 3l + 1 + 6(\alpha_4 + \alpha_5 + ...)$	$\frac{1}{2}l(5l+1) + \alpha_4 + .. + 2\alpha_7 + .. + 3\alpha_{10} + ...$

Ricerche sulla muscolatura della lingua dei Geconidi.

Nota del Dott. EDOARDO ZAVATTARI
Assistente al R. Museo Zoologico di Torino.

(Con una Tavola).

I Geconidi presentano rispetto alla muscolatura della lingua, e più specialmente rispetto al comportamento del muscolo ioglosso nella compagine di questo organo, una disposizione al tutto caratteristica, e che li differenzia notevolmente dalle altre famiglie di Sauri e da tutti i Rettili in genere.

Questo fatto venne per la prima ed unica volta, per quanto io mi sappia, messo in evidenza nel *Platidactylus* da Duvernoy (3), giacchè nessun autore dopo di lui, à studiato i muscoli della lingua dei Geconidi. Ludwig Ferdinand von Bayern (8) nel suo classico e monumentale (come giustamente lo chiama Oppel) lavoro sull'anatomia della lingua non à esaminato alcun Geconide; Hoffmann (5) non cita i Gechi descrivendo il muscolo ioglosso dei Sauri, Oppel (9, p. 153) non riferisce che con poche parole quanto aveva trovato Duvernoy, infine Kathariner (7), che à studiati accuratamente i Camaleonti rispetto a questo argomento, e recentemente Gandolfi (4) che à esaminati sotto questo aspetto alcuni Agamidi ed Iguanidi, non hanno alcun richiamo ai Geconidi.

Per queste ragioni mi parve interessante ricercare se questa disposizione, descritta nel solo *Platidactylus,* fosse costante in tutta la famiglia, assai uniforme del resto nel suo insieme, alla quale questo genere appartiene. Ho cercato quindi di esaminare un numero notevole di specie, rappresentanti possibilmente parecchi generi, ed ò trovato che i reperti sono sempre simili, e spesse volte identici.

Le specie sulle quali ò istituite le mie ricerche sono le seguenti:

Gymmodactylus horridus Burm.
Gonatodes albogularis D. e B.
Phyllodactylus europaeus Géné.
Ptyodactylus lobatus Geoff.
Hemidactylus turcicus Linn.
Phyllopezus goyazensis Ptrs.
Gecko monarchus D. e B.
Tarentola mauritanica Linn.
Tarentola annularis Geoff.
Tarentola delalandii D. e B.

“ The tongue is fleshy, moderately elongate, very feebly incised anteriorly and capable of protrusion out of the mouth „, dice Boulenger (1, p. 5) nel riferire i caratteri generali dei Geconidi; infatti in tutte le specie da me esaminate, la lingua si presenta sempre con tale aspetto. Essa è arrotondata in avanti e leggermente incisa nel mezzo; in addietro si prolunga in due lobi laterali, che abbracciano nel mezzo la laringe, che viene ad aprirsi nella parte posteriore della bocca (V. Tavola Fig. 4-5-6-7). La lingua è inoltre rivestita di una mucosa assai spessa, che presenta una grandissima quantità di papille più sviluppate e più alte, specialmente nella regione mediana.

Alla costituzione della massa carnosa prendono parte i **muscoli genioglosso, ioglosso; transversalis** e **longitudinalis linguae**. Esaminando le sezioni in serie in punti differenti, riscontriamo le seguenti disposizioni:

Una sezione condotta molto in addietro, in corrispondenza della laringe, mostra nella regione mediana il *cavum laringis* di forma romboidale ad asse maggiore antero-posteriore, delimitato dalle cartilagini e dai muscoli laringei, e da ciascun lato ed alquanto ventralmente la sezione ovoidale del muscolo ioglosso, le cui fibre ànno quivi un decorso nettamente longitudinale. Più ventralmente ancora appaiono il processo entoglosso, i muscoli genioioidei a decorso antero-posteriore, e miloioidei a decorso trasversale.

Una sezione successiva in corrispondenza del terzo posteriore della lingua subito in avanti alla laringe (Vedi Tavola, Fig. 3) mostra quest'altra disposizione: Lateralmente appaiono i muscoli ioglossi (*hgl*) sezionati per traverso, ben distinti ed aventi una forma quasi circolare. Ciascun ioglosso è circondato da un anello di fibre muscolari sezionate per il lungo (*ahgl*), ben individualizzato nella parte ventrale ed esterna; invece dorsalmente i fasci muscolari si scompongono alquanto, soprattutto verso la linea mediana, dirigendosi da una metà all'altra della lingua ed incrociandosi con quelli provenienti dal lato opposto. In basso e nel mezzo appare la sezione del processo entoglosso del ioide (I) circondato esso pure da un anello di fibre muscolari (*a*I), le quali formano in tal modo una specie di guaina lassamente aderente alla cartilagine ioidea. Anche queste fibre, volgendo verso il dorso della lingua, si sfasciano, si intrecciano fittamente con le fibre provenienti dagli anelli muscolari dell'ioglosso, formando in tal guisa un compatto reticolato al di sotto della mucosa, reticolato che viene ad essere maggiormente rafforzato da una serie di fibre disposte trasversalmente, che nel loro insieme costituiscono il muscolo *transversalis linguae* (trasverso dell'anatomia umana). Infine lateralmente appaiono numerose fibre formanti un fascio distinto a decorso ventrodorsale e che rappresentano la porzione terminale del muscolo genioglosso (*ggl*). Esse pure giunte sotto la mucosa si sfasciano, irradiando a pennello, rimanendo assai indipendenti ed intrecciandosi particolarmente col *transversalis linguae*.

Una sezione interessante il terzo medio (fig. 2) là ove la lingua si rende libera dal pavimento della bocca, non mostra più in basso e sulla linea mediana il processo entoglosso circondato dal suo anello muscolare, ma mette invece in evidenza da ciascun lato, anzichè un ampio disco ovoidale rappresentante le fibre recise trasversalmente dell'ioglosso, due masse circolari costituite da fasci a decorso postero-anteriore e rappresentanti lo smembramento dello stesso ioglosso. Analogamente l'anello muscolare, che nella precedente sezione era unico ed abbracciava il rispettivo ioglosso, quivi si divide e si vengono così a trovare in ciascuna metà della lingua due anelli muscolari circondanti i due cordoni dell'ioglosso. Anche in questo caso, verso il dorso della lingua gli anelli si disfanno, le fibre si allargano

a ventaglio intrecciandosi con quelle del lato opposto. Il *M. transversalis*, che nella sezione precedente era poco accennato, qui si fa più sviluppato e l'intreccio con le fibre degli anulari e dei genioglossi, i quali ultimi si comportano similmente a quanto ò descritto prima, è più fitto ed intricatissimo. Inoltre al disotto della mucosa appaiono alcune fibre (*ln*) a decorso antero-posteriore, racchiuse nelle strette maglie formate dagli altri fasci muscolari e che rappresentano il *M. longitudinalis linguae* (il linguale superiore dell'anatomia umana).

Da ultimo, una sezione condotta in corrispondenza del terzo anteriore della lingua, poco in addietro della punta (fig. 1) ci fa vedere che ciascuna porzione, in cui erasi precedentemente diviso l'ioglosso, è andata nuovamente suddividendosi in altre due parti; noi troviamo così in ciascuna metà le sezioni di quattro cordoni muscolari a fibre decorrenti dall'indietro all'innanzi, assai ridotti di calibro e non uniformi nella loro grandezza. Ciascun cordone è circondato dal suo rispettivo anello muscolare, risultante dal frazionamento degli anelli descritti in addietro. Mentre tali anelli sono ben sviluppati ed individualizzati ventralmente, i fasci che li compongono verso il dorso della lingua si allontanano, si intrecciano con quelli venienti e dagli anelli vicini e dal lato opposto, costituendo così al disotto della mucosa una lamella muscolare robustissima e compatta; inoltre vediamo assai abbondanti le sezioni delle fibre dei muscoli *longitudinalis* e *transversalis*.

***

Ricostruendo ora il decorso dei differenti muscoli, possiamo renderci conto del comportamento dei singoli fasci e della formazione delle disposizioni, che le sezioni mettono in evidenza.

M. Genioglosso.

Pari, origina da breve tratto della faccia interna dell'osso dentale della mandibola lateralmente all'articolazione intermandibolare; si dirige quindi in addietro ed alquanto all'esterno, decorrendo i fasci dorsalmente al muscolo genioideo e ventralmente alla mucosa, che tappezza il pavimento della bocca. Giunte le

fibre in corrispondenza della regione in cui la mucosa si riflette per rivestire la faccia inferiore della porzione libera della lingua, i fasci cambiano direzione e si fanno dapprima obliqui e poi verticali e vengono ad occupare i lati della lingua, avendo all'interno il muscolo ioglosso ed all' esterno la mucosa. Costituiscono così una lamella muscolare, che forma i margini della lingua e dei quali occupa i due terzi posteriori. Verso il dorso le fibre muscolari si dissociano, si sfioccano a guisa di un pennello irradiando verso la mucosa e terminando liberamente. Esse si intrecciano nella loro porzione terminale specialmente con i fasci del *transversalis* e cooperano con essi a formare i bordi della lingua.

M. Ioglosso.

Pari, origina dal margine anteriore del grande corno del ioide (primo corno branchiale secondo Gaupp) in corrispondenza della sua porzione mediana, e si dirige successivamente in avanti e lateralmente al processo entoglosso. In questo primo tratto del suo decorso esso è in rapporto ventralmente col M. genioioideo, dorsalmente col M. ceratoioideo, col corno iale del ioide, con la faccia profonda della mucosa faringea. Giunto in prossimità della laringe, questo muscolo dirigendosi sempre in avanti, si porta verso la linea mediana ed alquanto dorsalmente, per immettersi nella lingua, che percorre in tutta la lunghezza e di cui costituisce la parte essenziale. Durante il suo tragitto esso assume la forma di un cordone muscolare a sezione dapprima ellittica e successivamente circolare. Dopo breve percorso, ciascun cordone si scinde in due fasci più piccoli, i quali alla lor volta verso il terzo anteriore della lingua, si suddividono nuovamente in due nuovi fascetti; risulta di conseguenza che in prossimità della punta della lingua ciascun ioglosso si presenta suddiviso in quattro cordoni distinti. Questi non presentano però un calibro uniforme, in generale il fascio esterno è più esile, qualche volta rappresentato solamente da poche fibre. In qualche altro caso, come ad esempio nel *Gonatodes albogularis* D. e B., molto innanzi, proprio all'apice della lingua, troviamo più di otto fascetti longitudinali, tutti dello stesso diametro, formati da poche fibre e circondati tutti da anelli muscolari.

Nella descrizione delle sezioni ò detto che ciascun ioglosso è circondato da un anello muscolare unico là ove l'ioglosso è rappresentato da un solo fascio; multiplo, invece, là ove l'ioglosso si scinde nei suoi cordoni terminali. Nel loro insieme questi anelli vengono a formare in tal modo una specie di cilindro cavo, nel quale è allogato il muscolo ioglosso. Analogamente, intorno al processo entoglosso del ioide, si trova pure un canale muscolare, il quale assai ampio in addietro, va riducendosi coll'assottigliarsi del processo entoglosso, per poi scomparire, quando viene a mancare il sostegno cartilagineo alla lingua.

La formazione di questi anelli ed il successivo frazionamento del muscolo ioglosso, si può molto bene seguire in alcuni preparati, quali quelli del *Gymnodactylus horridus* Burm. In prossimità delle sue inserzioni sul grande corno del ioide il M. ioglosso è costituito da fibre a decorso esclusivamente longitudinale; in seguito, col procedere di esso, le fibre interne cominciano a farsi oblique e successivamente trasversali, così da formare un primo abbozzo dell'anello muscolare dell'ioglosso. Il numero delle fibre, che in tal guisa vengono a mutare decorso, va poi crescendo notevolmente, anche perchè i fasci esterni assumono un analogo comportamento, talchè in corrispondenza del terzo posteriore della lingua viene ad essere completato l'anello muscolare. Poco dopo che si è avuta la formazione di questa disposizione, comincia il frazionamento dell'ioglosso e la formazione dei suoi cordoni terminali. Alcune fibre più interne del muscolo anulare si dirigono fra i fasci longitudinali allontanandoli gli uni dagli altri, raggiungendo a poco a poco l'anello superiore, ove tornano nuovamente ad espandersi. In tal modo si vengono a costituire due nuovi cordoni, i quali successivamente per un identico meccanismo si suddividono; cosicchè verso l'estremità della lingua risultano otto cordoni longitudinali e paralleli.

Ugualmente avviene la formazione dell'anello muscolare circondante il processo entoglosso. Dopo che si è stabilito l'anello dell'ioglosso, le fibre interne di esso volgono verso la linea mediana, quelle ventrali in alto, quelle dorsali in basso, così da formare dapprima un semi-anello a ciascun lato del processo entoglosso. In seguito si fondono con le fibre provenienti dall'altra parte, venendo in tal modo a completarsi vicendevolmente.

La disposizione qui descritta è ben visibile in sezioni fatte molto all'indietro in corrispondenza della cavità laringea; più innanzi invece le fibre che costituiscono questo anello si individualizzano, rendendolo perfettamente separato. Esse circondano così l'entoglosso e si fondono solo dorsalmente con i fasci degli altri anelli muscolari. Quando verso la metà della lingua scompare il processo entoglosso, l'anello che lo circonda si riduce, il canale da esso delimitato si oblitera e le fibre che ancora rimangono si confondono con quelle degli anelli muscolari del M. ioglosso.

Longitudinalis linguae.

Costituisce nel suo insieme un muscolo impari, mediano, formato da fibre disposte longitudinalmente dall'avanti all'indietro situate sotto la faccia profonda della mucosa del dorso della lingua e racchiuse fra le maglie delimitate dal *transversalis* e dai fasci terminali degli anelli muscolari degli ioglossi. In avanti le fibre si inseriscono alla faccia profonda della mucosa e sono specialmente numerose in vicinanza della punta, in addietro si perdono insensibilmente nello spessore della massa carnosa.

Transversalis linguae.

Esso pure forma nel suo complesso un muscolo impari, costituito da fibre disposte trasversalmente, situate subito al di sotto della mucosa del dorso, che assume la forma di una lamella che contiene nel suo interno i fasci del *longitudinalis* e che è rafforzata dalle fibre terminali degli anelli muscolari degli ioglossi e dalle estremità dei fasci dei genioglossi. Le sue fibre si inseriscono lateralmente sulla faccia interna della mucosa.

***

Facendo ora un breve raffronto, fra quanto ànno descritto e figurato gli autori, che si sono precedentemente occupati della lingua dei Sauri, con ciò che ò messo in evidenza nei Gechi, risulteranno esatte le parole, che io scrivevo al principio di questa nota; che cioè: i Geconidi per rispetto al comportamento

del muscolo ioglosso nella compagine della lingua si allontanano notevolmente dagli altri Sauri.

Infatti nei generi *Lacerta* (Ludwig Ferdinand (8), Tav. 20), *Draco* (Ludw. Ferd., Tav. 19) (Gandolfi (4), fig. 7-8), *Calotes* (Ludw. Ferd., Tav. 13 (*Broncocela*)) (Gand., fig. 4-5), *Agama* (Gand, fig. 1-2-3-6) ed altri, il muscolo ioglosso si presenta sempre unico in tutto il suo percorso; esso si va assottigliando quanto più procede verso la punta della lingua, circondato dal suo anello muscolare, ma rimane sempre indiviso. Solo nei generi *Anguis* (Ludwig. Ferd., Tav. 14, Fig. 4) e *Pseudopus* (Ludw. Ferd., Tav. 16, Fig. 3) si trova una disposizione, che preludia in certo qual modo, quella che ci è presentata dai Geconidi. In questi Anguidi, infatti, ciascun ioglosso si divide in due cordoni longitudinali, che però non si suddividono nuovamente; anche ciascun muscolo anulare dell'ioglosso si scinde in due anelli secondari, ma non sempre bene individualizzati.

Inoltre manca nei Gechi ogni traccia del muscolo *radialis linguae*, il quale è invece assai sviluppato in molti Ignanidi ed Agamidi [*Cyclura* (Gandolfi, fig. 10), *Liolaemus* (Gand., fig. 11), *Agama* (Gand., fig. 3)] ecc.

Gli altri muscoli, genioglosso, *transversalis* e *longitudinalis linguae*, come pure l'anello muscolare del processo entoglosso, non presentano alcuna caratteristica essenziale, ma si comportano, anche nei Geconidi, come in tutti gli altri Sauri.

BIBLIOGRAFIA

(1) Boulenger G. A. *Catalogue of the Lizards in the British Museum*, vol. I London, 1885.

(2) Cornig H. K., *Ueber die Entwickelung der Zungenmuskulatur bei Reptilien*, " Verhandlungen der Anat. Gesellschaft in Basel ", 1895, S. 165-175.

(3) Duvernoy S. L., *De la langue considérée comme organe de préhension des aliments ou Recherches anatomiques sur les mouvements de la langue dans quelques animaux, particulièrement de la classe des Mammifères et de celle des Reptiles*, " Mémoires de la Société d'Histoire Naturelle de Strasbourg ", T. 1, p. 20, 5 Tabl. 1830.

(4) Gandolfi, *Die Zunge der Agamidae und Iguanidae*, " Zoolg. Anzeiger ", B. XXXII, nn. 20-21, p. 569-580, 1908.

(5) HOFFMANN C. K., *Dr H. G. Bronn's Klassen und Ordnungen des Thier-Reichs*, Sechster Band. III Abtheilung, *Reptilien*. II. *Eidechsen und Wasserechsen*. Leipzig, 1890.

(6) KALLIUS E., *Beiträge zur Entwickelung der Zunge*, I Teil, *Amphibien und Reptilien*, " Anatomische Hefte ", Band XVI, Heft. III-IV, 1901, p. 531-760, Taf. XLIV-XLVIII.

(7) KATHARINER L., *Anatomie und Mechanismus der Zunge der Vermilinguier*, " Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft ", Neue Folge, B. 22, p. 247-270, Taf. III, 1895.

(8) LUDWIG FERDINAND K. PRINZ VON BAYERN, *Zur Anatomie der Zunge*, " Eine vergleichend-Anatomische Studie ", München, 1884.

(9) OPPEL A., *Lehrbuch der vergleichenden mikroskopische Anatomie der Wirbeltiere*. Dritter Theil. Mundhöhle, Bauchspeicheldrüse und Leber, Jena, 1900.

(10) SEILLER FRH. von, *Ueber die Zungendrüsen von Anguis*, *Pseudopus und Lacerta*, " Archiv für mikrosk. Anatomie ", Bd. 38, pp. 177-264, Taf. X-XIII, 1891.

(11) WIEDERSHEIM R., *Grundriss der vergleichenden Anatomie der Wirbel thiere*. Jena, 1893.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Significato delle lettere: *I.*, processo entoglosso — *ggl.*, muscolo genioglosso — *hgl.*, muscolo ioglosso — *ahgl.*, anello muscolare dell'ioglosso — *aI.*, anello muscolare del processo entoglosso — *tr.*, muscolo transversalis — *ln.*, muscolo longitudinalis.

(I disegni delle sezioni furono eseguiti con microscopio Koristka a tubo chiuso, oc. 3, obb. 2 e camera lucida di Zeiss; risultano quindi ingranditi circa 60 volte e furono alquanto schematizzati).

Fig. 1. *Hemidactylus turcicus* Linn. Sezione della lingua in corrispondenza del terzo anteriore.

Fig. 2. *Hemidactylus turcicus* Linn. Sezione della lingua in corrispondenza del terzo medio.

Fig. 3. *Hemidactylus turcicus* Linn. Sezione della lingua in corrispondenza del terzo posteriore.

Fig. 4. *Phyllopezus goyazensis* Ptrs. Pavimento della bocca per dimostrare la forma della lingua.

Fig. 5. *Tarentola mauritanica* Linn. Id. Id.

Fig. 6. *Hemidactylus turcicus* Linn. Id. Id.

Fig. 7. *Phyllodactylus europaeus* Géné. Id. Id.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

CLASSI UNITE

Adunanza del 31 Gennaio 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Naccari, Direttore della Classe, Spezia, Camerano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Somigliana e Fusari.

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Manno, Direttore della Classe, Carle, Renier, Pizzi, Chironi, Ruffini, D'Ercole, Brondi, Sforza e De Sanctis, Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Graf.

È approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente a Classi unite, 24 gennaio 1909.

L'Accademia procede al conferimento del premio Gautieri per la Letteratura (triennio 1905-1907); e sono proclamati vincitori in parti uguali il Prof. Michele Barbi per la sua edizione critica della *Vita Nuova* di Dante e il Prof. Francesco Torraca per il suo Commento alla Divina Commedia.

Gli Accademici Segretari
Lorenzo Camerano.
Gaetano De Sanctis.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 31 Gennaio 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: MANNO, Direttore della Classe, CARLE, RENIER, PIZZI, CHIRONI, RUFFINI, D'ERCOLE, BRONDI, SFORZA e DE SANCTIS Segretario. — Scusa l'assenza il Socio GRAF.

È approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, 14 gennaio 1909.

Il Presidente presenta un volume offerto in omaggio dal Socio corrispondente DALLA VEDOVA contenente gli *Scritti di geografia e di Storia della geografia concernenti l'Italia pubblicati in onore di Giuseppe Dalla Vedova* (nel cinquantenario del suo insegnamento). Firenze, Ricci, 1908.

In seduta privata si procede poi alla nomina della Commissione pel premio Gautieri nella filosofia (triennio 1906-1908). Sono eletti a farne parte i Soci RUFFINI, CHIRONI e D'ERCOLE.

L'Accademico Segretario
GAETANO DE SANCTIS.

Torino — VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e Reali Principi.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 7 Febbraio 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. PAOLO BOSELLI
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Naccari, Direttore della Classe, Salvadori, Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Fileti, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari e Parona che funge da Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Vice-Presidente avverte che il Presidente Senatore D'Ovidio ed il Segretario Camerano sono assenti per dovere d'ufficio, e che il Socio Segre è pure assente perchè indisposto. Esprime il vivo dispiacere di dover annunziare notizie allarmanti sulla malattia del Collega Morera, e, con affettuose parole, si fa interprete del sentimento di tutti coll'augurare che il caro ed esimio Collega sfugga al grave pericolo.

Dà quindi lettura delle lettere, colle quali i professori Michele Barbi e Francesco Torraca ringraziano per il conferimento del premio Gautieri.

Il Socio Guareschi presenta in omaggio la sua memoria " *La Chimica e Marco Polo*, del Prof. Dott. O. von Lippmann ", e ne parla. Il Presidente ringrazia.

Il Socio Fileti presenta, per l'inserzione negli *Atti*, una nota dei dottori Ponzio e Charrier, col titolo: *Sugli acilazoarili e sul comportamento di alcuni sali di diazonio verso l'etere.*

Il Socio Naccari presenta, per la stampa nelle *Memorie*, un lavoro del Dr. Luigi Botti: *Ricerche sperimentali sulle illusioni ottico-geometriche.* Il Presidente incarica i Soci Naccari e Mosso di riferire intorno ad esso.

Il Presidente comunica che il sig. Ing. Francesco Adamoli ha mandato alla Presidenza una sua Memoria manoscritta col titolo: *Sulle origini, sviluppo e durata di produzione delle energie cosmiche*, e prega i Soci Naccari e Jadanza di esaminarla e di riferirne alla Classe.

Il Socio Mattirolo, anche a nome del Socio Camerano, legge la relazione sulla Memoria del Prof. Gola: *Piante rare o critiche per la Flora del Piemonte*, favorevole per l'accettazione per la stampa.

La relazione è approvata dalla Classe, e la stampa della Memoria è pure approvata a voti unanimi.

LETTURE

Sugli acilazoarili e sul comportamento di alcuni sali di diazonio verso l'etere.

Nota dei D[ri] G. PONZIO e G. CHARRIER.

I.

Sugli acilazoarili.

La preparazione degli acilazoarili R.CO.N=N.Ar mediante l'ossidazione dei corrispondenti idrazocomposti R.CO.NH.NH.Ar (cioè delle acilarilidrazine o arilidrazidi degli acidi)

$$R.CO.NH.NH.Ar \xrightarrow{O} R.CO.N = N.Ar$$

è già stata tentata da molti chimici senza buoni risultati.

Le prime esperienze al riguardo sono quelle di E. Fischer (1), il quale, operando con ossido giallo di mercurio, in soluzione cloroformica, ottenne soltanto liquidi oleosi, di color rosso, instabili, che non potè nè distillare nè purificare e dei quali, per quanto ritenesse che contenessero gli azocomposti, non si occupò ulteriormente.

Più tardi Tafel (2), mediante l'acetato di rame, e Gattermann, Johnson e Hölze (3), mediante il solfato di rame ammoniacale, ottennero come prodotti di ossidazione delle acilarilidrazine le acildiarilidrazine; p. es. dalla benzoilfenilidrazina la benzoildifenilidrazina

$$2C_6H_5.CO.NH.NH.C_6H_5 \xrightarrow{O_2} C_6H_5.CO.NH.N(C_6H_5)_2 + N_2 + C_6H_5COOH + H_2O$$

(1) Annalen *190*, 126 e 131 (1877)
(2) Berichte *25*, 413 (1892).
(3) Id. *25*, 1075 (1892).

D'altra parte è noto che facendo agire l'acido nitroso (da $NaNO_2 + HCl$) sulle stesse acilarilidrazine si formano le corrispondenti nitrosoidrazine: p. es. dalla benzoilfenilidrazina la benzoilfenilnitrosoidrazina

$$C_6H_5.CO.NH.NH.C_6H_5 \xrightarrow{HNO_2} C_6H_5.CO.NH.N(NO).C_6H_5$$

Ciò malgrado noi abbiamo voluto provare se in altre condizioni si potesse portare l'ossidazione sul gruppo —NH.NH— ed arrivare così agli acilazoarili, ed abbiamo trovato che mediante l'*anidride nitrosa* si raggiunge facilmente lo scopo.

Il miglior modo di preparazione di questi interessanti composti consiste nel sospendere le acilarilidrazine in etere anidro (ove sono quasi tutte pochissimo solubili a freddo) e di assoggettarle all'azione di una corrente di *anidride nitrosa* (da $As_2O_3 + HNO_3$, $d = 1{,}38$) agitando continuamente e raffreddando bene in ghiaccio. Terminata l'ossidazione, cioè quando non vi è più idrazina indisciolta, si lava la soluzione eterea con idrato sodico diluito (allo scopo di eliminare un po' di nitrosoidrazina che sempre si forma per una reazione secondaria), si secca su solfato sodico anidro e si elimina il solvente nel vuoto: il residuo solido che rimane è formato dall'acilazoarile quasi puro.

Gli acilazoarili $R.CO.N = N.Ar$ che descriviamo ora son tutti solidi, ben cristallizzati, di color variabile dal rosso al bruno. La loro proprietà più caratteristica è quella di essere con grande facilità ridotti a freddo dalla fenilidrazina e trasformati negli idrazocomposti (le acilarilidrazine) da cui derivano

$$R.CO.N{=}N.Ar + C_6H_5HN.NH_2 = R.CO.NH.NH.Ar + C_6H_6 + N_2$$

La riduzione ha luogo sciogliendo l'acilazoarile in qualsiasi solvente organico; si eseguisce però nel miglior modo coll'etere, poichè le acilarilidrazine che sono pochissimo solubili a freddo in questo, si separano senz'altro cristallizzate allo stato di purezza, e quelle solubili si possono facilmente precipitare con eteri di petrolio.

Questa reazione, che è accompagnata da vivo sviluppo gassoso, è simile a quella già osservata da Walter (1) per l'azo-

(1) Journ. f. Prakt. Chem. (2), *52*, 141 (1895).

benzolo, il quale pure è ridotto dalla fenilidrazina, ma solo per riscaldamento a 160°-170°.

Gli acilazoarili sono anche ridotti in acilarilidrazine dall'idrogeno nascente, però questa reazione non è così rapida come quella ora accennata.

Benzoil-azo-fenile $C_6H_5.CO.N = N.C_6H_5$. Si ottiene ossidando la benzoilfenilidrazina $C_6H_5.CO.NH.NH.C_6H_5$ con anidride nitrosa nel modo sopra detto. Cristallizzato dall'alcool si presenta in grossi prismi rossi, fusibili a 30° senza decomposizione.

I. Gr. 0,4120 di sostanza fornirono gr. 1, 1203 di anidride carbonica e gr. 0,1847 di acqua.

II. Gr. 0,1202 di sostanza fornirono cc. 13,3 di azoto ($H_0 = 745,00$ $t = 8°$), ossia gr. 0,015803.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{13}H_{10}N_2O$
	I	II	
Carbonio	74,15	—	74,28
Idrogeno	4,98	—	4,76
Azoto	—	13,14	13,33

È poco solubile a freddo in alcool ed in eteri di petrolio, molto solubile negli altri solventi organici.

È prontamente ridotto a freddo dalla fenilidrazina: aggiungendo quest'ultima alla soluzione eterea concentrata, intensamente rossa, del benzoil-azo-fenile, e raffreddando in ghiaccio, si osserva un vivo sviluppo di azoto e la soluzione si decolora in seguito alla formazione della benzoilfenilidrazina $C_6H_5CO.NH.NH.C_6H_5$, che tosto si separa in lamine bianche fusibili a 168°.

Gr. 0,2351 di sostanza fornirono cc. 27,3 di azoto ($H_0 = 732,90$ $t = 10°$), ossia gr. 0,031657.

Cioè su cento parti:

Calcolato per $C_{13}H_{12}N_2O$: azoto 13,20; trovato: azoto 13,46.

La stessa riduzione ha luogo trattandolo, in soluzione al-

coolica, con zinco ed acido acetico: dalla soluzione decolorata si precipita, per aggiunta di acqua, la benzoilfenilidrazina la quale, cristallizzata dall'alcool, si fonde a 168°.

Gr. 0,2076 di sostanza fornirono cc. 23,5 di azoto ($H_0 = 734,00$ $t = 9°$), ossia gr. 0,027410.

Cioè su cento parti:

Calcolato per $C_{13}H_{12}N_2O$: azoto 13,20; trovato: azoto: 13,20.

E. Fischer (loc. cit.) aveva già ottenuto il benzoil-azo-fenile, però liquido ed impuro, ossidando la benzoilfenilidrazina con ossido di mercurio giallo, in soluzione cloroformica, e lo aveva chiamato *benzoato di diazobenzol.*

Anisoil-azo-fenile $CH_3O.C_6H_4.CO.N = N.C_6H_5$. Si prepara ossidando l'anisoilfenilidrazina $CH_3O.C_6H_4.CO.NH.NH.C_6H_5$ con anidride nitrosa. Cristallizzato dall'alcool si presenta in larghe lamine color ametista, fusibili a 40° senza decomposizione.

I. Gr. 0,3218 di sostanza fornirono gr. 0,8244 di anidride carbonica e gr. 0,1550 di acqua.

II. Gr. 0,1533 di sostanza fornirono cc. 16 di azoto ($H_0 = 727,94$ $t = 18°$), ossia gr. 0,017823.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{14}H_{12}N_2O_2$
	I	II	
Carbonio	69,87	—	70,00
Idrogeno	5,35	—	5,00
Azoto	—	11,62	11,66

È poco solubile a freddo in alcool e in eteri di petrolio, molto solubile negli altri solventi organici.

Sciolto in alcool e trattato con acido acetico e polvere di zinco si riduce rapidamente in anisoilfenilidrazina $CH_3O.C_6H_4.CO.NH.NH.C_6H_5$ la quale, precipitata con acqua dalla soluzione diventata incolora, è cristallizzata dall'alcool, si fonde a 179°.

Gr. 0,1139 di sostanza fornirono cc. 12,2 di azoto ($H_0 = 732,94$ $t = 18°$), ossia gr. 0,013460.

Cioè su cento parti:

Calcolato per $C_{14}H_{14}N_2O_2$: azoto 11,57; trovato: azoto 11,81.

La stessa riduzione è operata istantaneamente dalla feni-

lidrazina: aggiungendo quest'ultima alla soluzione eterea concentrata e intensamente rossa dell'anisoilazofenile e raffreddando in ghiaccio si osserva un vivo sviluppo di azoto e la soluzione si decolora in seguito alla formazione dell'anisoilfenilidrazina, che tosto si separa in cristalli bianchi fusibili a 178°.

Gr. 0,3049 di sostanza fornirono cc. 30,2 di azoto ($H_0 = 745,00$ $t = 9°$), ossia gr. 0,035756.

Cioè su cento parti:

Calcolato per $C_{14}H_{14}N_2O_2$: azoto 11,57; trovato: azoto 11,72.

p-toluil-azo-fenile $CH_3.C_6H_4.CO.N = N.C_6H_5$. Ottenuto allo stesso modo dalla p-toluilfenilidrazina $CH_3.C_6H_4.CO.NH.NH.C_6H_5$ con anidride nitrosa, e cristallizzato dall'alcool si presenta in grossi prismi rossi fusibili a 41°.

I. Gr. 0,4239 di sostanza fornirono gr. 1,1639 di anidride carbonica e gr. 0,2153 di acqua.

II. Gr. 0,3616 di sostanza fornirono cc. 38,8 di azoto ($H_0 = 741,64$ $t = 12°$), ossia gr. 0,045135.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{14}H_{12}N_2O$
	I	II	
Carbonio	74,88	—	75,00
Idrogeno	5,63	—	5,35
Azoto	—	12,48	12,50

È poco solubile a freddo nell'alcool e negli eteri di petrolio; molto solubile negli altri solventi organici.

Ridotto con idrogeno nascente si trasforma in p-toluilfenilidrazina $CH_3.C_6H_4.CO.NH.NH.C_6H_5$, fusibile a 167° 68°.

Gr. 0,1056 di sostanza fornirono cc. 11,5 di azoto ($H_0 = 724,83$ $t = 12°$), ossia gr. 0,013072.

Cioè su cento parti:

Calcolato per $C_{14}H_{14}N_2O$: azoto 12,38; trovato: azoto 12,37.

Anche con fenilidrazina è rapidamente ridotto a freddo con sviluppo di azoto: dalla soluzione decolorata si separa la stessa p-toluilfenilidrazina fusibile a 167° 68°.

Gr. 0,1053 di sostanza fornirono cc. 11,4 di azoto ($H_0 = 731,83$ $t = 10^o$), ossia gr. 0,013197.

Cioè su cento parti:

Calcolato per $C_{14}H_{14}N_2O$: azoto 12,38; trovato: azoto 12,53.

Benzoil-azo-p-bromofenile $C_6H_5.CO.N = N.C_6H_4Br$. Si forma ossidando la benzoil-p-bromofenilidrazina $C_6H_5.CO.NH.NH.C_6H_4Br$ con anidride nitrosa: cristallizzato dall'alcool si presenta in aghi appiattati color ametista fusibili a 71° (1).

I. Gr. 0,1391 di sostanza fornirono cc. 12 di azoto ($H_0 = 741,80$ $t = 16^o$), ossia gr. 0,013741.

II. Gr. 0,3498 di sostanza fornirono gr. 0,2281 di bromuro d'argento.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{13}H_9N_2OBr$
	I	II	
Azoto	9,87	—	9,68
Bromo	—	27,78	27,68

È poco solubile a freddo nell'alcool e negli eteri di petrolio, molto solubile negli altri solventi organici.

Ridotto con fenilidrazina o con zinco ed acido acetico, si trasforma in benzoil-p-bromofenilidrazina $C_6H_5.CO.NH.NH.C_6H_4Br$ fusibile a 156°; lo stesso composto risulta, secondo Freer, riducendolo con amalgama di sodio (loc. cit.).

Anisoil-azo-p-bromofenile $CH_3O.C_6H_4.CO.N = N.C_6H_4Br$. Per arrivare a questo composto abbiamo dovuto preparare dapprima l'idrazina corrispondente, finora non conosciuta, trattando la p-bromofenilidrazina (2 molecole), sciolta in etere anidro, con cloruro di anisoile (1 molecola) e separandola dal cloridrato della base, che contemporaneamente si forma, mediante trattamento con acqua.

---

(1) Il punto di fusione di questo composto è identico con quello del prodotto ottenuto da uno di noi dalla benzoil-p-bromofenilnitronitrosoidrazina ed è alquanto più elevato di quello dato da Freer (Ann. Chem. Journ. *21*, 39 (1889)).

L'*anisoil-p-bromofenilidrazina* $CH_3O.C_6H_4.CO.NH.NH.C_6H_4Br$ cristallizzata dall'alcool si presenta in laminette bianche fusibili a 183° con decomposizione.

Gr. 0,1437 di sostanza fornirono cc. 11 di azoto ($H_0 = 724,83$ $t = 12°$), ossia gr. 0,011367.

Cioè su cento parti:

Calcolato per $C_{14}H_{13}N_2O_2Br$: azoto 8,72; trovato: azoto 8,70.

È pochissimo solubile a freddo nell'alcool e nel cloroformio e discretamente a caldo; quasi insolubile in etere, benzolo ed eteri di petrolio.

Ossidata con anidride nitrosa si trasforma facilmente in *anisoil-azo-p-bromofenile* $CH_3O.C_6H_4.CO.N = N.C_6H_4Br$ il quale cristallizza dall'alcool in aghi appiattati color granata, fusibili a 72°.

I. Gr. 0,2905 di sostanza fornirono cc. 22 di azoto ($H_0 = 741,80$ $t = 10°$), ossia gr. 0,025823.

II. Gr. 0,3801 di sostanza fornirono gr. 0,2250 di bromuro di argento.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{14}H_{13}N_2O_2Br$
	I	II	
Azoto	8,88	—	8,87
Bromo	—	25,19	25,07

È solubile a freddo in etere ed in cloroformio, discretamente a caldo e pochissimo a freddo in eteri di petrolio, molto a caldo e poco a freddo nell'alcool e nella ligroina.

Ridotto con fenilidrazina o con zinco e acido acetico ridà l'idrazocomposto da cui deriva, cioè la anisoil-p-bromofenilidrazina.

p-toluil-azo-p-bromofenile $CH_3.C_6H_4.CO.N = N.C_6H_4Br$. Anche in questo caso abbiamo dovuto preparare dapprima, in modo analogo al suddetto, cioè da p-bromofenilidrazina e cloruro di p-toluile, la *p-toluil-p-bromofenilidrazina* $CH_3.C_6H_4.CO.NH.NH.C_6H_4Br$, che non era ancora stata descritta, e che cristallizza dall'alcool in aghetti bianchi splendenti fusibili a 202° con decomposizione.

Gr. 0,2560 di sostanza fornirono cc. 20 di azoto ($H_0 = 731,83$ $t = 10°$), ossia gr. 0,023154.

Cioè su cento parti:

Calcolato per $C_{14}H_{13}N_2OBr$: azoto 9,18; trovato: azoto 9,04.

È poco solubile a caldo e pochissimo a freddo nell'alcool, un po' solubile a caldo in benzolo e in cloroformio, quasi insolubile in ligroina ed in etere.

Ossidata con anidride nitrosa si trasforma in *p-toluil-azo-p-bromofenile* $CH_3.C_6H_4.CO.N{=}N.C_6H_4Br$ il quale cristallizza dall'alcool in splendide lamine brune fusibili a 98°.

I. Gr. 0,2987 di sostanza fornirono cc. 23,5 di azoto ($H_0 = 741,80$ $t = 10°$), ossia gr. 0,027584.

II. Gr. 0,4418 di sostanza fornirono gr. 0,2732 di bromuro di argento.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{14}H_{11}N_2OBr$
	I	II	
Azoto	9,24	—	9,23
Bromo	—	26,31	26,40

È discretamente solubile a caldo e poco a freddo in alcool e ligroina, pochissimo solubile negli eteri di petrolio, solubile in etere ed in cloroformio.

Ridotto dà nuovamente l'idrazina da cui deriva.

Torino — Istituto Chimico della R. Università. Gennaio 1909.

II.

Sul comportamento di alcuni sali di diazonio verso l'etere.

Abbiamo dimostrato, in una Nota precedente (1), che il sale di fenildiazonio (2) del fenildinitrometano subisce, se disciolto in etere umido, una trasposizione intramolecolare per la quale risulta il corrispondente fenilazodinitrocomposto, che, essendo quasi insolubile nell'etere, si separa senz'altro cristallizzato allo stato di purezza, con un rendimento press'a poco quantitativo:

$$C_6H_5.C.(N_2O_4)(N_2C_6H_5) \longrightarrow C_6H_5.C\begin{matrix}\diagup (NO_2)_2 \\ \diagdown N = N.C_6H_5\end{matrix}$$

Successivamente abbiamo osservato (3) che il sale di p-bromofenildiazonio dello stesso fenildinitrometano si comporta diversamente da quello ora accennato, trasformandosi, per azione dell'etere umido, in benzoil-azo-p-bromofenile

$$C_6H_5.C(N_2O_4)(N_2C_6H_4Br) \longrightarrow C_6H_5.CO.N = N.C_6H_4Br.$$

Questo fatto ci ha indotti a cercare di stabilire quale influenza abbia sulla reazione in parola la natura del diazonio impiegato e, dalle esperienze che riferiamo, appare che, mentre i sali di o-tolil-, di o-clorofenil- e di o-bromofenildiazonio del fenildinitrometano

$$C_6H_5.C(N_2O_4)(N_2C_6H_4CH_3)$$
$$C_6H_5.C(N_2O_4)(N_2C_6H_4Cl)$$
$$C_6H_5.C(N_2O_4)(N_2C_6H_4Br)$$

---

(1) G. Ponzio, Gazz. Chim. Italiana *38*, I, 509 (1908).

(2) Conserviamo ai composti $R.C(N_2O_4)(N_2Ar)$ il nome di *sali di diazonio*, colle riserve fatte in una Nota precedente.

(3) Id., Gazz. Chim. Italiana *39*, I (1909).

si trasformano negli isomeri o-tolilazo-, o-clorofenilazo- ed o-bromofenilazo-fenildinitrometano

$$C_6H_5.C\Big\langle\begin{matrix}(NO_2)\\ N=N.C_6H_4CH_3\end{matrix}$$

$$C_6H_5.C\Big\langle\begin{matrix}(NO_2)_2\\ N=N.C_6H_4Cl\end{matrix}$$

$$C_6H_5.C\Big\langle\begin{matrix}(NO_2)_2\\ N=N.C_6H_4Br\end{matrix}$$

i sali di p-tolil-, di p-clorofenil- e di p-bromofenildiazonio si trasformano invece rispettivamente in benzoil-azo-p-tolile, in benzoil-azo-p-clorofenile e in benzoil-azo-p-bromofenile:

$$C_6H_5.CO.N=N.C_6H_4CH_3$$
$$C_6H_5.CO.N=N.C_6H_4Cl$$
$$C_6H_5.CO.N=N.C_6H_4Br$$

Si può dunque concludere che, nei casi finora esaminati, i sali di diazonî ortosostituiti del fenildinitrometano subiscono, per azione dell'etere umido, una semplice trasposizione intramolecolare negli azodinitrocomposti, mentre i sali di diazonî parasostituiti hanno invece tendenza (1) a perdere due atomi di azoto e tre di ossigeno (sotto forma di composti nitrosi) dando degli acilazoarili $R.CO.N=N.Ar$, i quali, come risulta da un nostro precedente lavoro (2), sono i prodotti di ossidazione delle acilarilidrazine $R.CO.NH.NH.Ar$ corrispondenti.

Per quanto riguarda la formazione degli acilazoarili dai sali di fenildiazonio del fenildinitrometano $C_6H_5.C(N_2O_4)(N_2.Ar)$ riteniamo, per analogia con quanto abbiamo dimostrato recentemente in un'altra Nota (3), che essa sia preceduta dalla formazione degli isomeri di questi ultimi, le benzoilarilnitronitrosoidrazine

$$\begin{matrix}C_6H_5\\ |\\ C\end{matrix}\!\!\begin{matrix}NO_2\\ -O-N=N.Ar\\ NO\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}C_6H_5\\ |\\ C\end{matrix}\Big\langle\begin{matrix}O\\ N-N.Ar\\ |\quad\ \ |\\ NO_2\ \ NO\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}C_6H_5\\ |\\ C\end{matrix}\Big\langle\begin{matrix}O\\ N=N.Ar\end{matrix}$$

---

(1) Possono però anche dare gli isomeri azodinitrocomposti, ma questi li abbiamo tutti preparati per azione dell'alcool a freddo.

(2) Gazz. Chim. Italiana *39*, I (1909).

(3) G. Ponzio, Gazz. Chim. Italiana *39*, I (1909).

Ortoderivati.

Sale di o-tolildiazonio del fenildinitrometano $C_6H_5.C(N_2O_4)(N_2C_6H_4CH_3)$. Fu ottenuto come i sali descritti nelle Note precedenti (loc. cit.) da acetato di o-tolildiazonio e fenildinitrometanpotassio, in soluzione acquosa. Costituisce una polvere di color giallo puro, fusibile a 58° con decomposizione.

Gr. 0,1141 di sostanza fornirono cc. 17,8 di azoto ($H_0 = 745,00$ $t = 18°$), ossia gr. 0,021150.

Cioè su cento parti:

Calcolato per $C_{14}H_{12}N_4O_2$: azoto 18,66; trovato: azoto 18,53.

È solubilissimo a freddo nell'etere, nel benzolo, nel cloroformio e nel solfuro di carbonio; poco solubile nell'alcool e negli eteri di petrolio. Si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione verde smeraldo. Riscaldato con alcool lo ossida in acetaldeide, svolgendo azoto e trasformandosi in parte nel suo isomero azodinitrocomposto.

o-tolilazo-fenildinitrometano $C_6H_5.C\begin{cases}(NO_2)_2\\N = N.C_6H_4.CH_3\end{cases}$. Si forma sciogliendo il precedente sale di diazonio in etere ed aggiungendo qualche goccia di acqua: la soluzione gialla assume dopo qualche minuto un colore rosso, quindi comincia la separazione di splendidi aghi rossi che, raccolti e lavati con etere e con alcool, si assoggettano senz'altro all'analisi.

I. Gr. 0,2372 di sostanza fornirono gr. 0,4876 di anidride carbonica e gr. 0,0935 di acqua.

II. Gr. 0,1196 di sostanza fornirono cc. 19,8 di azoto ($H_0 = 734,23$ $t = 15°$), ossia gr. 0,022524.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{14}H_{12}N_4O_4$
	I	II	
Carbonio	56,03	—	56,00
Idrogeno	4,21	—	4,00
Azoto	—	18,83	18,66

Si fonde a 137° con decomposizione ed è discretamente solubile a freddo in cloroformio ed in benzolo; pochissimo solubile in alcool, etere, eteri di petrolio.

Sale di o-clorofenildiazonio di fenildinitrometano $C_6H_5.C(N_2O_4)(N_2C_6H_4Cl)$. Preparato nel solito modo da acetato di o-clorofenildiazonio e fenildinitrometanpotassio, costituisce una polvere color giallo, fusibile a 56° con decomposizione.

Gr. 0,1152 di sostanza fornirono cc. 17,3 di azoto ($H_0 = 725,00$ $t = 9°$), ossia gr. 0,019929.

Cioè su cento parti:

Calcolato per $C_{13}H_9N_4O_4Cl$: azoto 17,46; trovato: azoto 17,30.

È solubile a freddo in etere, benzol, cloroformio; poco solubile in solfuro di carbonio; quasi insolubile in alcool e in eteri di petrolio. Si scioglie in acido solforico concentrato con colorazione verde smeraldo. Riscaldato con alcool lo ossida con sviluppo di azoto e in parte si trasforma nell'isomero azodinitrocomposto.

o-clorofenilazo-fenildinitrometano $C_6H_5.C\begin{cases}(NO_2)_2\\ N = N.C_6H_4Cl\end{cases}$. Si ottiene sciogliendo il precedente sale di diazonio in etere umido: la soluzione gialla assume tosto un color rosso e dopo qualche minuto si depositano laminette splendenti rosso ranciate che raccolte e lavate con etere e con alcool si dimostrano all'analisi perfettamente pure.

I. Gr. 0,1312 di sostanza fornirono cc. 20,2 di azoto ($H_0 = 737,97$ $t = 17°$), ossia gr. 0,022913.

II. Gr. 0,3910 di sostanza fornirono gr. 0,1735 di cloruro di argento.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{13}H_9N_4O_4Cl$
	I	II	
Azoto	17,45	—	17,47
Cloro	—	10,97	11,04

Si fonde a 140° con decomposizione; è poco solubile a freddo in alcool e in etere; quasi insolubile in eteri di petrolio;

discretamente solubile a caldo e poco a freddo in benzol e in cloroformio.

Sale di o-bromofenildiazonio del fenildinitrometano $C_6H_5.(N_2O_4)(N_2C_6H_4Br)$. Si forma trattando l'acetato di o-bromofenildiazonio con fenildinitrometanpotassio. È una polvere gialla, fusibile a 65° con decomposizione.

Gr. 0,1494 di sostanza fornirono cc. 20,5 di azoto ($H_0 = 733,70$ $t = 16°$), ossia gr. 0,023216.

Cioè su cento parti:

Calcolato per $C_{13}H_9N_4O_4Br$: azoto 15,34; trovato: azoto 15,53.

È molto solubile a freddo in etere, cloroformio, benzolo; poco nel solfuro di carbonio; quasi insolubile in alcool e in eteri di petrolio. Si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione verde smeraldo. Riscaldato con alcool lo ossida svolgendo azoto e trasformandosi in parte nell'isomero azodinitrocomposto.

o-bromofenilazo-fenildinitrometano $C_6H_5.C\begin{matrix}\diagup(NO_2)_2\\ \diagdown N = N.C_6H_4Br\end{matrix}$. Si separa, dopo qualche istante, dalla soluzione eterea del precedente sale di diazonio, in laminette ranciate che, raccolte e lavate con etere e con alcool, si analizzano senz'altro.

I. Gr. 0,1057 di sostanza fornirono cc. 14,2 di azoto ($H_0 = 734,70$ $t = 11°$), ossia gr. 0,016440.

II. Gr. 0,3991 di sostanza fornirono gr. 0,2060 di bromuro di argento.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{13}H_9N_4O_4Br$
	I	II	
Azoto	15,55	—	15,34
Bromo	—	21,95	21,91

Si fonde a 140° con decomposizione; è pochissimo solubile a freddo nell'alcool, nell'etere e negli eteri di petrolio; discretamente solubile a caldo e poco a freddo nel cloroformio e nel benzolo.

Paraderivati.

Sale di p-tolildiazonio del fenildinitrometano $C_6H_5.C(N_2O_4)(N_2C_6H_4CH_3)$. Ottenuto come i precedenti, da acetato di p-tolildiazonio e fenildinitrometanpotassio, forma una polvere gialla, fusibile a 74° con decomposizione.

Gr. 0,1226 di sostanza fornirono cc. 20 di azoto (H_0=731,10 t = 16°), ossia gr. 0,022565.

Cioè su cento parti:

Calcolato per $C_{14}H_{12}N_4O_4$: azoto 18,66; trovato: azoto 18,40.

È solubile a freddo in etere, cloroformio, benzolo, solfuro di carbonio; poco solubile nell'alcool e pochissimo negli eteri di petrolio. Si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione rosso sangue. Riscaldato con alcool lo ossida svolgendo azoto e trasformandosi in parte nell'isomero p-tolilazo-fenildinitrometano.

Sciolto in etere umido dà una soluzione gialla, che tosto passa al rosso bruno con svolgimento di composti nitrosi, e si trasforma in *benzoil-azo-p-tolile* $C_6H_5.CO.N = N.C_6H_4CH_3$. Questo fu isolato lavando la soluzione eterea con idrato sodico diluito ed eliminando il solvente nel vuoto: non essendoci però riuscito di cristallizzarlo, lo abbiamo senz'altro ridotto, in soluzione alcoolica con zinco ed acido acetico, nell'idrazocomposto corrispondente cioè in *benzoil-p-tolilidrazina* $C_6H_5.CO.NH.NH.C_6H_4CH_3$ la quale precipitata con acqua e cristallizzata dal benzolo si presenta in lamine bianche splendenti fusibili a 145° 46°.

I. Gr. 0,1142 di sostanza fornirono cc. 16 di azoto (H_0 = 733,00 t = 16°), ossia gr. 0,018102.

II. Gr. 0,1906 di sostanza fornirono cc. 21 di azoto (H_0 = 739,00 t = 17°), ossia gr. 0,023854 (1).

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{14}H_{14}N_2O$
	I	II	
Azoto	12,55	12,51	12,38

(1) La sostanza per l'analisi I proveniva dal trattamento con etere del sale di diazonio; quella per l'analisi II dal trattamento dello stesso sale con cloroformio, la cui azione è identica a quella dell'etere, ma più rapida.

Questa idrazina non era finora stata descritta: per controllo noi l'abbiamo preparata direttamente facendo agire sulla p-tolilidrazina (2 molecole) sciolta in etere anidro, il cloruro di benzoile (1 molecola), trattando con acqua il prodotto della reazione in modo a sciogliere il cloridrato della base che contemporaneamente si forma, precipitando la *benzoil-p-tolilidrazina* $C_6H_5.CO.NH.NH.C_6H_4CH_3$, che rimane sciolta nell'etere, con eteri di petrolio e purificandola poi per cristallizzazione dal benzolo. Si presenta così in lamine bianche fusibili a 145° 46° come le precedenti.

I. Gr. 0,1410 di sostanza fornirono cc. 15,8 di azoto ($H_0 = 735,05$ $t = 17°$), ossia gr. 0,017850.

II. Gr. 0,2008 di sostanza fornirono cc. 21,5 di azoto ($H_0 = 731,00$ $t = 9°$), ossia gr. 0,024974.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{14}H_{14}N_2O$
	I	II	
Azoto	12,65	12,47	12,38

È discretamente solubile a freddo nell'alcool, nell'etere e nel cloroformio; molto a caldo e poco a freddo in benzolo; insolubile in eteri di petrolio; un po' solubile nell'acqua bollente.

p-tolilazo-fenildinitrometano $C_6H_5.C\begin{cases}(NO_2)_2\\ N = N.C_6H_4CH_3\end{cases}$. Come abbiamo già detto, questo composto non si forma per azione dell'etere sul sale di p-tolildiazonio del fenildinitrometano; lo si può però ottenere sia scaldando detto sale con alcool e raffreddando rapidamente la soluzione rosso bruna, o, meglio, lasciandolo a contatto dell'alcool a freddo per qualche tempo. Sia nell'un caso che nell'altro la maggior parte del sale di diazonio si decompone con sviluppo di azoto ossidando contemporaneamente l'alcool in acetaldeide, ma una piccola parte subisce una trasposizione intramolecolare in *p-tolilazo-fenildinitrometano* $C_6H_5.C\begin{cases}(NO_2)_2\\ N = N.C_6N_4.CH_3\end{cases}$ il quale si può facilmente isolare a causa della sua quasi insolubilità nell'alcool. Cristallizzato dal cloroformio si presenta in laminette rosso-ranciate, fusibili a 153° 54° con decomposizione.

Gr. 0,1438 di sostanza fornirono cc. 24 di azoto ($H_0 = 735,62$ $t = 21^\circ$), ossia gr. 0,026671.

Cioè su cento parti:

Calcolato per $C_{14}H_{12}N_4O_4$: azoto 18,66; trovato: azoto 18,54.

È pochissimo solubile nell'alcool e nell'etere; molto solubile a caldo e poco a freddo nel cloroformio; insolubile negli eteri di petrolio.

Sale di p-clorofenildiazonio del fenildinitrometano $C_6H_5.C(N_2O_4)(N_2C_6H_4Cl)$. Preparato, nel solito modo, da acetato di p-clorofenildiazonio e fenildinitrometanpotassio, costituisce una polvere gialla fusibile a 61° con decomposizione.

Gr. 0,1010 di sostanza fornirono cc. 15 di azoto ($H_0 = 732,90$ $t = 10^\circ$), ossia gr. 0,017394.

Cioè su cento parti:

Calcolato per $C_{13}H_9N_4O_4Cl$: azoto 17,47; trovato: azoto 17,22.

È solubile a freddo in etere, benzolo, cloroformio, solfuro di carbonio; poco solubile nell'alcool e pochissimo negli eteri di petrolio. Si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione giallo-bruna; scaldato con alcool lo ossida svolgendo azoto e trasformandosi in parte nell'isomero p-clorofenilazo-fenildinitrometano.

Sciolto in etere umido dà una soluzione gialla, che tosto passa al rosso e poi al bruno svolgendo composti nitrosi, e si trasforma (1) in *benzoil-azo-p-clorofenile* $C_6H_5.CO.N = N.C_6H_4Cl$. Questo si isola dalla soluzione eterea lavandola con idrato sodico diluito ed eliminando il solvente: cristallizzato dagli eteri di petrolio si presenta in laminette splendenti, di colore giallo ranciato, fusibili a 73° senza decomposizione.

I. Gr. 0,1190 di sostanza fornirono cc. 19,5 di azoto ($H_0 = 734,00$ $t = 9^\circ$), ossia gr. 0,022744.

II. Gr. 0,4413 di sostanza fornirono gr. 0,2570 di cloruro di argento.

---

(1) In questa reazione si origina pure una piccolissima quantità di p-clorofenilazo-fenildinitrometano che si deposita cristallizzato e si separa facilmente per decantazione. Col cloroformio umido invece si forma esclusivamente benzoil-azo-p-clorofenile e la reazione è molto più rapida.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{13}H_9N_2OCl$
	I	II	
Azoto	11,42	—	11,45
Cloro	—	14,39	14,51

È poco solubile a freddo nell'alcool e negli eteri di petrolio, solubile negli altri solventi organici.

Ridotto si trasforma con facilità nell'idrazocomposto corrispondente. La riduzione si può fare in soluzione alcoolica con zinco ed acido acetico, o meglio, secondo quanto abbiamo detto nella nostra Nota sugli acilazoarili (1), in soluzione eterea con fenilidrazina. Precipitando nel primo caso con acqua e nel secondo con eteri di petrolio la soluzione, che da rossa diventa rapidamente incolora, si ottiene la *benzoil-p-clorofenilidrazina* $C_6H_5CO.NH.NH.C_6H_4Cl$, la quale cristallizzata dal benzolo si presenta in lamine bianche fusibili a 153°.

I. Gr. 0,1772 di sostanza fornirono cc. 17,5 di azoto ($H_0 = 733,00$ $t = 16°$), ossia gr. 0,019799.

II. Gr. 0.2413 di sostanza fornirono gr. 0,1386 di cloruro di argento.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{13}H_{11}N_2OCl$
	I	II	
Azoto	11,17	—	11,36
Cloro	—	14,20	14,40

Questo stesso composto, che finora non era stato descritto, l'abbiamo pure ottenuto direttamente trattando la p-clorofenilidrazina (2 molecole), sciolta in etere anidro, con cloruro di benzoile (1 molecola), ed agitando con acqua il prodotto della reazione, allo scopo di eliminare il cloridrato della base che contemporaneamente si forma. La *benzoil-p-clorofenilidrazina* $C_6H_5CO.NH.NH.C_6H_4Cl$ rimane disciolta nell'etere: precipitata con eteri di petrolio e cristallizzata dal benzolo si presenta in lamine bianche fusibili a 153°, come le precedenti.

(1) Gazz. Chim. Italiana *39*, I (1909).

È discretamente solubile a freddo nell'alcool e nell'etere; molto a caldo e poco a freddo in benzol e in cloroformio; un po' solubile nell'acqua bollente, insolubile negli eteri di petrolio.

Sospesa in etere anidro ed ossidata con *anidride nitrosa* (da $As_2O_3 + HNO_3$), col metodo indicato nella nostra Nota ora citata, si trasforma in *benzoil-azo-p-clorofenile* $C_6H_5.CO.N = N.C_6H_4Cl$, il quale cristallizzato dall'alcool si fonde a 73° ed è perfettamente identico con quello ottenuto per azione dell'etere umido o del cloroformio sul sale di p-clorofenildiazonio del fenildinitrometano.

p-clorofenilazo-fenildinitrometano $C_6H_5.C\begin{matrix}\diagup(NO_2)_2\\ \diagdown N = N.C_6H_4Cl.\end{matrix}$ Si forma, in piccola quantità, per riscaldamento del sale di p-clorofenildiazonio del fenildinitrometano con alcool, e, in traccie, anche per azione dell'etere umido su detto composto. Conviene prepararlo trattando il sale con alcool assoluto a freddo: cessato lo svolgimento di azoto, che accompagna la decomposizione della maggior parte della sostanza, rimane indisciolto il *p-clorofenilazo-fenildinitrometano* $C_6H_5.C\begin{matrix}\diagup(NO_2)_2\\ \diagdown N = N.C_6H_4Cl\end{matrix}$ che cristallizzato dal cloroformio si presenta in aghetti splendenti giallo-ranciati fusibili a 161° con decomposizione.

I. Gr. 0,1003 di sostanza fornirono cc. 15 di azoto ($H_0 = 734,00$ $t = 9°$), ossia gr. 0,011749.

II. Gr. 0,3585 di sostanza fornirono gr. 0,1530 di cloruro di argento.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{13}H_9N_4O_4Cl$
	I	II	
Azoto	17,44	—	17,47
Cloro	—	11,17	11,04

È quasi insolubile in alcool, etere, eteri di petrolio; solubile a caldo e poco a freddo nel cloroformio e nel benzolo.

Sale di p-bromofenildiazonio del fenildinitrometano $C_6H_5.C(N_2O_4)(N_2C_6H_4Br)$. Di questo composto ci siamo occupati in

una Nota precedente (1): esso si trasforma, per azione dell'etere umido, in *benzoil-azo-p-bromofenile* $C_6H_5.CO.N = N.C_6H_4Br$ fusibile a 71°, e per azione dell'alcool a freddo in *p-bromofenilazo-fenildinitrometano* $C_6H_5.C{\diagup (NO_2)_2 \atop \diagdown N = N.C_6H_4Br}$ fusibile a 161° 62°.

Torino — Istituto Chimico della R. Università. Gennaio 1909.

Relazione sulla Memoria presentata dal Dr. G. GOLA intitolata: *Piante rare o critiche per la Flora del Piemonte.*

EGREGI COLLEGHI,

La Memoria del Dr. Giuseppe GOLA, intorno alla quale ci avete affidato l'incarico di riferire all'Accademia, è il risultato di accurati e lunghi studii sui materiali floristici stati, o raccolti nelle Escursioni dell'ultimo decennio o conservati da tempo negli Erbarii del R. Orto botanico nostro.

Le numerose specie, (sono circa 200) ricordate dall'A. sono state studiate sotto punti di vista differenti; così, per molte forme, sono studiati " *ex novo* „ i caratteri e la posizione seguendo i criterii moderni di sistemazione; ciò che credette l'A. opportuno di fare, perocchè tali forme pure distinte dagli antichi floristi piemontesi, limitate ad aree ristrette, erano rimaste pressochè sconosciute ai moderni sistematici; citiamo fra queste: *Scandix hispanica* Boiss, *Campanula Re* Colla, *Campanula Bertolae* Colla, *Linaria origanifolia* DC.

Molte altre specie invece sono state distinte solo recentemente, collo studio di abbondanti materiali raccolti ovunque; colla revisione dei principali Erbarii piemontesi, col sussidio delle Monografie moderne.

Lo studio così condotto, ha permesso di segnalare l'esistenza fra noi di numerose forme, alcune interessanti per se stesse, altre per il significato fitogeografico che rivestono. Tali sono ad es.:

Alisma arcuatum Mich.
„ *graminifolium* Buch.
Hutchinsia speluncarum Ron.
Astragalus Gremlii Burn, ecc.

---

(1) G. PONZIO, Gazz. Chim. Italiana, *39*, I, 1909.

Alcune forme sono state poi distinte e studiate dall'A. per la prima volta, e fra queste, come più importanti ricorderemo:

Scandix hispanica var. *cottiana* Gola
Alisma Plantago v. *sparganifolium* Gola
Pirus Aria v. *candicans* Gola.

Numerose sono le specie vegetali indicate qui la prima volta per la Flora del Piemonte.

La conoscenza di questi tipi riveste una importanza notevole per lo studio delle affinità coi distretti floristici vicini.

La massima parte di questi vegetali indicano irradiazioni della flora ligustica; poche segnano gli estremi limiti occidentali od orientali di specie rispettivamente frequenti nella valle padana e di specie franco-iberiche.

Nè in questo interessante censimento, mancano specie che sono pure nuove per la Flora italiana, come: *Linaria origanifolia* DC., *Iris bohemica* Schm., *Rosa anisopoda* Christ, *Leucanthemum vulgare* v. *subglaucum* Laramb.

In una appendice l'Autore enumera n° 56 specie *avventizie* per la Flora del Piemonte, delle quali parecchie nuove anche per quella italiana.

Il censimento di queste specie va acquistando in questi ultimi tempi particolare interesse, come indice del fattore *antropico*, nella mutazione dei caratteri delle Flore. Egli è conveniente quindi che siano (come fece l'A.) fissate le date delle singole invasioni, onde stabilire elementi statistici per gli studi avvenire.

Dal complesso del lavoro, condotto con diligenza, accuratezza e buona conoscenza dell'argomento, rilevasi che delle 144 forme o specie, non avventizie, di cui si occupa l'Autore, *36* rappresentano delle novità per la Flora piemontese; 6 sono affatto nuove per la Flora italiana, e 6 altre non erano descritte ancora.

Il lavoro del Dr. Gola, prezioso contributo alla conoscenza della Flora pedemontana; raccolta di dati interessantissimi e utilissimi per lo studioso di fitogeografia, è, secondo il nostro parere, tale saggio da meritare ampiamente di essere accolto per la pubblicazione nei volumi delle Memorie accademiche.

Torino, 6 Febbraio 1909.

L. Camerano,
O. Mattirolo, *relatore*.

L'Accademico Segretario: Lorenzo Camerano.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 14 Febbraio 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Rossi, Carle, Chironi, Ruffini, Stampini, D'Ercole, Brondi, Sforza e De Sanctis Segretario. — È scusata l'assenza del Socio Manno, Direttore della Classe.

Si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente, 31 gennaio 1909.

Il Presidente ricorda la morte del Socio Morera avvenuta l'8 febbraio e con parola commossa accenna ai meriti scientifici e alle virtù del defunto. A lui si associa Ruffini, ricordando sopratutto la rettitudine dell'animo del Morera e il suo profondo sentimento del dovere.

Si comunicano i ringraziamenti dei professori Michele Barbi dell'Università di Messina e Francesco Torraca dell'Università di Napoli, a cui l'Accademia nella sua ultima adunanza conferì il premio Gautieri per la letteratura.

È presentato l'opuscolo di G. Cossavella, *Leggendo i Promessi Sposi ed i Miserabili. Note, confronti e riflessioni* (Alba, 1908), offerto in dono dall'Autore.

Il Socio Ruffini presenta, rilevandone l'importanza per la storia economica del Piemonte, il volume di Salvatore Pugliese,

Due secoli di vita agricola. Produzione e valori dei terreni, contratti agrari, salari e prezzi nel Vercellese nei secoli XVIII e XIX (Torino, Bocca, 1908).

Il Socio D'Ercole presentando il volume *In memoria di Carlo Cantoni* (Pavia, Bizzoni, 1908), offerto in omaggio dalla sig[a] Cristina vedova Cantoni, fa una breve analisi degli scritti minori del Cantoni raccolti nel volume, notandone i pregi e prendendone occasione per dare un cenno di tutta l'opera del Cantoni come filosofo.

LETTURE

Della vita e delle opere del Socio Emilio Brusa.

Commemorazione letta dal Socio GIUSEPPE CARLE

nell'adunanza del 3 Gennaio 1909.

Adempio di buon grado, ma con grande tristezza, all'ufficio affidatomi dalla Classe di dire brevemente della vita e delle opere del nostro amatissimo collega Emilio Brusa.

I miei amichevoli rapporti con Lui risalgono al 1867, in cui, giovani entrambi, concorremmo insieme, per titoli e per esame, alla cattedra di diritto e procedura penale nella R. Università di Parma. Niuno ebbe la cattedra, perchè quel concorso fu poi annullato per irregolarità di forme, nè fu più rinnovato; ma da quel giorno si iniziò fra noi una famigliarità ed amicizia che doveva durare tutta la vita. Ancora il 12 del dicembre ultimo scorso noi dettammo le nostre lezioni all'Università nella medesima Aula ed il 14 già giungeva telegraficamente l'annunzio della morte improvvisa di Lui avvenuta in Roma verso il meriggio di quello stesso giorno, mentre egli partecipava alla riunione della Commissione permanente di statistica giudiziaria presso il Ministero di Grazia e Giustizia e stava parlando ai colleghi di un tema a lui prediletto, quello del patronato dei delinquenti minorenni. Fu universale il rimpianto e furono solenni, unanimi, spontanee le onoranze funebri così in Roma, ove egli era mancato, come nella nostra città, ove la sua salma giunse il mattino del 17 accompagnata dalla figlia Clementina e dal genero prof. Cesare Bertolini. In ossequio al desiderio da Lui manifestato non vi furono discorsi, ed anche oggi, per obbedire alla volontà di Lui, non è un elogio che io intendo di fare all'amatissimo collega, ma solo un'esposizione fedele della sua vita operosa e delle opere da lui lasciate.

***

Nacque a Ternate in provincia di Como il 9 settembre 1843, e dopo aver compiuto gli studi classici a Milano frequentò il corso di giurisprudenza in parte all'Università di Pavia, ove conseguì il dottorato e in parte a quella di Pisa, dove seguì le lezioni del più grande dei criminalisti italiani, Francesco Carrara, di cui fu dilettissimo allievo. Professò in seguito per qualche anno l'avvocatura a Milano: ma diede ben tosto la preferenza agli studi scientifici e all'insegnamento, come lo prova l'aver preso parte fin dal 1867 al concorso di diritto e procedura penale nella R. Università di Parma. Nel 1871 ebbe l'incarico dell'insegnamento del diritto internazionale nella R. Università di Modena, ove professò pure più tardi la filosofia del diritto. Alla fine del 1877 fu chiamato dal Governo Olandese ad insegnare diritto e procedura penale e diritto naturale nell'Università di Amsterdam per l'alto concetto che avevasi in quel dotto paese del valore e dell'importanza della scuola italiana nel diritto criminale. Ma due anni dopo, cioè nel dicembre 1879, fu nominato, in seguito a concorso, professore ordinario di diritto e procedura penale nella nostra Università, dove inaugurò il suo corso con una prolusione col titolo *La morale e il diritto criminale al limbo:* d'allora in poi si mantenne costantemente fedele alla nostra Università e all'insegnamento del diritto e della procedura penale.

Ciò però non tolse che sotto forma di corso libero e di corso complementare Egli abbia anche dettato corsi di diritto pubblico interno, di storia del diritto penale romano, di pratica criminale, di scienza penitenziaria e di legislazione penale comparata.

Nè l'insegnamento gli tolse di partecipare largamente alla vita scientifica che si svolge negli Istituti e nei Congressi e di prender parte efficace al lavoro legislativo del nostro paese. Egli infatti fu membro autorevole della Commissione governativa per la compilazione del Codice penale e di quella per la revisione del Codice di procedura penale italiano. Così pure egli fu membro effettivo dell'Istituto di diritto internazionale, di cui

fu assunto a presidente nel 1896 e fece anche parte del Consiglio superiore della Pubblica Istruzione; appartenne come socio corrispondente all'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, come pure alla R. Società di Scienze e Lettere di Napoli, all'Accademia delle Scienze di Budapest e ad altri sodalizii scientifici. Nel 1895 egli fu ascritto come socio nazionale residente alla nostra Accademia delle Scienze, ed è per tale titolo che nel gennaio del 1906 fu chiamato a fare parte del Senato del Regno; dove ebbe occasione di discutere con molta dottrina di argomenti relativi al diritto e alla procedura penale a proposito della riabilitazione dei condannati e del Codice penale militare.

In ogni occasione si mostrò pronto a sostenere cogli scritti e coll'autorità del nome le cause liberali e generose; e ricordava con compiacenza di essere stato nel 1899 uno dei delegati dell'Europa per presentare gli indirizzi e i voti degli uomini più eminenti nelle scienze, nelle lettere e nelle arti di ben dodici nazionalità di Europa a pro della Finlandia, soddisfatto di aver così patrocinato la causa della civiltà e della indipendenza dei popoli, per quanto i patroni non avessero ottenuto di essere ricevuti dallo Czar di tutte le Russie.

Nell'adempimento di tutti i suoi uffici Emilio Brusa spiegò sempre grande zelo e singolare attività; attese con costanza e con amore ai molteplici insegnamenti da lui tenuti nella Università e seppe così meritarsi la riverenza e l'affetto degli studenti, a cui potè essere largo di consigli e di aiuti mercè la vasta sua coltura ed esperienza. Egli ritenne che il professore non dovesse limitarsi al lavoro puramente accademico della lezione, ma che dovesse seguire incessantemente i progressi della scienza da lui professata, e ciò egli cercò di fare perseverando sempre, malgrado la vista alquanto indebolita, nella lettura di qualsiasi nuova pubblicazione e mantenendosi in famigliare corrispondenza cogli scienziati nostri e stranieri, che si occupavano degli stessi studi. Questa energia giovanile, quest'entusiasmo per le nobili cause, questa fiducia illimitata nel progresso della scienza non gli vennero mai meno e a chi gli consigliava di preservarsi e di conservarsi egli rispondeva che per lui la vita doveva essere lavoro.

Di quest'attività larga e perseverante noi abbiamo la prova nel numero ragguardevole di pubblicazioni che egli ha lasciato,

pubblicazioni che sarebbe difficile di tutte raccogliere, perchè molte fra esse trovansi sparse in riviste di natura diversa. Esse, pur riferendosi ad argomenti assai varii, si attengono però per la maggior parte — o al diritto e alla procedura penale — o al diritto internazionale e alla legislazione comparata — o infine al diritto pubblico interno.

Certo fra i suoi scritti prevalgono quelli relativi al diritto e alla procedura penale, al quale studio egli dedicò le cure persistenti di tutta la sua vita. Non amò tuttavia, almeno nei suoi maggiori scritti, di scendere a trattazioni particolari e minute e di carattere pratico, ma preferì i lavori di carattere filosofico e razionale, in cui si toccano i grandi problemi circa il fondamento del diritto di punire e quello sopratutto del libero arbitrio, dei quali ha trattato con raro acume critico e filosofico nel *nuovo positivismo nella giustizia penale* e nei *prolegomeni al diritto penale.* Non può qui essere il caso di entrare nella esposizione particolare delle dottrine da lui professate; basterà il dire che egli, allievo del grande Carrara, si mantenne fedele alle dottrine giuridiche di lui ed appartenne sempre e si vantò anzi di appartenere alla scuola classica di diritto penale; sostenne anche polemiche coi seguaci della scuola così detta positiva, nell'intento precipuo di mostrare che la scuola classica non si era soltanto occupata del reato, ma anche della persona del delinquente e delle cause che potevano aggravarne od attenuarne l'imputabilità. Sopratutto egli fu un sostenitore convinto e costante della causa della libertà morale, in quanto che ritenne sempre che all'uomo appartenga una certa libertà di scelta fra i motivi diversi che possono determinare le sue azioni, donde la conseguenza che la pena non dovesse soltanto riguardarsi come un mezzo di difesa sociale, ma dovesse anche ispirarsi al concetto di punire il male commesso, provvedendo all'attuazione e al ristabilimento della giustizia sociale ed in via sussidiaria anche al miglioramento morale del delinquente.

Ciò però non impedì che egli, pur mantenendosi fedele ai principî della scuola classica penale, abbia tuttavia sentito vivissimo il bisogno di studiare la persona del delinquente e di provvedere anche per quanto fosse possibile al suo miglioramento morale, come lo dimostra l'entusiasmo schiettamente giovanile con cui egli assunse in questi ultimi anni la presi-

denza del patronato per i delinquenti minorenni e caldeggiò tutte quelle istituzioni penali e processuali che mirano a rendere meno frequenti le recidive e a preparare la riabilitazione del delinquente.

Intanto questo nucleo fondamentale degli studi di diritto e di procedura penale da un punto di vista altamente filosofico presentasi nel Brusa sorretto e sussidiato da studi non meno larghi e profondi di diritto internazionale e di legislazione comparata. Tali studî per lui furono agevolati dall'aver insegnato nell'Università di Amsterdam in Olanda, dall'aver partecipato alla formazione del Codice penale del Canton Ticino e agli studî di revisione sul Codice penale e di procedura penale italiano, come pure dalla sua qualità di membro da moltissimi anni dell'Istituto di diritto internazionale, le cui sedute furono da lui presiedute nel 1896. A ciò si aggiunge che il Brusa continuò sempre con grande amore quegli studî di diritto internazionale, con cui aveva esordito il suo insegnamento nella R. Università di Modena, ed ebbe pure a professare per molti anni, come corso complementare, il corso di legislazione comparata nella nostra Università.

Si comprende quindi che una serie delle sue pubblicazioni volga intorno al diritto internazionale e alla legislazione comparata, quali gli scritti relativi alla Conferenza dell'Aia, i suoi commenti a Codici penali stranieri, le sue trattazioni circa i reati commessi all'estero e all'estradizione. Tra essi parmi degno di nota il suo recente dottissimo lavoro sulle dottrine del prof. Gabba in tema di diritto internazionale privato.

Da ultimo l'altro tema, di cui si compiacque particolarmente il Brusa, fu lo studio del diritto pubblico interno. Egli esordì coll'annotare il volume del Casanova sul diritto costituzionale fin dal 1876 e finì col pubblicare nel 1892 un trattato completo di diritto pubblico interno, che fu accolto in una collezione tedesca, trattato che per la riputazione meritamente acquistata potrebbe molto opportunamente essere ripubblicato tenendo conto della nuova legislazione italiana, che ebbe poi a svolgersi sull'argomento.

Mi rincresce che trattandosi di opere sparse nelle riviste mi sia impossibile dare un cenno adeguato di ciascuno degli scritti del compianto amico, ma cercherò di supplirvi allegando

a questa modesta commemorazione un catalogo al possibile completo delle sue pubblicazioni. Spero ad ogni modo che anche questo breve cenno somministri la prova della sua larga coltura ed erudizione, dell'esteso ambito dei suoi studi e della sete inestinguibile di progresso da cui ebbe sempre ad essere animato. Quasi oserei dire che se la sua costante e pertinace cura di tener dietro a tutte le pubblicazioni che si riferissero all'argomento prediletto dei suoi studî e il desiderio di seguirne tutte le trasformazioni e i progressi gli impedì talvolta di giungere ad una formola del tutto definitiva del proprio pensiero e delle proprie meditazioni, ciò in parte deve essere attribuito al fatto che egli lavorò in un'epoca di crisi e di transizione per tutti gli studî sociali e quindi anche per il diritto e la procedura penale, e fu l'effetto soprattutto di questa sua lodevole incontentabilità e della tendenza connaturata in lui di seguire la sua scienza anche nei suoi dubbî e nelle sue incertezze non meno che nei suoi progressi e nella varietà indefinita delle sue manifestazioni e trasformazioni.

Questo è certo che Emilio Brusa visse soprattutto per la scienza e per l'insegnamento, per la famiglia e per la patria; egli si mantenne vegeto, vigoroso, energico fino al malore ultimo che lo ha colpito; egli compiè onestamente e convintamente la sua giornata operosa di lavoro e cadde sul campo da lui lavorato e sul solco da lui stesso arato. Tutti abbiamo sperimentato e ricorderemo sempre la bontà dell'animo suo, la sua affabilità e cortesia di modi, la sua disposizione ad essere utile a tutti. Egli fu una mente larga, un cuore veramente buono, sostenitore delle cause liberali e generose e la memoria di lui durerà nei suoi allievi, nei suoi colleghi, nei suoi amici e conoscenti, concordi tutti nel riconoscere e nell'ammirare il grande affetto che egli ebbe per la scienza da lui sempre coltivata con spirito di abnegazione e di sacrifizio.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI

DI

EMILIO BRUSA

Sulla classazione del duello.
Monitore dei tribunali; Milano, 1865, p. 1009; 1866.

Del dolo cosidetto generale nell'omicidio premeditato.
Monitore dei tribunali; Milano, 1866, p. 343.

Sopra la sorveglianza speciale, la libertà preparatoria e l'ammonizione repressiva, cenni critici.
Milano, tip. G. Redaelli, 1866; 16°.
Estr. dal *Monitore dei tribunali.*

Studi sulla recidiva. Vol. I, p. I.
Milano, a spese dell'Autore, 1866; 8°.

L'ingiuria contro i morti nella giurisprudenza della Cassazione francese.
Monitore dei tribunali; Milano, 1867, p. 409.

Intorno al nuovo progetto di codice penale italiano.
Monitore dei tribunali; Milano, 1867, p. 1017, 1057.

Nuove osservazioni contro la vigilanza speciale della polizia precipuamente nei codici penali.
Il Beccaria, 1867.

La Cassazione di Napoli e il progetto di codice penale italiano.
Annali d. giurisprud. ital., 1869, parte 3ª, p. 23, Firenze.

Della ebrezza preordinata al reato.
Bologna, 1869; 8°.
Estr. dall'*Archivio giuridico*, 1869.

Il progetto di codice penale italiano riveduto e modificato.
Bologna, tip. Fava e Garagnani, 1870; 8°.
Estr. dall'*Archivio giuridico*, 1870.

Il libro primo del progetto penale ticinese confrontato coll'ital.
Bologna, 1870; 8°.
Estr. dall'*Archivio giuridico*, 1870.

Il progetto di codice penale pel Canton Ticino.
Monitore dei tribunali, 1870.

Della cosidetta colpa con previsione in materia penale; — Della delegazione di giudice nel giuramento; — Sulla estradizione dello straniero in materia politica; — Misticismo nelle leggi penali; — Una grave lacuna nelle leggi italiane.
Giornale delle leggi; Genova, 1870.

Della pena di morte. Osservazioni sulla memoria di F. Ambrosoli.
Archivio giuridico, VIII, 452; Bologna, 1871.

L'uomo e le scienze morali; — Della grazia e dell'amnistia in Italia.
La Temi italica; Napoli, 1871, p. 41, 49.

Del duello nel progetto di Codice penale italiano riveduto e modificato.
Bologna, 1871; 8°.
Estr. dall'*Archivio giuridico*, 1870.

Idea fondamentale del diritto e del diritto internazionale in specie: prolusione.
Modena, tip. Sociale, 1872; 8°.

Del diritto di guerra ad occasione dell'opera di Morin " Les lois relatives à la guerre ".
Monitore dei tribunali; Milano, 1873, p. 353.

Del principio della nazionalità e della cessione dell'Alsazia-Lorena.
Reggio Emilia, 1873.

Il codice penale zurighese entrato in vigore il 1° febbraio 1871, versione italiana preceduta da un'introduzione critica dell'avv. E. Brusa con note del medesimo e del pr. F. Carrara.
Venezia, tip. della Gazzetta, 1873; 8°.

Studi intorno al progetto 24 febbr. 1874 di un nuovo Codice penale italiano.
Rivista penale, I, 24, 133; Padova, 1874.

La proposta di una dottrina di pratica legislativa ad occasione dell'opera del prof. Carrara " Lineamenti ecc. ".
Annali d. giurispr. ital., P. III, p. 3; Firenze, 1874;

La nuova legge 8 giugno 1874 sui giurati in Italia. Note e commenti.
Giurisprudenza ital., P. III, p. 1; Torino, 1875.

Lezioni di diritto costituzionale di L. Casanova, 3ª ediz. con introduzione e note di E. Brusa.
Firenze, Cammelli, 1875; 2 vol. 8°.

Di un caso di conflitto o concorso di differenti leggi penali in un medesimo Stato.
Giurisprudenza ital., vol. XXVII, parte IV, p. 119. Torino, 1875.

Dell'odierno diritto internazionale pubblico, studi critici.
Prato, tip. Giachetti figlio e C., 1875; 8°.

Pareri sul processo Arnim in seconda istanza.
Venezia, tip. Antonelli, 1875; 8°.
Estr. dalla *Rivista penale*, III.

Del diritto internazionale, lezioni di Lod. Casanova. 3ª edizione con introduzione e note di E. Brusa.
Firenze, Cammelli, 1876; 2 vol. 8°.

Quale sarebbe il miglior mezzo per combattere la recidiva.
Roma, 1876; 4°.
Estr. dalla *Rivista di discipline carcerarie.*

Des récidivistes.
Toulouse, typ. Bonnal et Gibrac, 1876; 12°.
Estr. dal *Recueil des actes de l'Acad. de législation de Toulouse.*

Cremazione e medicina forense.
Bollettino d. Soc. per. la cremazione. Milano, 1876-77.

Dei reati contro la fede pubblica.
Progetto di codice penale; Lavori delle Sotto-Commissioni; Roma, 1877, p. 38.

Dei segreti politici.
Rivista penale, VI, 282; Roma, 1877.

Della indolenza colpevole.
Modena, 1877; 4°.
Estr. dalla *Rivista legale parmense-moden.*, I.

De la science en général et de l'école pénale italienne en particulier.
Amsterdam, L. D. Petit, 1878; 8°.

[Discorsi e rapporti].
Le Congrès pénitentiaire international de Stockholm, I, 155, 160, 189, 463, 619. Stockholm, 1879; 8°.

L'ultimo progetto di codice penale olandese. Traduzione di E. B.
Bologna, Zanichelli, 1878; 8°.

Nécrologie. Guido Padelletti. 1843-1878.
Bruxelles, 1878; 8°.
Estr. dalla *Revue de droit international*, IX.

Pensieri sulla premeditazione in rapporto con la imputabilità in generale.
Giornale dei tribunali, a. VIII, 226, 230. Milano.
Trad. spagnuola: In *Revísta general de legislacion*, LIV, 552. Madrid.

La responsabilidad penal en los delitos cometidos por lo medio de la imprenta.
Revista general de legislacion, LV, 266, 440. Madrid.

Un'esperienza abolizionista.
Giornale delle leggi, X, 107; Genova.

La riforma penitenziaria in Italia.
Roma, tip. Elzeviriana, 1879; 8°.
Estr. dall'*Archivio di statistica*, IV.

Il progetto di legge sull'abuso delle bevande alcooliche presentato al Parlamento olandese.
Archivio di psichiatria, I, 343, 489, Torino, 1880.

Ultimos Congresos juridicos.
Revista general de legislacion, LVII, 314. Madrid.

Appunti per una introduzione al corso di diritto e procedura penale nell'Università torinese.
Torino, Candeletti, 1880; 8°.

Il progetto di codice penale croato confrontato con quello austriaco e col codice ungherese da Emilio Tauffer.
Civitavecchia, tip. del bagno penale, 1880; 8°.
Estr. dalla *Rivista di discipline carcerarie*, X.

La detenzione semplice o cosidetta custodia onesta ai Paesi Bassi.
Rivista di discipl. carcerarie, X, 363. Civitavecchia, 1880.

Il Congresso giuridico a Torino e gl'istituti del domicilio coatto, dell'ammonizione e della sorveglianza della pubblica sicurezza.
Rivista di discipline carcerarie, X, 411. Civitavecchia, 1880.

I professori delle Università nei progetti De Sanctis e Bonghi.
La Perseveranza. Milano, 7-9 agosto 1880.

La morale e il diritto criminale al limbo; discorso inaugurale.
Torino, Unione tip., 1880; 8°.

L'Istituto di diritto internazionale a Oxford e l'estradizione dei delinquenti.
Rivista penale, XIII, 5; Firenze, 1880.

Il secondo Congresso giuridico italiano in Torino.
Monitore dei tribunali; Milano, 1880, p. 913, 943.

Dell'Istituto di diritto internazionale e della sessione di esso tenutasi in Bruxelles nel settembre 1879.
Archivio di statistica, IV. Roma, 1880.

Del delitto politico in rapporto con la estradizione.
Annuario d. scienze giuridiche, A. II, 86; Milano, 1881.
Trad. franc. in *Revue de droit internat.*, XIV, 403; Bruxelles, 1882.

Die wissenschaftlichen Leistungen Italiens auf dem Gebiete des Strafrechts während der letzen zwei Jahre.
Zeitschr. f. die gesamte Strafrechtswiss. I, 130; Berlin, 1881.

Das niederländische Strafgesetzbuch vom 3 März 1881 nach seinem histor. Ursprunge betrachtet.
Zeitschr. f. die gesamte Strafrechtswiss. I, 309; Berlin, 1881.

Sinossi delle lezioni di diritto e procedura penale.
Torino, Candeletti, 1881; 8°.

Los caracteres de la escuela criminalista italiana.
Revista general de legislacion, LIX, 417, 457; LX, 58, 210. Madrid, 1881-82.

Codice penale olandese 3 marzo 1881 tradotto e annotato.
Firenze, tip. succ. Le Monnier, 1882; 8°.
Estr. dalla *Rivista penale*, 14.

Sistemi legislativi intorno alla parte civile nel giudizio penale.
Annuario d. scienze giuridiche, III, 122; Milano, 1882.

Sul giurì, ad occasione delle recenti discussioni dei giuristi svizzeri.
Torino, 1882; 8°.
Estr. dalla *Rivista penale*, XV, 309. Firenze, 1881.

Del reato commesso all'estero.
Torino, St. dell'Unione tip.-ed., 1886; 8°.
Estr. dalla *Rivista penale*, XVI, 277; XXIII, 393; XXIV, 5.

Rapport sur la littérature italienne du droit international privé et public de 1880 à 1882.
Annuaire de l'Inst. de droit intern.; VI, 301; Bruxelles, 1883.

Dell'unità di cassazione penale in Italia.
Annuario d. scienze giuridiche, IV, 243; Milano, 1883.

La juridiction du Vatican.
Revue de droit international, XV, 113; Bruxelles, 1883.

Del reato giuridico e della trasgressione di polizia.
Il Gravina, rivista giurid., I, 267; Catanzaro, 1883.

Conflits des lois pénales. Propositions de règlement soumises à l'Institut de droit international [In collaborazione con von Bar].
Revue de droit international, XV, 602; Bruxelles, 1883.
Annuaire de l'Institut de droit intern., 1883-84, p. 123, 147.

Instituto de derecho internacional.
Revista general de legislacion; Madrid, 1883, p. 409.

Progetto di legge sugli stabilimenti occorrenti per la esecuzione del nuovo Codice penale olandese.
Rivista di discipline carcerarie; XIII, 537; Roma, 1883.

Saggio di una dottrina generale del reato.
Torino, Candeletti, 1884; 8°.

Association para la reforma y codificacion del derecho internacional.
Revista general de legislacion; Madrid, 1884, p. 5.

Il terzo Congresso internazionale penitenziario e quello antropologico-criminale.
Torino, Stamp. dell'Unione tipogr.-ed., 1886; 8°.
Estr. dalla *Rivista penale*, XXIII-XXIV.

Lettera ai direttori *(Actio finium regundorum)*.
Rivista di discipline carcerarie, XVI, 151; Roma, 1886.

Notice nécrologique sur le comte Terenzio Mamiani della Rovere.
Annuaire de l'Institut de droit international, VIII, 53; Bruxelles, 1886.

Conclusions proposées par MM. de Bar et Brusa concernant les mariages.
Annuaire de l'Institut de droit intern., VIII, 67; Bruxelles, 1886.

Friedrich Oscar von Schwarze.
Rivista penale, XXIV, 473; Torino, 1886.

A. E. J. Modderman — J. S. G. Nypels.
Rivista penale, XXV, 267; Torino, 1887.

Rapport sur la question suivante: Ne faut-il pas organiser des peines privatives de la liberté, qui, mieux que les systèmes suivis jusqu'à présent, conviendraient aux pays agricoles ou pour la population agricole étrangère aux travaux industriels?
Bulletin de la Commission pénitent. internat., N. S. I, 101; St.-Pétersbourg et Neuchâtel, 1887.

[Discorsi e rapporti].
Actes du Congrès pénitentiaire internat. de Rome, I, 74, 288, 457, 647, 655, 658. Rome, 1887.

Sul nuovo positivismo nella giustizia penale.
Torino, Unione tip.-editrice, 1887; 8°.

Istituto di diritto internazionale in Heidelberg.
La Perseveranza; Milano, 2 e 3 ott. 1887.

Bibliographie pénitentiaire et pénale en Italie depuis le commencement du siècle.
Rome, impr. des " Mantellate „, 1888; 8°.
Estr. des *Actes du Congrès pénit.*, II.

Bibliographie du droit international et de la politique en Italie. 1884-1887.
Annuaire de l'Inst. de droit intern.; IX, 325. Bruxelles, 1888.

Francesco Carrara.
Revue de droit internat., XX, 70; Bruxelles, 1888.

(Joseph) Victor Molinier.
Rivista penale, XXVII, 337; Torino, 1888.

Prolegomeni al diritto penale.
Torino, tip. C. Candeletti, 1888; 8°.

Sur l'admonition répressive et préventive.
Bulletin de la Soc. génér. des prisons; Paris, 1888, p. 7, 127.

Efficacia della riparazione del danno privato nella repressione dei delitti contro la proprietà.
Rivista penale, XXIX, 5, 109; Torino, 1889.

Della concausa nell'omicidio.
Torino, St. dell'Unione tipogr.-editr., 1889; 8°.
Estr. dalla *Rivista penale*, XXX, 5.

Legislazione, dottrina e giurisprudenza penale italiana nell'anno 1888.
Annuario di dottrina, legisl. e giurispr., I, 177; Milano, 1889.

Osservazioni sul libro I, tit. I, del progetto del codice penale per il regno d'Italia approvato con la legge 22 nov. 1888.
Milano, L. Vallardi, 1889; 8°.
Estr. dal *Filangieri*, a. XIV, n. 2.

Francesco Holtzendorff.
Il Filangieri, XIV, 142; Milano, 1889.

Sul sistema penale del nuovo progetto di codice.
Roma, E. Loescher, 1889; 8°.
Estr. dalla *Rivista ital. per le scienze giurid.*

Das Staatsrecht des Königreichs Italien.
Freiburg i. B., J. C. B. Mohr, 1889-92; 8°.
(*Handbuch des œffentlichen Rechts*, IV).

Su alcune delle più recenti riforme nella legislazione italiana.
Torino, Paravia, 1890; 8°.
Estr. dall'*Annuario della R. Università*, 1890-91.

Avv. Cesare Norsa. Necrologio.
Monitore dei tribunali; Milano, 1891, p. 11.

Lecci A. Il sistema delle pene nel codice italiano, con prefazione di E. B.
Torino, Unione tip.-ed., 1891; 8°.

Legislazione, dottrina e giurisprudenza penale italiana negli anni 1889 [1890-91].
Annuario di dottrina, legisl. e giurispr., II, 169; III, 226; Milano, 1891, 1893.

Procedura penale. Note per la scuola nell'anno 1890-91.
Biella, Amosso, 1891.

[Discorsi].
Actes du Congrès pénitentiaire intern. de St-Pétersbourg 1890; I, 41, 105, 110, 198, 233, 243, 387, 388, 389, 622, 625, 649; St-Pétersbourg, 1892.

Della tentata subornazione e del tentativo in generale.
Rivista penale, XXXVII, 105; Torino, 1893.

Sur l'avant-projet du Code de procédure pénale pour le Canton de Neuchâtel.
Exposé des motifs à l'appui du Code, p. 6; Chaux-de-fonds, 1893.

Della giustizia penale eccezionale, ad occasione della presente dittatura militare.
Torino, Unione tip., 1894; 8°.
Estr. dalla *Rivista penale*, XXXIX.

Ad occasione dell'opera del sig. avvocato Nicola Framarino dei Malatesta: *Logica delle prove in criminale.*
Torino, C. Clausen, 1895; 8°.
Estr. dagli *Atti della R. Accad. delle Scienze*, 30.

Parere sul ricorso don Giuseppe Cortini dinanzi la suprema Corte di Roma.
Bologna, Soc. tip. Azzoguidi, 1895.

Contrebande de guerre. Rapport final et projet transactionnel par MM. Kleen et Brusa.
Annuaire de l'Institut de droit intern.; XV, 98; Paris, 1896.

Di una sanzione penale alla Convenzione ginevrina per i feriti in guerra.
Torino, C. Clausen, 1896; 8°.
Estr. dagli *Atti della R. Accad. delle Scienze*, 31.

L'Istituto di diritto internazionale a Venezia.
Monitore dei tribunali, XXXVII, 981; Milano, 1896.

Rodolfo di Gneist. Commemorazione.
Torino, C. Clausen, 1896; 8°.
Estr. dagli *Atti della R. Accad. delle Scienze*, 31.

Efficacia delle modificazioni legislative sul patto di estradizione.
Torino, Unione tip.-ed., 1897; 8°.
Estr. dalla *Rivista penale*, 46.

L'affaire du Doelwyk.
Paris, A. Pedone, 1897; 8°.
Estr. dalla *Revue génér. de droit intern.*

L'animo del diffamatore.
Roma, tip. dell'Unione cooper. ed. 1897; 8°.
Estr. dalla *Cassaz. unica*, 9.

Prolegómenos de derecho penal.
Madrid, Reus, 1897; 8°.
Estr. dalla *Historia y fuentes.*

Intorno alla contumacia dell'imputato nel processo penale.
Torino, C. Clausen, 1898; 8°.
Estr. dagli *Atti della R. Accad. delle Scienze*, 34.

La concausa nei delitti colposi.
La Cassazione unica, X, 1201; Roma, 1898.

La note du Tsar sur le désarmement.
Revue génér. de droit intern., V, 729. Paris, 1898.

Responsabilité des États à raison des dommages soufferts par des étrangers en cas d'émeute ou de guerre civile.
Lausanne, impr. Regamey (1898); 8°.
Estr. dall'*Annuaire de l'Instit. de droit intern.*, 17.

Adattamenti penali.
Per le onoranze a Franc. Carrara; Lucca, 1899, p. 369.

Codice di procedura penale norvegese. Traduzione e note di E. B.
Torino, Bocca, 1899; 8°.

Correzione straordinaria di condanne penali.
Torino, C. Clausen, 1899; 8°.
Estr. dagli *Atti della R. Accad. delle Scienze*, 34.

— Napoli, tip. A. Trani, 1899; 8°.
Estr. dal vol. *Pel cinquantesimo anno d'insegnamento di E. Pessina*, II.

Les résultats de la Conférence de la Haye.
Revue génér. de droit intern., VI, 883; Paris, 1899.

Lezioni di procedura penale.
Torino, Ovazza, 1899; 8°.

Cesare Nani.
Annuario d. R. Univ. di Torino, 1899-1900, p. 131; Torino, 1900.

Due discorsi al Congresso penitenziario internaz. di Bruxelles.
Rivista di discipline carcerarie. Roma, 1900.

Esercizio della patria podestà, istituzioni pupillari, minorenni, traviati e delinquenti [Commiss. per la statist. giudiziaria].
S. i. [Roma, 1900]; 8°.
Estr. dagli *Annali di statistica.*

Il tentativo di delitto nel diritto italiano secondo B. Hes.
Torino, C. Clausen, 1900; 8°.
Estr. dagli *Atti della R. Accad. delle Scienze*, 35.

La Conférence de La Haye et ses résultats.
Paris, A. Pedone, 1900; 8°.

Sulla responsabilità delle persone morali secondo Achille Mestre.
Torino, C. Clausen, 1900; 8°.
Estr. dagli *Atti della R. Accad. delle Scienze*, 35.

L'Europa in Cina.
Rivista di diritto internaz.; III, 488. Napoli, 1900.

Sulla sessione dell'Istituto di diritto internazionale a Neuchâtel.
Rivista di diritto intern.; Napoli, 1900.

[Discorsi e rapporti].
Actes du Congrès pénitentiaire internat. de Bruxelles; I. Berne, 1901.

Grazia e condanna condizionale?
Nuova Antologia, CLXXIX, 220; Roma, 1901.

Bibliographie pénale et pénitentiaire de l'Italie depuis 1885 jusqu'à 1899.
S. i.; 8°.

Parere sull'incidente italo-svizzero.
La Stampa; Torino, 16 aprile 1902.

[Sulla prima sentenza del tribunale d'arbitrato dell'Aja].
Atti d. R. Accad. d. Scienze di Torino, XXXVIII, 13.

Sulla responsabilità dello Stato nel diritto internazionale.
Torino, C. Clausen, 1902; 8°.
Estr. dagli *Atti della R. Accad. delle Scienze*, 38.

[Sull'opera del dr. Anzilotti: *I mutamenti nei rapporti patrimoniali fra coniugi*].
Atti d. R. Accad. d. Scienze di Torino, XXXVIII, 51.

La contravvenzione penale e l'azione civile.
Torino, 1903; 8°.
Estr. dalla *Rivista penale*, 58.

Parere.
Procedimento penale contro presunti assenti, p. 49; Roma, 1903; 4°.

Simulazioni nelle costituzioni sociali.
Torino, 1903; 8°.
Estr. dalla *Rivista penale*, 58.

[Discorsi].
Actes du Congrès pénitentiaire intern. de Budapest, 1905.

Alcune idee fondamentali sul diritto di punire.
Torino, C. Clausen, 1906; 8°.
Estr. dagli *Atti della R. Accad. delle Scienze,* 41.

Les idées de M. le professeur C. F. Gabba sur la théorie générale du droit international privé.
Bruxelles, 1906; 8°.
Estr. dalla *Revue de droit intern.*, serie II, VIII.

L'Istituto di diritto internazionale a Gand.
Rivista di diritto intern., I, 542; Roma, 1906.

Riabilitazione dei condannati.
Roma, Forzani, 1906; 8°.

Sul nuovo processo penale italiano.
Roma, 1906; 8°.
Estr. della *Nuova Antologia*, 206.

Sulla personalità giuridica e sull'autonomia universitaria.
Bollettino dell'Associazione fra i professori Universitari. Padova, 1906.

Dell'illecito civile e dell'illecito penale.
Torino, C. Clausen, 1907; 8°.
Estr. dagli *Atti della R. Accad. delle Scienze*, 42.

Ad occasione del libro di Tullio Giordana sulla proprietà privata nelle guerre marittime.
Torino, C. Clausen, 1907; 8°.
Estr. dagli *Atti della R. Accad. delle Scienze*, 42.

A proposito di una nuova Rivista di diritto internazionale.
Torino, C. Clausen, 1907; 8°.
Estr. dagli *Atti della R. Accad. delle Scienze,* 42.

De la valeur psychologique du témoignage.
Turin, Bocca, 1907.
Estr. dagli *Actes du 5e congrès d'anthr. criminelle.*

Sulla giustizia amministrativa e sul Codice penale militare.
Roma, Forzani, 1907; 8°.

Sulla impugnabilità delle sentenze dell'Alta Corte di giustizia [A proposito del ricorso Nasi].
Atti R. Accad. Scienze di Torino, XLIII, 690; 1908.

[Discussioni e discorsi al Senato].
Cfr. *Atti parlamentari della Camera dei Senatori. Discussioni.* Sess. 1904-1909; vol. XIV, p. 10279. Roma, 1909.

Tancredi Canonico.
Annuario della R. Univ. di Torino, 1908-1909, p. 193. Torino, 1909 (*).

Recensioni e bibliografie nei periodici:
Annali d. giurispr. ital.; vol. V, parte 3ª, p. 34.
Archivio giuridico; VII, 186; VIII, 307; IX, 540. Bologna, 1871.
La Cultura; Roma, 1882, p. 17.
Monitore dei tribunali; 1867, p. 797; 1868, p. 1013; XXI, 421, 857.
Revue de droit international; XI, XII, 551, 561, 562; XV, 98, 105, 298.
Rivista critica di scienze giurid.; II, 147.
Rivista ital. per le scienze giur.; II.
Zeitschrift für die gesamte Strafrechtswiss.; I, II.

Collaborò inoltre alle seguenti pubblicazioni:

Actes du Congrès pénit. intern. de Paris, 1895.
Annuaire de l'Institut de droit international. VII e segg. Bruxelles et Paris.
Lavori preparatorii del Codice di procedura penale per il regno d'Italia. Roma, 1900.
Progetto del Codice di procedura penale, vol. I. Roma, 1902.

(*) La maggior parte delle indicazioni del presente Catalogo furono ricavate direttamente: alcune però dovettero essere desunte dall'elenco delle pubblicazioni compilato dallo stesso compianto Professore Brusa per gli annuari dell'Università di Torino.

L'Accademico Segretario
GAETANO DE SANCTIS.

Torino — VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e Reali Principi.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 21 Febbraio 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Naccari, Direttore della Classe, Spezia, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Fusari e Camerano Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Scusa l'assenza il Socio Segre.

Il Presidente con affettuose parole ricorda il compianto Socio Giacinto Morera e comunica una lettera di ringraziamento della vedova signora Cesira Morera-Faà. Comunica pure le numerose condoglianze pervenute all'Accademia per la morte dell'illustre e caro consocio.

Prega quindi la Classe a voler designare il Socio per la commemorazione del defunto collega. La Classe designa il Socio Somigliana.

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° *Un precursore di Heyde nel costruire teodoliti a circoli dentati,* del Socio Jadanza;

2° G. Albenga, *Contributo alla teoria dei solidi a grande curvatura,* dal Socio Guidi;

3° Ing. Gustavo COLONNETTI, *Contributo alla trattazione grafica della trave continua*, dal Socio GUIDI;

4° Prof. Francesco PALATINI, *Sulle varietà algebriche per le quali sono di dimensione minore dell'ordinario, senza riempire lo spazio ambiente, una o alcune delle varietà formate da spazi seganti,* dal Socio SEGRE.

Il Presidente comunica una nota del signor Nicolao BORGHINO sulla quale chiede il giudizio dell'Accademia. Vengono incaricati i Socii D'OVIDIO e PEANO per riferire in proposito.

Il Socio NACCARI, a nome anche del Socio Mosso, legge la relazione intorno alla Memoria del Dott. Luigi BOTTI, *Ricerche sulle illusioni ottico-geometriche.* La relazione favorevole viene approvata all'unanimità, e la Classe con votazione segreta approva la stampa del lavoro del Dott. BOTTI nei volumi delle *Memorie* accademiche.

LETTURE

Un precursore di Heyde nel costruire teodoliti a circoli dentati.

Nota del Socio NICODEMO JADANZA.

(Con una Tavola).

Da parecchio tempo l'abile costruttore di strumenti geodetici Gustavo Heyde di Dresda ha introdotto nella pratica un teodolite, nel quale la lettura si fa in modo differente dai teodoliti a vernieri o a microscopi. Tale teodolite è chiamato Teodolite a *circoli dentati*.

Ciascuno dei circoli è nella sua periferia diviso in 360 parti o denti, cosicchè ognuno di essi vale un grado; nella faccia superiore è graduato di grado in grado con numeri ogni 10 gradi.

L'alidada porta un'appendice a cui è annessa una vite perpetua, che può col movimento di un bottone B ingranare o non nei denti del circolo graduato: tale vite ha perciò il passo corrispondente ad un grado, ed è munita di un tamburo T diviso in 60 parti, ognuna delle quali corrisponde ad un primo. Un indice, mediante il quale si fa la lettura, permette di stimare il decimo di un primo cioè $6''$.

Le osservazioni si fanno in questo modo. Liberata l'alidada dal lembo, si porti il cannocchiale a comprendere nel campo l'oggetto che si deve collimare; indi fissata per mezzo del bottone anzidetto l'alidada al lembo si collimi all'oggetto col movimento della vite T. Si leggeranno i gradi sul circolo graduato

in corrispondenza di un indice fisso all'alidada, ed i primi sul tamburo (*).

Siccome il movimento dell'alidada (minore di un grado) non si legge sul circolo graduato, ma direttamente sul tamburo T,

così viene ad essere eliminato l'errore dovuto alla eccentricità dell'alidada, ciò che accelera l'operazione della misura degli angoli orizzontali e verticali.

(*) Si presuppone che, prima di cominciare le osservazioni si sia disposto il tamburo T, che è girevole, a sfregamento duro intorno al suo asse, in modo che su di esso si legga *zero*, quando l'indice dell'alidada corrisponde esattamente ad una divisione del lembo.

L'osservatore non essendo obbligato a leggere vernieri diametralmente opposti, può, senza spostarsi dalla posizione che ha quando ha collimato ad un oggetto, fare le due letture tanto sul circolo orizzontale quanto sul circolo verticale; l'istrumento è dunque un *vero tacheometro*, specialmente quando la divisione dei circoli è la *centesimale*. In quest'ultimo caso il tamburo T è diviso in cento parti ed il cannocchiale è distanziometro.

L'idea primitiva di adoperare circoli dentati non è dovuta al sig. Heyde, ma invece al sig. Cappello Giuseppe meccanico della R. Accademia delle Scienze di Torino dal 1802 al 1818 (*).

(*) L'egregio sig. cav. Armando assistente alla segreteria della nostra Accademia, mi ha favorito gentilmente i seguenti appunti sul meccanico Giuseppe Cappello:

1802. 3 agosto [15 termid. a. X]. Riceve L. 19 per lavori eseguiti intorno alle macchine dell'Osservatorio.

1803. 20 sett. Presenta un igrometro con memoria relativa (descritto nelle *Memoires*, vol. XIV, pag. XCVII).

1804. 12 genn. Se ne delibera l'acquisto.

„ 13 genn. Gli viene pagato L. 120.

„ 15 genn. Michelotti e Vassalli riferiscono su tale strumento.

„ 9 aprile. L'Accademia gli paga L. 33 per la ripulitura dei pendoli.

1807. 17 maggio. " 2 échelles servant de micromètres, faites sur deux lames de cristal exécutées et ensemble présentées... par le sieur J. Capel avantageusement connu de l'Académie par la construction de plusieurs autres instruments très délicats..... La classe lui a décerné une médaille d'encouragement en argent „ (*Memorie*, vol. XVI, p. CXXXVI).

1809. 4 marzo. Présentation de la part de Mr Capel d'un baromètre de son invention (*Memorie*, vol. XXII, p. XXXIX).

1810. 9 giugno. Il consiglio d'amministrazione approva il progetto di un baraccone da costruirsi nel cortile per uso del meccanico Capel, al quale si concede pure in affitto per uso alloggio il locale dell'antica infermeria.

1811. 26 marzo. Capello " macchinista dell'Accademia „ si rende rilevatario delle macchine e mobili del signor Roggero.

Nella *Guida di Torino* per il 1815 è indicato quale " macchinista onorario della R. Accademia delle scienze „.

1816. 1° agosto. L'Accademia gli concede, su malleveria, una bottega in affitto mediante il corrispettivo di L. 250 annue.

1817. gennaio. Dà degli acconti.

1818. 14 gennaio. Gli vien condonato il debito di L. 127.50 che ha verso l'Accademia, annunziandogli che questa si assumerà ancora le spese dello sgombro dei suoi strumenti.

Trasloca prima di Pasqua.

Noi non sappiamo se questi abbia costruito o non dei teodoliti a circoli dentati, sappiamo però che Ignazio PORRO ne costruì due verso il 1852 nell' Istituto Tecnomatico a Parigi. Egli distingue questo modo di dividere i circoli col nome di *sistema tmesitomico* dall'ordinario che egli chiama *tmesigrafico*.

Ecco riprodotta la pag. 108 del libro del Porro che ha per titolo: *Applicazione della Celerimensura alla misura generale parcellaria ed altimetrica dell'Italia. Creazione del gran libro fondiario.*

Quarta edizione e prima italiana contenente gl'ultimi perfezionamenti della Celerimensura e l'applicazione razionale della fotografia alla geodesia.

Firenze 1862
Coi tipi di Giuseppe Mariani.

Sono anche riprodotte in tavola a parte le due figure 25 e 27, di cui è parola nel testo.

1818. 4 febbraio. L'Accad. gli paga L. 57 per lavori in servizio della Specola.
1818. 4 settembre. Altra nota di L. 36 per altri lavori.

Colla lettera che riportiamo qui sotto e che non ha data, egli domanda il titolo di *meccanico* dell'Accademia.

Capel Mecanicien à l'Academie Imperiale
des sciences de Turin.

Joseph Capel horloger et Mecanicien a eu l'honneur de presenter à l'Académie Impériale plusieurs instruments pour la plus part inventés ou au moins perfectionnés par lui, pour les quels la classe des sciences lui a accordé les temoignages les plus flatteurs, en lui décernant des médailles, et une place honorable dans l'histoire de ses travaux. Encouragé par ces moyens il ne cessa de s'occuper pour le perfectionnement de son art, et il se flatte que l'attelier qu'il a établi dans cette ville prouve que ses efforts ne sont pas tout à fait inutiles. La qualité de l'ouvrage qui en sort. lui fait esperer que le public y accordera toute sa confiance: mais il ne sauroit en douter si l'Academie voulu lui accorder le titre de son mecanicien. C'est dans cette vüe et enhardi par vos bontés qu'il vous prie instamment de cette faveur. Il a l'honneur d'être avec profond respect

JOSEPH CAPEL *Artiste mecanicien.*

Art. 5.

Due altri Tacheometri con divisioni tmesitomiche ed altre aggiunte.

242. In quest' occasione furono ordinati nell'Instituto Tecnomatico per l'*École des Ponts et Chaussées* e per l'*École des Mines*, due Tacheometri con circoli più grandi e cannocchiali più forti, e si profittò di quel cambiamento di modello per introdurre un altro perfezionamento acceleratore, qual era il sistema tmesitomico di Capelli sostituito al tmesigrafico. In uno di quei strumenti la sostituzione si fece pel solo circolo verticale, nell'altro per ambidue i circoli. Fu al tempo stesso adattato a questo secondo strumento un sistema di auto-riduzione all' orizzonte, chiamato stenallatico, col quale qualunque sia l' inclinazione del cannocchiale, si legge sempre sulla mira la distanza ridotta all' orizzonte, effetto che si ottenne mediante una lente mobile automaticamente nell'interno del cannocchiale che fa variare l'angolo diastimometrico nella ragione inversa di $\overline{\sin}^2 \varphi$. La parte meccanica di questo effetto è ottenuta mediante una specie di parallelogrammo di Watt, d'una forma e costruzione particolare (Vedasi spiegazione delle figure).

Questi due tacheometri sono rappresentati (Fig. 25, 27).

243. Capelli, meccanico dell'Accademia delle Scienze di Torino, fu il primo ad applicare agli strumenti di precisione la tmesitomia intagliando attorno al lembo d'un teodolite dei denti o tacche ad intervalli d'un grado intiero e ad aggiungere un ingegnoso meccanismo divisore che serviva ad un tempo ad imprimere al cannocchiale un movimento lento e dare i minuti ed i secondi.

244. Così è che fu fatto il circolo verticale del tacheometro per la scuola *des Ponts et Chaussées*, ma però per il solo circolo verticale; per l'orizzontale si conservò la tmesigrafia con un mezzo particolare di leggere per riflessione che aveva il pregio di eliminare l' eccentricità con una sola lettura.

245. Al tacheometro fatto per l' *École des Mines* fu invece applicata la tmesitomia nei due sensi, la quale nel senso orizzontale non fece buona prova per mancanza di stabilità che ne risultava nell' istrumento.

Di questi due tipi di Tacheometri ne furono fatti quei due soli esemplari; essi riuscirono troppo voluminosi e troppo delicati per gli strapazzi del campo.

Malgrado queste novità, continuava ad avere la supremazia il Tacheometro rappresentato (Fig. 23), fino a che gl' ingegneri spagnuoli si presentarono all' Instituto Tecnomatico, con idee di modificazioni che si descriveranno all' art. 8.

Contributo alla teoria dei solidi a grande curvatura.

Nota di GIUSEPPE ALBENGA.

La necessità sempre più vivamente sentita di ricorrere nel calcolo dei solidi a grande curvatura a metodi che permettano di stabilire rapidamente e con buona approssimazione in qual modo si distribuiscano le tensioni interne corrispondenti ad una determinata sollecitazione esterna ha dato origine ad una quantità notevole di pubblicazioni, che qui sarebbe fuor di luogo citare perchè intese quasi esclusivamente ad applicare ai casi della pratica i principî classici della teoria dei solidi a grande curvatura (*) quali vennero stabiliti e sviluppati da Winkler, Grashof e dagli autori che li seguirono (**). Da questa necessità è ispirata la seguente nota, e suo scopo è quello d'indicare un metodo di calcolo che riesce utile specialmente quando esistano indeterminazioni statiche nei sistemi considerati.

È noto che le ricerche di Grashof si riferiscono in particolar modo al caso d'un solido a semplice curvatura, soggetto all'azione di forze giacenti nel piano del suo asse o distribuite simmetricamente intorno a questo piano che si suppone di simmetria per il solido (***): si ammette la legge di Hooke, si accetta la ipotesi di Bernouilli e di Navier sulla conservazione delle sezioni piane (****). Le considerazioni che seguono si intendono limitate

(*) Cfr. Guidi, *Lezioni sulla Scienza delle Costruzioni*, vol. II, pag. 184.

(**) Winkler, *Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit.* Prag, 1867. — Grashof, *Theorie der Elastizität und Festigkeit.* Berlin, 1878, p. 252 e C. v. Bach, *Elastizität und Festigkeit.* Berlin, 1905, p. 483.

(***) Sopra una estensione, che forse non convince pienamente, al caso di un anello generato dalla rotazione d'una figura qualunque intorno ad un asse, si confronti Mesnager, *Note sur l'approximation des formules de flexion des arcs*, " Annales des Ponts et Chaussées ", 1903, IV, pag. 187.

(****) L'ipotesi della conservazione delle sezioni piane che le esperienze di Bach (o. c., pag. 522) e le ricerche di Otto Hönigsberg su solidi trasparenti sollecitati da forze esterne ed esaminati a luce polarizzata pare ab-

a questo caso, che del resto è l'unico praticamente importante: si fa inoltre astrazione, come è uso costante, dalla presenza di tensioni tangenziali.

Nelle ipotesi precedenti il caso più generale di sollecitazione è dato da una pressione (o tensione) eccentrica, che potremo scomporre in uno sforzo normale baricentrico ed in un momento flettente: fatte le solite convenzioni rispetto ai segni delle sollecitazioni esterne (*) avremo per la fibra a distanza v dall'asse u baricentrico e normale all'asse di sollecitazione:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{Fr} + \frac{Mv}{\varkappa Fr(r+v)} = \frac{N}{F}\left(1 + \frac{e}{r} + \frac{ve}{\varkappa r(r+v)}\right) \tag{1}$$

dove con σ si indica al solito la tensione unitaria normale, con N lo sforzo normale, con F l'area della sezione trasversale, con r il raggio di curvatura, con e l'eccentricità dello sforzo e con $\varkappa$ la quantità $-\frac{1}{F}\int \frac{v}{v+r}\,dF$. La distanza dell'asse neutro dall'asse u è data, come è noto, da

$$v = \frac{Nr + M}{N + \frac{M}{r} + \frac{M}{\varkappa r}} = \frac{r+e}{1 + \frac{e}{r} + \frac{e}{\varkappa r}}. \tag{2}$$

***

Per le considerazioni seguenti è più utile ricorrere ad una diversa scomposizione delle forze esterne (**). Immaginiamo un elemento del solido limitato da due sezioni AB, CD vicinissime

---

biano verificata, fu combattuta da Augusto Föppl (*Festigkeitslehre*), che propose invece l'ipotesi d'una ripartizione lineare della tensione interna: nell'opera più recente, *Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie* egli riconosce l'arbitrarietà della sua proposta e, pur non accettando l'ipotesi della conservazione delle sezioni piane nel caso generale, dimostra come tale ipotesi s'accordi con la teoria matematica dell'elasticità per il caso del settore d'anello soggetto a flessione semplice.

(*) Si assumono come positivi gli sforzi che provocano tensione ed i momenti che tendono ad aumentare la curvatura.

(**) La prima idea di scomporre la sollecitazione esterna in un momento ed in una forza passante per un punto diverso dal baricentro è dovuta a Léauté (" Comptes rendus de l'Académie des Sciences ", 16 giugno 1884): però il punto scelto da Léauté non coincide con quello della trattazione presente, per quanto, in generale, ne disti di pochissimo.

(fig. 1): la risultante delle forze esterne relativa alla sezione CD abbia per componente normale la forza N. Indichiamo con I la traccia sul piano di figura dell'asse neutro che corrisponde ad una sollecitazione di pura flessione. Dalla (2) si ha subito che questo punto dista dal baricentro di $\frac{\varkappa}{\varkappa+1}r$.

Fig. 1.

Fig. 2.

Decomponiamo la forza N in una forza $\mathfrak{N}$ passante per il punto I ed in una coppia il cui momento indicheremo con $\mathfrak{M}$. Per effetto della $\mathfrak{N}$ la sezione CD si sposterà parallelamente a sè stessa (*): in causa della coppia roterà intorno ad I e la dilatazione unitaria in corrispondenza del punto I sarà, con le indicazioni delle figure 1 e 2 (**):

$$(3)\qquad \epsilon_n=\frac{\Delta ds_n}{ds_n}=\frac{\sigma_0}{E}\frac{r}{r_n}=\frac{\mathfrak{N}}{EF}\left(1-\frac{r-r_n}{r}\right)\frac{r}{r_n}=\frac{\mathfrak{N}}{EF}$$

e la rotazione riferita alla unità di lunghezza

$$(4)\qquad \frac{\Delta\, d\varphi}{ds_n}=\frac{\epsilon_0}{r-r_n}\frac{r}{r_n}=\frac{\mathfrak{M}}{EFr}\frac{1}{r-r_n}\frac{r}{r_n}=\frac{\mathfrak{M}(\varkappa+1)^2}{\varkappa EFr^2}.$$

(*) Infatti la (2) diviene infinita per $e=-\frac{\varkappa}{\varkappa+1}r$.

(**) Basta applicare la (1) con $e=-(r-r_n)$ alla fibra baricentrica.

La (3) e la (4) ci dicono che le deformazioni subìte dall'elemento curvilineo sono quelle che per le identiche sollecitazioni sopporterebbe un elemento ad asse rettilineo di lunghezza ds_n, di superficie trasversale F ed il cui momento d'inerzia rispetto all'asse di flessione sia $\frac{\varkappa}{(\varkappa+1)^2} Fr^2$: soddisfa a queste condizioni la trasformata inversa per l'ascissa (*) della figura data, quando si assuma come polo della trasformazione il centro di curvatura, come asse l'asse neutro per I. All'elemento curvilineo potremo quindi in tutte le questioni che ne riguardano la deformazione sostituire l'elemento ad asse rettilineo ora definito: in particolare potremo estendere ai solidi a grande curvatura le teorie dell'ellisse d'elasticità svolte per il caso in cui la curvatura possa venir trascurata (**): il peso elastico dell'elemento sarà dato da $ds_n \frac{(\varkappa+1)^2}{\varkappa E F r^2}$: i semiassi dell'ellisse di elasticità saranno $ds_n \sqrt{\frac{1}{12}}$ (longitudinale) e $\sqrt{\frac{\varkappa}{(\varkappa+1)^2} r^2}$ (trasversale). Quest'ultimo può esser costruito molto semplicemente come media geometrica fra r ed $r - r_n$.

Da quanto s'è detto risulta ancora senz'altro che per una sezione qualsiasi centri di pressione e traccie degli assi neutri relativi si corrispondono in una involuzione ellittica del 1° ordine definita dal centro I e dalla potenza $\frac{\varkappa r^2}{(\varkappa+1)^2}$, oppure dalla coppia di punti corrispondenti O e G (fig. 1) e dal centro I.

*
* *

Si possono determinare molto facilmente le deformazioni dovute alle tensioni tangenziali. Se si ammette la distribuzione di tali tensioni trovata dal Grashof (***) una trattazione perfettamente analoga a quella fatta per i solidi prismatici dimostra che per tener conto delle deformazioni dovute allo sforzo di

---

(*) Cfr. D'Ocagne, *Calcul grafique*, p. 66. La dimostrazione può farsi molto semplicemente ricordando il metodo di Nehls e di Collignon per la determinazione dei momenti delle superficie. Cfr. Guidi, *Statica grafica*, pag. 124.

(**) Cfr. Guidi, *L' ellisse d' elasticità nella scienza delle costruzioni*. Torino, 1904.

(***) Grashof, *Theorie der Elastizität und Festigkeit*, pag. 283.

taglio basta sostituire al semiasse longitudinale prima definito quello dato dalla

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{ds_n^2}{12} + \chi_1 \frac{E}{G} \frac{\varkappa}{(\varkappa+1)^2} r^2}$$

dove con χ_1 si indica un coefficiente dipendente dalla forma della sezione e dal raggio di curvatura, analogo a quello che si indica comunemente con χ, ma alquanto più complesso.

***

Un accenno ad una applicazione al caso dell'anello circolare stirato da due forze P agenti secondo un diametro (*) può dimostrare quanto semplicemente la teoria feconda dell'ellisse d'elasticità permetta di risolvere i problemi relativi ai solidi a grande curvatura. In virtù della simmetria considereremo soltanto l'equilibrio di un quarto d'anello sollecitato dalla forza $\frac{1}{2}$ P (fig. 3). Supponiamo che questa porzione del nostro solido sia orizzontalmente incastrata secondo CD: la sezione AB sarà soggetta all'unica condizione di rimaner verticale: in essa si svilupperà un momento M_x. Osserviamo che le forze che sollecitano il quarto d'anello sono ambedue applicate all'estremità libera di esso, e che perchè la sezione AB non ruoti deve esser nullo il momento statico del peso elastico del quarto d' anello rispetto alla risultante di $^1/_2$ P e della coppia di momento M_x: si vede subito che questa forza dovrà passare per il baricentro elastico dell'arco, che coincide, per l'anello di sezione costante col baricentro dell'arco di circolo di raggio $r_n = \frac{1}{\varkappa+1} r$ (**).

(*) Cfr. Bach, o. c., pag. 508 e Bantlin, *Beitrag zur Bestimmung der Biegungsspannung in gekrümmter stabförmiger Körpern,* " Zeitschrift des Ver. deutscher Ing. ,, 1901, I, 164 e 201.

(**) È facile verificare che la costruzione qui data conduce ai valori trovati da Bach e Bantlin: infatti per il raggio $r_n = \frac{1}{\varkappa+1} r$, il baricentro del quarto di circonferenza dista dal centro di $\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{r}{\varkappa+1}$ e quindi dalla forza $P/_2$ passante per O della quantità $\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{r}{\varkappa+1} \cos 45^\circ = \frac{1}{\varkappa+1} \frac{2r}{\pi}$: valore che coincide con quello trovato dai citati autori.

La costruzione del luogo delle traccie degli assi neutri (fig. 3) è basata sulla considerazione della corrispondenza involutoria, cui si è accennato (*). Se si osserva che la tensione unitaria è costante per ogni punto della fibra baricentrica, che le sezioni rimangono piane e che per eguali deformazioni le tensioni unitarie sono inversamente proporzionali alla distanza del punto

Fig. 3.

su cui esercitano dal centro, apparirà chiara la costruzione della tensione unitaria per un punto qualsiasi, disegnata in figura per il punto F della sezione EF. Con la costruzione inversa si sono ottenute le linee di egual sollecitazione unitaria disegnate nella figura.

(*) Sul fatto cioè che per ogni sezione, la HI per esempio, il prodotto del segmento compreso fra la forza $^1/_2\,P$ passante per G e il cerchio di raggio r_n e di quello compreso fra questo circolo e il punto cercato è eguale a $\frac{\varkappa}{(\varkappa+1)^2}\,r^2$.

Contributo alla trattazione grafica della trave continua.

Nota dell'Ing. GUSTAVO COLONNETTI.

Il classico procedimento grafico per la risoluzione della trave continua, che, iniziato dagli studi di Mohr, raggiunse il suo massimo sviluppo nelle notissime opere di Ritter (*), è suscettibile di non indifferenti semplificazioni ogniqualvolta invece di considerare il problema sotto il suo punto di vista più generale epperò più complesso, si prenda a studiarlo nei suoi singoli casi particolari.

In questa nota io mi propongo pertanto di portare il mio modesto contributo allo studio della questione, provando come si possa, nel caso di travi ad una sola indeterminazione statica, pervenire a risultati rigorosi mediante costruzioni grafiche più semplici e più spedite di quelle oggi comunemente usate.

Mi occuperò dapprima del tracciamento della linea di chiusa del diagramma dei momenti flettenti, riservandomi di accennare, in fine, ad una costruzione grafica delle linee di influenza dei momenti sugli appoggi, costruzione che mi sembra non priva di interesse, e che non mi consta esser stata da altri precedentemente indicata.

Si consideri una trave continua ad asse rettilineo, a sezione costante, e dotata di 3 appoggi rigidi e disposti tutti ad un medesimo livello.

Si immagini poi che detti appoggi siano capaci di funzionare, almeno per un istante, come incastri, ossia si supponga che essi trasmettano alla trave non solo le opportune reazioni (forze concentrate atte a stabilire l'equilibrio della trave stessa alla traslazione), ma anche opportuni momenti (coppie di rotazione atte ad impedire qualunque cambiamento di direzione dell'asse della trave in corrispondenza dei singoli appoggi).

(*) W. Ritter, *Die elastische Linie u. ihre Anwendung auf den continuirlichen Balken* (Zürich, 1883) e *Anwendungen der graphischen Statik* (Zürich, 1888-1900).

In tale ipotesi, ciascuna campata non risentirà effetto alcuno dalle forze agenti sull'altra campata, epperò potrà considerarsi come isolata dall'altra, il che equivale a dire che le sue condizioni statiche saranno quelle di una semplice trave rigidamente incastrata agli estremi.

Qualunque sia perciò il carico che su di essa agisce, il diagramma del momento flettente (curva funicolare dei carichi riferita ad una retta la cui posizione dipende unicamente dalle condizioni di posa della trave) sarà determinato, e potrà facilmente tracciarsi in base alla nota duplice condizione che la sua area deve essere nulla, e che nullo deve pure essere il suo momento statico rispetto ad una qualsiasi verticale del piano.

Supponiamo ora che l' appoggio intermedio perda quella particolare proprietà che noi gli avevamo idealmente conferita, e si trasformi da rigido incastro in semplice appoggio; allora, pur restando invariate le condizioni di carico della trave, l'equilibrio del sistema viene, in generale, turbato e, precisamente, in virtù della differenza tra i momenti flettenti anteriormente esistenti nelle sezioni immediatamente adiacenti a sinistra ed a destra di quell'appoggio, l'asse della trave ruota intorno all'appoggio stesso fino a che col diminuire del maggiore, e col crescere del minore di quei due momenti, essi acquistino entrambi un unico valore intermedio.

L'equilibrio viene così ad essere ristabilito, allorquando l'asse geometrico della trave, sull'appoggio in questione, forma un conveniente angolo colla sua posizione primitiva, da noi supposta orizzontale.

Detti pertanto $\mathfrak{M}_1'$ ed $\mathfrak{M}_1''$ i momenti inizialmente esistenti presso l'appoggio intermedio 1, detto $\mathfrak{M}_1$ il valore finale assunto dal momento flettente sull'appoggio stesso, e supposto, per fissar le idee, che sia $\mathfrak{M}_1' > \mathfrak{M}_1''$ (fig. 1), appare evidente che alla posizione finale di equilibrio del sistema si poteva pervenire, anche, applicando alle due campate separatamente considerate, ed in corrispondenza dei loro due estremi adiacenti in 1, due momenti flettenti eguali rispettivamente ad

$$M_1' = \mathfrak{M}_1' - \mathfrak{M}_1$$

e ad

$$M_1'' = \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_1''.$$

Questi due momenti supplementari sono legati dalla relazione (somma delle precedenti):

$$M_1' + M_1'' = \mathfrak{M}_1' - \mathfrak{M}_1'' \qquad [1]$$

e sono determinati dalla condizione che essi devono entrambi produrre la medesima rotazione degli estremi degli assi geometrici delle due travi attorno al punto 1.

Fig. 1.

È adunque chiaro che basta esprimere questa condizione mediante una nuova equazione tra le quantità M e gli elementi noti del sistema, perchè si possa in ogni caso determinare il valor definitivo $\mathfrak{M}_1$ del momento flettente sull'appoggio, quando si siano precedentemente trovati i due valori provvisorii $\mathfrak{M}_1'$ ed $\mathfrak{M}_1''$.

Che se poi noi conosciamo anche quale sia la legge con cui si sposta la linea di chiusa del diagramma-momenti di ciascuna campata, per l'aggiunta di quei momenti addizionali M, noi potremo dai due diagrammi-momenti provvisorii dedurre direttamente il diagramma relativo alla trave, considerata come continua sull'appoggio intermedio.

Consideriamo adunque una qualunque delle due campate della trave come incastrata ad un estremo A (fig. 2_a) e vincolata all'altro B da un semplice appoggio ancorato (capace cioè di trattenere l'estremo stesso sulla orizzontale primitiva pur permettendogli di ruotare), ed immaginiamo che la trave stessa sia

sollecitata da un momento flettente $-M$ applicato in corrispondenza dell'estremo appoggiato B.

Supposta al solito decomposta la reazione dell'incastro in una forza verticale $\mathcal{A}$ applicata in A (forza che riterremo positiva se diretta dal basso all'alto) ed in un momento $\mathfrak{M}_A$ (positivo se tende a produrre una rotazione destrorsa), l'equazione

Fig. 2.

differenziale della linea elastica (riferita a 2 assi coordinati Ax ed Ay, orizzontale l'uno, e l'altro verticale, passanti entrambi per A), può, come è noto (*), scriversi sotto la forma

$$-EJ\frac{d^2y}{dx^2} = \mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_A + \mathcal{A}x$$

dove J ed E rappresentano, come d'uso, rispettivamente il momento di inerzia della sezione retta della trave, ed il modulo di resistenza del materiale di cui essa è costituita, mentre $\mathfrak{M}_x$ indica il momento flettente esistente nella sezione generica a distanza x dall'origine A.

(*) Si suppone qui nota la teoria delle travi inflesse. Il Lettore potrà in ogni caso trovare un'ampia trattazione sia grafica che analitica dell'argomento nelle *Lezioni sulla Scienza delle Costruzioni* del Prof. Guidi (5ª ediz., Torino, 1909).

Quest'equazione integrata due volte rispetto ad x dà successivamente

$$-EJ\frac{dy}{dx}=\mathfrak{M}_A x+\mathcal{A}\frac{x^2}{2}$$

$$-EJy=\mathfrak{M}_A\frac{x^2}{2}+\mathcal{A}\frac{x^3}{6}.$$

Le due incognite $\mathfrak{M}_A$ ed $\mathcal{A}$ sono determinate dalla condizione che per $x=l$ la prima e la terza delle equazioni scritte devono rispettivamente diventare:

$$\mathfrak{M}_l=\mathfrak{M}_A+\mathcal{A}l=M$$

$$0=\mathfrak{M}_A\frac{l^2}{2}+\mathcal{A}\frac{l^3}{6}.$$

Da esse infatti si ricava:

$$\begin{cases}\mathcal{A}=\dfrac{3}{2}\,\dfrac{M}{l}\\[2ex]\mathfrak{M}_A=-\dfrac{M}{2}.\end{cases}$$

La trave può perciò ritenersi sciolta dai vincoli purchè si intendano applicate ai suoi estremi sollecitazioni equivalenti alle reazioni dei vincoli stessi (fig. 2_b).

Il diagramma dei momenti flettenti sarà quello rappresentato dalla fig. 2_c.

L'inclinazione α dell'asse della trave in corrispondenza del suo estremo appoggiato, può ora facilmente dedursi ponendo $x=l$ nella seconda equazione differenziale. Essa diviene infatti:

$$-EJ\alpha=\mathfrak{M}_A l+\mathcal{A}\frac{l^2}{2}$$

ossia sostituendo ad $\mathfrak{M}_A$ e ad $\mathcal{A}$ i loro valori ormai noti e riducendo:

$$-EJ\alpha=\frac{Ml}{4}$$

la quale ci dice che l'inclinazione α ha lo stesso segno del momento applicato che l'ha prodotta e vale, in valor assoluto:

$$\alpha = \frac{Ml}{4EJ}. \qquad [2]$$

Questo risultato applicato successivamente alle due campate della trave della fig. 1 dà luogo alle relazioni seguenti:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{M_1' l_1}{4EJ} \\ \alpha_1 = \dfrac{M_1'' l_2}{4EJ} \end{cases}$$

le quali confrontate fra loro ci dicono che

$$\frac{M_1'}{M_1''} = \frac{l_2}{l_1} \qquad [3]$$

od anche, in virtù della [1]:

$$\frac{M_1'}{\mathfrak{M}_1' - \mathfrak{M}_1''} = \frac{l_2}{l_1 + l_2}. \qquad [3']$$

L'ordinata momento $\mathfrak{M}_1$ sull'appoggio 1 può dunque graficamente determinarsi in funzione delle $\mathfrak{M}_1'$ ed $\mathfrak{M}_1''$ mediante una semplice costruzione di quarta proporzionale.

Se inoltre si ricorda quale sia la forma del diagramma dei momenti per il caso ideale della trave della fig. 2, il tracciamento della linea definitiva di chiusa del diagramma dei momenti flettenti, quale appare dalla fig. 1, risulta completamente giustificato.

Risolto così in modo completo, il problema propostoci nella ipotesi che la trave sia, o si possa ritenere, rigidamente incastrata agli estremi, ci proponiamo ora di vedere quali variazioni debba subire il procedimento esposto, allorquando la trave abbia gli estremi semplicemente appoggiati.

Supposta perciò, al solito, la trave della fig. 3 rigidamente incastrata in corrispondenza dell'appoggio intermedio, noi sappiamo tracciare (qualunque sia la condizione di carico presa in

esame) i diagrammi-momenti per le due campate isolatamente considerate; è noto infatti che, per ciascuna di esse, il momento flettente sull'appoggio semplice deve essere nullo e che nullo deve anche essere il momento statico del diagramma dei momenti rispetto alla verticale dell'appoggio.

Fig. 3.

Liberato di poi dall'incastro l'appoggio intermedio, noi determineremo quali debbano essere gli incrementi M_1' ed M_1'' da attribuirsi a ciascuno dei momenti primitivi $\mathfrak{M}_1'$ ed $\mathfrak{M}_1''$, affinchè entrambi si mutino nel momento definitivo $\mathfrak{M}_1$; e ciò faremo, al solito, scrivendo quale relazione leghi quei momenti M_1' ed M_1'' all'angolo α_1 di cui deve ruotare l'asse della trave in corrispondenza dell'appoggio 1.

Ora, ciascuna delle due campate va considerata, per rispetto al momento addizionale che le compete, come una trave le cui estremità siano libere di ruotare, ma siano obbligate a rimanere entrambe sull'orizzontale primitiva; le sollecitazioni applicate si riducono ad un unico momento M in corrispondenza di uno degli estremi (fig. 4_a); le reazioni dei vincoli si ridurranno perciò a 2 forze verticali P, P eguali in grandezza, dirette in sensi contrari, e tali che il momento Pl della coppia da esse formata sia eguale ed opposto ad M.

La trave si comporta come se fosse incastrata ad un estremo e caricata all'altro con un carico concentrato eguale a P (fig. 4_b). Dalla:

$$f = \frac{Pl^3}{3EJ} = \frac{Ml^2}{3EJ}$$

si deduce perciò

$$\alpha = \frac{Ml}{3EJ}. \tag{4}$$

Questa relazione applicata successivamente alle due campate dà:

$$\alpha_1 = \frac{M_1' l_1}{3EJ} = \frac{M_1'' l_2}{3EJ}$$

da cui si ricavano ancora la [3] e la [3'].

Fig. 4.

La costruzione grafica del momento sull'appoggio intermedio, quale fu indicata per la trave ad estremità incastrate, vale dunque anche per la trave ad estremi appoggiati.

La linea di chiusa del diagramma-momenti può poi senz'altro tracciarsi qualora si rammenti che il momento flettente sugli appoggi estremi deve mantenersi sempre nullo.

Che se invece si considera una trave avente un estremo rigidamente incastrato e l'altro semplicemente appoggiato (*), dovrà ad una delle due campate applicarsi la formola [2], all'altra la [4], epperò si avrà, supposto che sia l_1 la lunghezza della campata adiacente all'estremo incastrato:

$$\alpha_1 = \frac{M_1' l_1}{4EJ} = \frac{M_1'' l_2}{3EJ}$$

(*) L'ipotesi si trova raramente realizzata in pratica, ma merita di essere presa in considerazione, perchè ci permette di estendere le nostre conclusioni anche al caso di travi a 5 appoggi, purchè simmetriche e simmetricamente caricate.

da cui si ricava la relazione

$$[5] \qquad \frac{M_1'}{M_1''} = \frac{\frac{4}{3}\, l_2}{l_1}$$

la quale ci permette di affermare che il procedimento sopra indicato continua a sussistere, purchè alla lunghezza l_2 della campata semplicemente appoggiata si sostituisca in esso una lunghezza fittizia eguale ai $\frac{4}{3}$ di quella.

Questa regola è generale, epperò comprende come caso particolare anche il caso già studiato di trave a 3 semplici appoggi.

Una ultima disposizione particolarmente interessante per la pratica è poi quella di travi continue terminanti con porzioni a sbalzo.

Il momento sull'appoggio estremo che precede lo sbalzo ha allora un valore costante, in generale diverso da zero, e precisamente, eguale al momento, rispetto ad esso appoggio, di tutti i carichi gravanti sullo sbalzo stesso.

Si consideri perciò la campata adiacente alla porzione a sbalzo, dapprima come rigidamente incastrata agli estremi; di poi si immagini che la trave ruoti in corrispondenza dell'ap-

Fig. 5.

poggio estremo che precede lo sbalzo fino a che il momento flettente assuma ivi il valore definitivo che gli compete; tracciata in base a questo momento la linea di chiusa provvisoria per la campata in esame, si determini il momento definitivo

sull'appoggio intermedio come se l'appoggio estremo fosse un appoggio semplice senza sbalzo; rammentando poi che, comunque varii il momento sull'appoggio intermedio, quello sull'appoggio estremo rimane costante, si potrà senza difficoltà tracciare la linea definitiva di chiusa del diagramma dei momenti.

La fig. 5 ci presenta una pratica applicazione delle cose esposte; in essa venne eseguito il tracciamento della solita linea di chiusa del diagramma-momenti per una trave uniformemente caricata avente un estremo rigidamente incastrato e munita all'altro estremo di porzione a sbalzo (*).

(*) Non è difficile trovare l'espressione algebrica del momento $\mathfrak{M}_1$ sull'appoggio centrale. Detto infatti p il carico costante per unità di lunghezza della trave, si ha, colle solite notazioni, per la trave supposta rigidamente incastrata in 1:

$$\mathfrak{M}_1' = -\frac{pl_1^2}{12},$$

mentre in virtù delle costruzioni grafiche sopra descritte

$$\mathfrak{M}_1'' = -\frac{pl_2^2}{12} - \frac{1}{2} M_2 = -\frac{pl_2^2}{12} - \frac{1}{2}\left(\frac{pl_2^2}{12} - \frac{pl_3^2}{2}\right) = -\frac{pl_2^2}{8} + \frac{pl_3^2}{4}$$

epperò

$$M_1' = (\mathfrak{M}_1'' - \mathfrak{M}_1') \frac{\frac{4}{3} l_2}{l_1 + \frac{4}{3} l_2} = \left(-\frac{pl_2^2}{8} + \frac{pl_3^2}{4} + \frac{pl_1^2}{12}\right) \frac{\frac{4}{3} l_2}{l_1 + \frac{4}{3} l_2}$$

ed

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_1' + M_1' = -\frac{pl_1^2}{12} + \left(-\frac{pl_2^2}{8} + \frac{pl_3^2}{4} + \frac{pl_1^2}{12}\right) \frac{\frac{4}{3} l_2}{l_1 + \frac{4}{3} l_2} =$$

$$= \left(-\frac{pl_1^3}{12} - \frac{pl_2^3}{6} + \frac{pl_2 l_3^2}{3}\right) \frac{1}{l_1 + \frac{4}{3} l_2}.$$

A titolo di controllo mi sembra non inutile far notare come a questa medesima espressione conduca il noto metodo analitico per la risoluzione della trave continua basato sulla equazione dei tre momenti. È facile infatti verificare che, applicato al caso nostro, esso fornisce le due equazioni:

$$\begin{cases} 2l_1\mathfrak{M}_0 + l_1\mathfrak{M}_1 = -\frac{1}{4} pl_1^3 \\ l_1\mathfrak{M}_0 + 2(l_1 + l_2)\mathfrak{M}_1 + l_2\mathfrak{M}_2 = -\frac{1}{4} pl_1^3 - \frac{1}{4} pl_2^3 \end{cases}$$

È appena necessario avvertire che il metodo può con vantaggio essere applicato anche quando la costruzione dei diagrammi-momenti ha per iscopo il tracciamento delle linee di influenza del momento flettente nelle varie sezioni della trave.

Che anzi la più interessante fra queste linee, quella del momento sull'appoggio intermedio, può, in virtù delle considerazioni sopra esposte, esser tracciata in modo estremamente semplice e spedito.

Si consideri infatti una trave continua, a 2 campate incastrata rigidamente agli estremi (*), e percorsa da un carico unitario concentrato (fig. 6).

Fig. 6.

In un dato istante, in cui il carico si trovi per esempio sulla prima campata a distanza a dall'incastro e b dall'appoggio

---

Dalla prima si ricava:

$$\mathfrak{M}_0 = -\frac{\mathfrak{M}_1}{2} - \frac{pl_1^2}{8}.$$

Sostituendo nella seconda ad $\mathfrak{M}_0$ questo suo valore e ricordando che $\mathfrak{M}_2 = -\frac{pl_3^2}{2}$ si ha:

$$-\frac{l_1\mathfrak{M}_1}{2} - \frac{pl_1^3}{8} + 2(l_1 + l_2)\mathfrak{M}_1 - \frac{pl_2l_3^2}{2} = -\frac{1}{4}pl_1^3 - \frac{1}{4}pl_2^3$$

da cui

$$\mathfrak{M}_1\left(l_1 + \frac{4}{3}l_2\right) = -\frac{pl_1^3}{12} - \frac{pl_2^3}{6} + \frac{pl_2l_3^2}{3} \qquad \text{cdd.}$$

(*) Il caso di trave ad estremi appoggiati è affatto analogo e conduce ad un procedimento grafico simile al presente per quanto di esecuzione un po' più complicata.

intermedio, il momento provvisorio $\mathfrak{M}_1'$ vale notoriamente $-1 \frac{bv^2}{l_1^2}$ mentre $\mathfrak{M}_1''$ è nullo.

La [3'] fornisce adunque

$$M_1' = - \frac{ba^2}{l_1^2} \frac{l_2}{l_1 + l_2}$$

epperò

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_1' - M_1' = - \frac{ba^2}{l_1(l_1 + l_2)} \quad (*)$$

la quale scritta sotto la forma

$$[6] \qquad \frac{-\mathfrak{M}_1}{a} = \frac{b \frac{a}{l_1}}{l_1 + l_2}$$

si traduce nella costruzione grafica indicata in figura, costruzione la quale si presta assai bene al tracciamento per punti della linea di influenza cercata.

Febbraio 1909.

(*) Questa medesima espressione si può ottenere anche considerando le due campate, isolatamente prese, come travi imperfettamente incastrate agli estremi, ed applicando ad esse le note espressioni dei momenti di incastro in funzione dei carichi e delle inclinazioni assunte dall'asse geometrico in corrispondenza degli incastri stessi (Cfr. Guidi, l. c., pag. 112).

Si ottengono infatti così le due equazioni:

$$\begin{cases} \mathfrak{M}_1 = - \frac{ba^2}{l_1^2} + \frac{2EJ}{l_1} \, 2\alpha_1 \\ \mathfrak{M}_1 = - \frac{2EJ}{l_2} \, 2\alpha_1 \end{cases}$$

da cui eliminando α_1 si ha:

$$\mathfrak{M}_1 \left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right) = - \frac{ba^2}{l_1^2}$$

epperò

$$\mathfrak{M}_1 = - \frac{ba^2}{l_1(l_1 + l_2)} \qquad \text{cdd.}$$

Sulle varietà algebriche per le quali sono di dimensione minore dell'ordinario, senza riempire lo spazio ambiente, una o alcune delle varietà formate da spazi seganti.

Nota di FRANCESCO PALATINI.

Il problema della determinazione delle varietà delle quali mi occupo in questa Nota, oltre ad essere interessante per se stesso, ha una importanza speciale in quanto che la risoluzione di esso permetterebbe anche di determinare i casi di eccezione alla rappresentabilità delle forme di ordine n con somme di potenze n^{me} di forme lineari, come ho osservato in altre Note (*). In codeste Note ho dimostrato che esempi di varietà delle quali qui mi occupo, vengono offerti da quelle rappresentate dal sistema di tutte le superficie di quarto ordine di S_3 e di tutte le V_3 di terzo e di quarto ordine di S_4. In un'altra Nota (**) poi ho risolto completamente il problema per il caso delle superficie.

Il presente scritto non esaurisce l'argomento di cui si occupa, tuttavia contiene un complesso di risultati che mi sembrano abbastanza notevoli, e precisamente un insieme di proprietà delle varietà in discorso, proprietà che mi conducono alla distinzione delle varietà stesse in gruppi ed alla determinazione di uno di tali gruppi.

1. — Data una varietà algebrica Φ_p di dimensione p, indicheremo con $M_{(k)}$ la varietà formata dagli spazi S_k aventi ciascuno $k+1$ punti in comune con la Φ_p.

(*) *Sulla rappresentazione delle forme*, ecc. " Atti Acc. Torino ,, 1902, e " Rend. Acc. Lincei ,, 1903.

(**) *Sulle superficie algebriche i cui* S_h $(h+1)$*-seganti non riempiono lo spazio ambiente*, " Atti Acc. Torino ,, 1906.

TEOR. I. — *Considerando della* Φ_p *le varietà* $M_{(1)}, M_{(2)}, \ldots, M_{(k)}$, $M_{(k+1)}, \ldots$, *se la* $M_{(k)}$ *è di dimensione* $(p+1)k+p-\gamma$, $\gamma > 0$, *anche le* $M_{(k+1)}, M_{(k+2)}, \ldots$, *sono di dimensione minore dell'ordinario.*

Difatti prendiamo nella $M_{(k+1)}$ un punto generico Q e fissiamo uno degli spazi a $k+1$ dimensioni seganti di Φ_p, passanti per esso, e sia S'_{k+1}; siano $A_1, A_2, \ldots, A_{k+2}$ i punti che questo spazio ha in comune con la Φ_p. Allora la retta A_1Q incontra l'S_k' determinato da $A_2, \ldots, A_{k+2}$ in un punto T della $M_{(k)}$, per il quale passano dunque $\infty^\gamma S_k$ seganti, e gli $\infty^\gamma S_{k+1}$ determinati da essi e da A_1 passano per la retta A_1T e perciò per Q. Dunque passando per ogni punto di $M_{(k+1)}$ infiniti spazi seganti a $k+1$ dimensioni, essa è di dimensione minore dell'ordinario. Ed ora, ripetendo lo stesso ragionamento, troveremo di dimensione minore dell'ordinario anche le $M_{(k+2)}, M_{(k+3)}, \ldots$

TEOR. II. — *Se la* $M_{(k+1)}$ *di una* Φ_p *coincide con la* $M_{(k)}$, *con questa coincideranno anche le* $M_{(k+2)}, M_{(k+3)}, \ldots$

Notiamo anzitutto che se da un punto A di Φ_p projettiamo la $M_{(k)}$, siccome gli S_k seganti vengono projettati mediante altrettanti S_{k+1} pure seganti, e siccome questi, per l'ipotesi fatta, appartengono alla $M_{(k)}$, così la varietà ottenuta mediante questa projezione è la $M_{(k)}$ stessa. Ora fissati nella Φ_p $k+3$ punti A_1, $A_2, \ldots, A_{k+3}$, gli ultimi $k+2$ di essi determinano un S_{k+1} segante, il quale per ipotesi appartiene alla $M_{(k)}$, e siccome projettando questa da A_1, si ottiene la $M_{(k)}$ stessa, così l'S_{k+2} determinato dai $k+3$ punti scelti appartiene alla $M_{(k)}$, donde risulta che la $M_{(k+2)}$ coincide con la $M_{(k)}$. E così di seguito.

COR. — *Se la* $M_{(k+1)}$ *coincide con la* $M_{(k)}$, *la quale sia di dimensione* m, *lo spazio cui appartiene la* Φ_p *è un* S_m, *col quale coincide la* $M_{(k)}$, *cosicchè gli* S_k *seganti riempiono lo spazio ambiente.*

Infatti per l'ipotesi ed il t. I coincidono con $M_{(k)}$ le $M_{(k+1)}, \ldots, M_{(m)}$, ed essendo quest'ultima formata di spazi S_m, essa, e perciò anche la $M_{(k)}$, si riduce ad un S_m, al quale dunque appartiene la Φ_p.

2. TEOR. I. — *Se la* $M_{(k)}$ *di una* Φ_p *è di dimensione* $(p+1)k+p-\gamma$, $\gamma \geq 0$, *e se la dimensione dello spazio ambiente*

è $(p+1)k+p-\gamma+c$, $c>0$, *dev'essere* $\gamma-c<(p-1)k$, *cioè lo spazio ambiente deve avere una dimensione maggiore di* $2k+p$; *in altre parole se è* $\gamma-c\geq(p-1)k$, *dev'essere* $c=0$, *cioè la* $M_{(k)}$ *riempie lo spazio ambiente.*

Per $c\geq\gamma$ si ha senz'altro $\gamma-c<(p-1)k$. Se è $c<\gamma$, posto che sia $\gamma-c=(p-1)k$, lo spazio ambiente sarà un S_{2k+p}, e allora un suo S_{2k+1} qualsiasi taglia Φ_p in una linea i cui S_k seganti riempiono questo S_{2k+1} (v. l'ultima Nota citata), e siccome gli S_{2k+1} di S_{2k+p} riempiono questo spazio, così gli S_k seganti di Φ_p riempiono lo spazio ambiente, contro l'ipotesi $c>0$. Tanto meno poi può essere $\gamma-c>(p-1)k$.

Ora essendo $\gamma-c<(p-1)k$, sarà $(p+1)k+p-(\gamma-c)>$ $>(p+1)k+p-(p-1)k$, cioè $(p+1)k+p-\gamma+c>2k+p$

TEOR. II. — *Se la* $M_{(k)}$ *di una* Φ_p *è di dimensione* $(p+1)k+p-\gamma$, $\gamma>0$, *e se lo spazio determinato da due* S_k *seganti fra loro incidenti* (per ogni punto di $M_{(k)}$ passano ∞^{γ} di siffatti S_k) *non contiene infiniti* S_k *seganti, lo spazio ambiente è di dimensione* $(p+1)k+p-\gamma$, *cioè è riempito dalla* $M_{(k)}$.

Sia $(p+1)k+p-\gamma+c$, $c\geq0$, la dimensione dello spazio ambiente. Generalizzando il ragionamento del n° 1 dell'ultima Nota citata, abbiamo che, fissato un S_k' segante di Φ_p, gli S_k seganti ad esso incidenti, passandone ∞^{γ} per ogni punto di quello, saranno $\infty^{k+\gamma-u}$, $u\geq0$, e taglieranno ciascuno l'S_k' in un S_x, $x\geq u$, cosicchè determinano con questo altrettanti S_{2k-x}, stante che, in virtù dell'ipotesi, ciascuno di questi S_{2k-x} non contiene infiniti S_k seganti. Allora essendo ∞^{pk+p} i nostri S_k seganti, gli S_{2k-x} saranno $\infty^{(pk+p)+(k+\gamma-u)}=\infty^{(p+1)k+p+\gamma-u}$, e sono tutti $(2k+2)$ seganti (almeno). Ora per ognuno dei nostri S_{2k-x} passano in $S_{(p+1)k+p-\gamma+c}$ $\infty^{(x+1)[(p-1)k+(p-1)-\gamma+c]}$ spazi S_{2k+1}, e così si ottiene un'infinità di dimensione $[(p+1)k+p+\gamma-u]+$ $+(x+1)[(p-1)k+(p-1)-\gamma+c]=2pk+(2p-1)+$ $+x[(p-1)k-(\gamma-c)]+x(p-1)+c+(x-u)$ di spazi S_{2k+1} seganti di Φ_p in almeno $2k+2$ punti (*), e questo numero

---

(*) Si può dubitare che ogni S_{2k+1} passante per uno arbitrario dei nostri S_{2k-c} ne possa contenere un'infinità, nel qual caso contiene pure infiniti S_k seganti, e perciò avrà con la Φ_p una linea (almeno) in comune. In tal caso, fissato un S_{2k+2} passante per un S_{2k-x} ed in esso una semplice

dev'essere inferiore di quello ∞^{2pk+2p} di tutti gli S_{2k+1} seganti di Φ_p. Ora dovendo noi considerare il caso di $\gamma - c < (p-1)k$ (perchè nel caso contrario per il t. precedente la $M_{(k)}$ riempie sempre lo spazio ambiente), dev'essere $x = 0$, $x - u = 0$, $u = 0$, $c = 0$, cioè la $M_{(k)}$ riempie lo spazio ambiente, e di più risulta che in tal caso due S_k generici fra loro incidenti hanno sempre un solo punto comune.

TEOR. III. — *Se la* $\mathrm{M}_{(k)}$ *di una* Φ_p *è di dimensione* $(\mathrm{p}+1)\mathrm{k}+\mathrm{p}-\gamma$, $\gamma > 0$, *e se lo spazio ambiente è di dimensione* $(\mathrm{p}+1)\mathrm{k}+\mathrm{p}-\gamma+\mathrm{c}$, $\mathrm{c}>0$, *due* S_k *seganti generici fra loro incidenti determinano un* S_{2k} *avente con la* Φ_p *in comune una linea; per ogni* S_k *segante passano* $\infty^{\gamma-1}$ *di siffatti* S_{2k} *e per ogni punto di* $\mathrm{M}_{(k)}$ $\infty^{2\gamma-2}$.

Adoperando le notazioni della dimostrazione precedente, risulta dal t. II che nelle ipotesi poste ognuno degli S_{2k-x} contiene un'infinità ∞^y, $y>0$, di S_k seganti, cosicchè esso avrà in comune con Φ_p una certa Φ_r di dimensione r, $0<r<p$, ed è certo riempito dagli S_k seganti di questa Φ_r (t. I), perchè la dimensione di esso è minore di $2k+r$. Allora la $M_{(k)}$ è formata di spazi S_{2k-x} seganti di Φ_p ciascuno in una Φ_r. Ora affinchè la $M_{(k-1)}$ relativa ad una delle nostre Φ_r possa essere una varietà che non riempie il suo spazio ambiente S_{2k-x}, bisogna (t. I) che la dimensione di questo spazio sia maggiore di $2(k-1)+r$, cioè $2k-x>2(k-1)+r$, donde $-x>r-2$, il che avviene solo per $x=0$, $r=1$; quindi in ogni altro caso gli S_{k-1} seganti

---

infinità generica di S_{2k+1} passanti per questo S_{2k-x}, si vede che ciascuno di questi S_{2k+1} tagliando la Φ_p in una linea (almeno), ed essendo siffatte linee fra loro distinte (perchè se coincidessero in una, questa per esser comune a tutti quegli S_{2k+1} sarebbe in S_{2k-x}, e si avrebbe così che ognuno dei nostri S_{2k-x} conterrebbe infiniti S_k seganti di Φ_p, ciò ch'è escluso dall'ipotesi), così la Φ_p avrà in comune con quel S_{2k+2} almeno una superficie. Allora fissato un S_{2k+3} passante per uno dei nostri S_{2k-x}, ed in esso una semplice infinità generica di S_{2k+2} passanti per questo S_{2k-x}, abbiamo che ciascuno di questi S_{2k+2} tagliando Φ_p in una superficie (almeno), ed essendo siffatte superficie fra loro distinte (per la stessa ragione di sopra), la Φ_p avrà in comune con quel S_{2k+3} almeno una varietà a tre dimensioni. Così continuando si arriva a concludere che la Φ_p sarà contenuta in uno spazio di dimensione $2k+p$ (al più), e perciò (t. I) è $c=0$, cioè la $M_{(k)}$ riempie lo spazio ambiente.

di Φ_p riempiono i nostri S_{2k-x}, cioè la $M_{(k)}$ di Φ_p coincide con la $M_{(k-1)}$ di Φ_p e perciò questa, e quindi anche la $M_{(k)}$, riempie (n° 1, cor. t. II) lo spazio ambiente, contro la nostra ipotesi $c>0$. Così resta dimostrata la prima parte del teorema. Or dunque la $M_{(k)}$ risulta formata di spazi S_{2k} ognuno segante la Φ_p in una linea, e fissato uno di questi S_{2k}, gli ∞^{k+1} spazi S_k seganti della linea che esso ha in comune con la Φ_p saranno tutti e soli gli S_k seganti di Φ_p contenuti in esso (il quale ne viene riempito), cosicchè sarà $y = k + 1$, e allora gli S_{2k} determinati da un S_k' con gli S_k ad esso incidenti sono $\infty^{k+\gamma-(k+1)} = \infty^{\gamma-1}$, cioè per ognuno degli S_k seganti passano $\infty^{\gamma-1}$ dei nostri S_{2k}. Ora siccome per ognuno degli $\infty^{pk+p} S_k$ seganti passano $\infty^{\gamma-1} S_{2k}$, e poichè ognuno di questi contiene $\infty^{k+1} S_k$ seganti, così gli S_{2k} distinti sono $\infty^{(\gamma-1)+(pk+p)-(k+1)} = \infty^{(p-1)k+(p-2)+\gamma}$, quindi contengono in tutto $\infty^{[(p-1)k+(p-2)]+\gamma+2k} = \infty^{(p+1)k+(p+2)+\gamma}$ punti, e perciò per ogni punto di $M_{(k)}$ ne passano $\infty^{[(p+1)k+(p-2)+\gamma]-[(p+1)k+p-\gamma]} = \infty^{2\gamma-2}$, e così resta dimostrata anche la seconda parte del teorema.

3. Teor. I. — *Se le* $M_{(k)}$, $M_{(k+1)}$ *di una* Φ_p *sono rispettivamente di dimensione* $(p+1)k+p-\gamma$, $(p+1)(k+1)+p-\delta$, $\gamma \geq 0$, $\delta > 0$, *e non coincidono, deve essere* $\delta - \gamma \leq p$. *Nel caso di* $\delta - \gamma = p$ *la* Φ_p *appartiene ad uno spazio di dimensione* $(p+1)(k+1)-\gamma$, *cioè* $(p+1)k+p-\gamma+1$ *uguale alla dimensione che ha in tal caso la* $M_{(k+1)}$, *la quale riempie lo spazio ambiente.*

La prima parte del teorema risulta subito dal fatto che, essendo escluso dall'ipotesi che le $M_{(k)}$, $M_{(k+1)}$ coincidano, deve essere $(p+1)(k+1)+p-\delta > (p+1)k+p-\gamma$, donde appunto $\delta - \gamma \leq p$. Esaminiamo ora il caso di $\delta - \gamma = p$, nel quale è $(p+1)(k+1)+p-\delta = (p+1)k+p-\gamma+1$. Projettando da un punto generico A di Φ_p la $M_{(k)}$, la varietà che ne risulta, non coincidendo con la $M_{(k)}$ (altrimenti ne verrebbe che tutti gli S_{k+1} seganti di Φ_p apparterebbero alla $M_{(k)}$, con la quale adunque la $M_{(k+1)}$ coinciderebbe, il che è escluso dall'ipotesi), sarà di dimensione $(p+1)k+p-\gamma+1$, quindi, essendo formata di spazi S_{k+1} seganti, essa sarà la $M_{(k+1)}$. Dunque la $M_{(k+1)}$ è formata da rette uscenti da A (cioè da quelle che projettano da A i punti della $M_{(k)}$); ne segue che projettando la $M_{(k+1)}$ da A, cioè da un punto qualsiasi di Φ_p (con che da ogni S_{k+1} di essa

non passante per A si ottiene un S_{k+2} segante) si ottiene la $M_{(k+1)}$ stessa. Ciò viene a dire che ogni S_{k+2} segante di Φ_p appartiene alla $M_{(k+1)}$, cioè con questa coincide la $M_{(k+2)}$, e perciò (n° 1, cor. t. II) lo spazio ambiente è riempito dalla $M_{(k+1)}$ ed è perciò di dimensione $(p+1)k+p-\gamma+1$.

Cor. — *Se le* $M_{(k)}$, $M_{(k+1)}$ *di una* Φ_p *sono rispettivamente di dimensione* $(p+1)k+p-\gamma$, $(p+1)(k+1)+p-\delta$, $\gamma \geq 0$, $\delta > 0$, *e la* $M_{(k+1)}$ *non riempie lo spazio ambiente* [e perciò non coincide con la $M_{(k)}$, n° 1, cor. t. II], *dev'essere* $\delta-\gamma \leq p-1$.

Teor. II. — *Se le* $M_{(k)}$, $M_{(k+1)}$ *di una* Φ_p *sono di dimensione* $(p+1)k+p-\gamma$, $(p+1)(k+1)+p-\delta$, $\gamma \geq 0$, $\delta > 0$, *e la* $M_{(k+1)}$ *non riempie lo spazio ambiente* [e perciò (n° 1, cor. t. II) non coincide con la $M_{(k)}$], *i punti comuni alla* Φ_p *ed agli* ∞^{δ} S_{k+1} *seganti che passano per un punto generico di* $M_{(k+1)}$ *formano una varietà* $\Phi_{\delta-\gamma}$ *di dimensione* $\delta-\gamma$ *appartenente ad uno spazio di dimensione* $(\delta-\gamma+1)(k+1)-\gamma$, *il quale viene riempito dagli* S_{k+1} *seganti di* $\Phi_{\delta-\gamma}$, *mentre gli* S_k *seganti di questa formano una varietà di dimensione* $(\delta-\gamma+1)(k+1)-\gamma-1$. *Per* $k+2$ *punti di* Φ_p *passa una ed una sola* $\Phi_{\delta-\gamma}$.

Indichiamo con K la varietà formata dagli ∞^{δ} S_{k+1} seganti di Φ_p passanti per un punto Q della $M_{(k+1)}$. Intanto ripetendo la dimostrazione del t. I, n° 1, si ha subito che per un punto comune alla K ed alla Φ_p passano almeno ∞^{γ} degli S_{k+1} seganti che passano per Q, e perciò la varietà formata dai punti comuni a K e Φ_p sarà al massimo di dimensione $\delta-\gamma$; poniamo che sia una $\Phi_{\delta-\gamma-a}$ di dimensione $\delta-\gamma-a$, $a \geq 0$. Nella K fissiamo un punto R, e sia S'_{k+1} uno degli S_{k+1} che determinano la K e passanti per esso (tale spazio passa anche per Q). Per questo S'_{k+1} passano (n° 2, t. III) $\infty^{\delta-1}$ spazi $S_{2(k+1)}$ seganti la Φ_p ciascuno in una linea, e sono quelli determinati da S'_{k+1} con gli altri S_{k+1} passanti per Q. Preso uno di questi S_{2k+2}, esso ha in comune con la Φ_p una linea, i cui S_{k+1} seganti lo riempiono e per ogni punto di esso, e perciò anche per Q, passano ∞^1 di questi S_{k+1}, quindi siccome gli S_{k+1} seganti di Φ_p passanti per Q appartengono alla K, così detta linea appartiene alla $\Phi_{\delta-\gamma-a}$, e dei suoi S_{k+1} seganti ∞^1 passano per R; quindi in tutto passano per R ∞^{δ} S_{k+1} seganti di $\Phi_{\delta-\gamma-a}$ (∞^1 in ciascuno

degli $\infty^{\delta-1} S_{2k+2}$ anzidetti). Ed ora ciò che s'è detto dei punti R degli S_{k+1} passanti per Q può ripetersi per i punti degli S_{k+1} passanti per uno qualunque di detti punti R, e così via. Ciò prova che la varietà formata dagli S_{k+1} seganti di $\Phi_{\delta-\gamma-a}$ è di dimensione $(\delta-\gamma-a+1)(k+1)+(\delta-\gamma-a)-\delta$. Inoltre gli S_k seganti di $\Phi_{\delta-\gamma-a}$ formeranno una varietà di dimensione $(\delta-\gamma-a+1)k+(\delta-\gamma-a)-\gamma'(1)$, $\gamma' \leq \gamma$. Allora riferendoci al t. I di questo numero, dove è da porre nel nostro caso $\delta-\gamma-a$ in luogo di p, abbiamo che dev'essere $\delta-\gamma' \leq \delta-\gamma-a$, e perciò $a=0$, $\gamma'=\gamma$, e così resta dimostrato che la varietà in discorso è una $\Phi_{\delta-\gamma}$. Ora trovandoci qui nel caso di $\delta-\gamma=p$ del teorema citato $(\delta-\gamma=\delta-\gamma)$, la $\Phi_{\delta-\gamma}$ appartiene ad uno spazio di dimensione $(\delta-\gamma+1)(k+1)-\gamma$ che è riempito dagli S_{k+1} seganti di $\Phi_{\delta-\gamma}$, mentre la dimensione della varietà formata dagli S_k seganti di $\Phi_{\delta-\gamma}$ è [v. espressione (1)] $(\delta-\gamma+1)(k+1)-\gamma-1$. — Presi ora $k+2$ punti di Φ_p, per essi passa uno ed uno solo spazio a $k+1$ dimensioni, e gli S_{k+1} seganti ad esso incidenti determinano sulla Φ_p una $\Phi_{\delta-\gamma}$, e perciò i $k+2$ punti scelti appartengono ad una ed una sola $\Phi_{\delta-\gamma}$.

Cor. — *Se le* $M_{(k)}$, $M_{(k+1)}$, $M_{(k+2)}$ *d'una* Φ_p *sono di dimensione* $(p+1)k+p-\gamma$, $(p+1)(k+1)+p-\delta$, $(p+1)(k+2)+p-\eta$, $\gamma \geq 0$, $\delta > 0$, $\eta > 0$, *e non riempiono lo spazio ambiente, sarà* $\eta-\delta \geq \delta-\gamma+1$.

Difatti dalla dimostrazione del teorema precedente segue subito che una $\Phi_{\eta-\delta}$ contiene infinite $\Phi_{\delta-\gamma}$, donde risulta subito la tesi.

Teor. III. — *Se le* $M_{(s)}$, $M_{(s+1)}$ *di una* Φ_p *sono di dimensione* $(p+1)s+p-\lambda$, $(p+1)(s+1)+p-\mu$, $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$, *ed* $M_{(s+1)}$ *è l'ultima delle varietà composte di spazi seganti, che senza riempire lo spazio ambiente, siano di dimensione minore dell'ordinario, e se è* $(p+1)(s+2)+p-\nu$ *la dimensione della* $M_{(s+2)}$ *e perciò dello spazio ambiente, dev'essere* $\nu-\mu \leq p$, $\nu-\mu \geq \mu-\lambda+1$.

Considerando la varietà H formata dagli $\infty^{\nu} S_{s+2}$ seganti di Φ_p passanti per un punto generico Q di $M_{(s+2)}$, cioè dello spazio ambiente, sia A uno dei punti che uno, S'_{s+2}, di tali spazi ha in comune con la Φ_p; questo S'_{s+2} avrà sulla Φ_p altri $s+2$ punti che determinano un S'_{s+1} segante di Φ_p e che in-

contrerà la retta QA in un punto T della $M_{(s+1)}$; per questo punto T passano quindi ∞^{μ} S_{s+1} seganti di Φ_p, e gli ∞^{μ} S_{s+2} (seganti) determinati da essi e da A contengono la retta TA e perciò il punto Q. Ciò vuol dire che per un punto A comune alla H ed alla Φ_p passano almeno ∞^{μ} degli ∞^{ν} S_{s+2} seganti che passano per Q, e perciò la varietà formata dai punti comuni alla H ed alla Φ_p è al massimo di dimensione $\nu-\mu$. Siccome poi la QA non può avere in comune con la $M_{(s+1)}$ che un numero finito di punti come T (altrimenti essa e perciò Q, ossia ogni punto di $M_{(s+2)}$, apparterrebbe alla $M_{(s+1)}$ ciò che è escluso dall'ipotesi in virtù del cor. t. II, n° 1), così si vede che la suddetta dimensione non è inferiore a $\nu-\mu$. Ora essendo $\nu-\mu$ la dimensione della varietà che la H ha in comune con la Φ_p è chiaro che sarà $\nu-\mu\leq p$, e resta così dimostrata la prima parte del teorema. — Dalla dimostrazione ora fatta risulta che la $\Phi_{\nu-\mu}$ relativa al punto Q contiene la $\Phi_{\mu-\lambda}$ relativa al punto T e non coincide con questa, perchè questa non passa per il punto A, giacchè se un $S_{(s+1)}$ passante per T contenesse un A, esso conterrebbe la retta TA e quindi Q, ciò che abbiamo visto poco sopra non poter accadere. Dopo ciò risulta che dev' essere $\nu-\mu\geq\mu-\lambda+1$.

4. Teor. I. — *Se è* $\mathrm{M}_{(h)}$ *la prima delle varietà* $\mathrm{M}_{(1)}, \mathrm{M}_{(2)}, \ldots$ *di una* Φ_p *di dimensione minore dell'ordinario, senza riempire lo spazio ambiente, al più possono ancora essere tali le* $\mathrm{M}_{(h+1)}, \mathrm{M}_{(h+2}, \ldots, \mathrm{M}_{(h+p-2)}$.

Supponiamo che siano $M_{(h)}$, $M_{(h+q)}$ la prima e l'ultima delle varietà formate da spazi seganti di Φ_p, le quali senza riempire lo spazio ambiente, siano di dimensione minore dell'ordinario $(p+1)h+p-\alpha$, $(p+1)(h+1)+p-\alpha_1$, ..., $(p+1)(h+q)+p-\alpha_q$ (le α tutte maggiori di 0), e sia $(p+1)(h+q+1)+p-\alpha_{q+1}$ la dimensione della $M_{(h+q+1)}$, cioè dello spazio ambiente. Allora per i teoremi del n° 3 deve essere

$$\alpha_{q+1}-\alpha_q\leq p,\quad \alpha_q-\alpha_{q-1}+1\leq\alpha_{q+1}-\alpha_q,\ \ldots,$$
$$\alpha_1-\alpha+1\leq\alpha_2-\alpha_1,\quad \alpha+1\leq\alpha_1-\alpha,$$

dalle quali si ricava

$$\alpha_{q+1} - \alpha_q \leq p,\ \alpha_q - \alpha_{q-1} \leq p-1,\ \alpha_{q-1} - \alpha_{q-2} \leq p-2,\ \ldots,\ \alpha_3 - \alpha_2 \leq p-(q-2),$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 \leq p-(q-1),\ \alpha_1 - \alpha \leq p-q,\ \alpha \leq p-(q+1),$$

e dall'ultima di queste relazioni con la $\alpha \geq 1$, si ricava $q \leq p-2$.

Oss. — Quando una delle .....$\alpha_2 - \alpha_1$, $\alpha_1 - \alpha$, α acquista il suo valor massimo, lo stesso accade per ciascuna delle precedenti. Difatti se è p. e. $\alpha_r - \alpha_{r-1} = p - [q-(r-1)]$, dovendo essere $\alpha_{r+1} - \alpha_r \leq p-(q-r)$ e d'altronde $\alpha_{r+1} - \alpha_r \geq \alpha_r - \alpha_{r-1} + 1$, ossia nell'ipotesi fatta, $\alpha_{r+1} - \alpha_r \geq p-(q-r)$, sarà $\alpha_{r+1} - \alpha_r = p-(q-r)$. Più in generale se è $\alpha_r - \alpha_{r-1} = p-q+r-1-a$, dovendo essere $\alpha_{r+1} - \alpha_r \leq p-q+r$ e $\alpha_{r+1} - \alpha_r \geq \alpha_r - \alpha_{r-1} + 1$, cioè $\alpha_r - \alpha_{r-1} \geq p-q+r-a$, sarà la $\alpha_{r+1} - \alpha_r$ suscettibile degli $a+1$ valori $p-q+r$, $p-q+r-1$, ..., $p-q+r-a$.

Teor. II. — *Per ogni valore di* p *vi possono essere al più* $2^p - p - 1$ *tipi di varietà* Φ_p *che ammettono varietà di spazi seganti di dimensione minore dell'ordinario, senza riempire lo spazio ambiente, intendendo che due* Φ_p *appartengano a due tipi diversi quando diversificano per il valore di una almeno delle espressioni* $\alpha_{r+1} - \alpha_r$.

Attenendoci alle notazioni della dimostrazione del teorema precedente, prendiamo in primo luogo $\alpha = p-q-1$; allora, in virtù della prima parte dell'oss. precedente, si ha per ogni valore di q un unico tipo, quindi al variare di q da 0 a $p-2$ risulteranno $p-1$ tipi.

Prendiamo $\alpha = p-q-2$, dove allora q potrà variare solo da 0 a $p-3$, dovendo essere $\alpha \geq 1$. In tal caso (oss. parte seconda) la $\alpha_1 - \alpha$ è suscettibile dei due valori $p-q$ e $p-q-1$. Per $\alpha_1 - \alpha = p-q$ (oss. parte prima) è possibile un solo tipo (per ogni valore di q). Per $\alpha_1 - \alpha = p-q-1$ sarà $\alpha_2 - \alpha_1$ (oss. parte seconda) suscettibile dei due valori $p-q+1$ e $p-q$. Facendo $\alpha_2 - \alpha_1 = p-q+1$ è possibile un solo tipo, facendo invece $\alpha_2 - \alpha_1 = p-q$ sarà $\alpha_3 - \alpha_2$ suscettibile dei due valori

$p-q+2$, $p-q+1$. Così continuando troviamo la possibilità di $q+2$ tipi per ogni valore di q, e perciò in tutto

$$\sum_{q=0}^{q=p-3}(q+2)=\binom{p}{2}-1.$$

Prendiamo $\alpha=p-q-3$, dove allora q potrà variare da 0 a $p-4$. Sarà (oss. parte seconda) $\alpha_1-\alpha$ suscettibile dei tre valori $p-q$, $p-q-1$, $p-q-2$. Per $\alpha_1-\alpha=p-q$ e $\alpha_1-\alpha=p-q-1$ si otterranno, con lo stesso procedimento adoperato sopra, $q+2$ tipi; per $\alpha_1-\alpha=p-q-2$ sarà $\alpha_2-\alpha_1$ suscettibile dei tre valori $p-q+1$, $p-q$, $p-q-1$. Facendo $\alpha_2-\alpha_1=p-q+1$, $\alpha_2-\alpha_1=p-q$ si ottengono, allo stesso modo di sopra, $q+1$ tipi; per $\alpha_2-\alpha_1=p-q-1$ sarà $\alpha_3-\alpha_2$ suscettibile dei tre valori $p-q+2$, $p-q+1$, $p-q$. Così continuando si ottengono $(q+2)+(q+1)+\ldots+1=\binom{q+3}{2}$ tipi per ogni valore di q, e perciò facendo variare q da 0 a $p-4$ ne avremo

$$\sum_{q=0}^{q=p-4}\binom{q+3}{2}=\binom{p}{3}-1.$$

Proseguendo in tal modo si vede che per $\alpha=p-q-m$, nel qual caso q può variare da 0 a $p-m-1$, si ottengono $\binom{p}{m}-1$ tipi. Infine per $\alpha=p-q-(p-1)$, nel qual caso q può avere il solo valore 0, otterremo $p-1=\binom{p}{p-1}-1$ tipi. Dunque al più è in tutto possibile un numero di tipi dato da $\binom{p}{1}-1+\binom{p}{2}-1+\ldots+\binom{p}{p-1}-1=2^p-p-1$.

Oss. — Per $p=1$, $p=2$ si ha rispettivamente nessuno e un solo tipo. Per $p=3$ v'è la possibilità di quattro tipi al più, cioè, per $q=0$, $\alpha=2$, $\alpha_1-\alpha=3$; $\alpha=1$, $\alpha_1-\alpha=3$; $\alpha=1$, $\alpha_1-\alpha=2$, e per $q=1$, $\alpha=1$, $\alpha_1-\alpha=2$, $\alpha_2-\alpha_1=3$, e questi quattro tipi esistono realmente e di ciascuno di essi possiamo addurre esempi. Appartiene al primo tipo la Φ_3 di ordine $8h$ di S_{4h+2} rappresentata in S_3 dal sistema delle superficie del quarto ordine con $8-h$ punti fondamentali doppi (per $h=8$

v. la mia Nota: *Sulla rappresentazione delle forme* ecc., " Atti Acc. Torino ", 1902; per gli altri valori di h valgono considerazioni analoghe a quelle ivi svolte). Appartiene al quarto tipo la Φ_3 di S_9 rappresentata dalle quadriche di S_3. Le rette seganti di questa Φ_3 formano una varietà di dimensione 6 anzichè 7 ($\alpha = 1$) e i piani seganti formano una varietà di dimensione 8 anzichè 11, quindi $\alpha_1 = 3$ e perciò $\alpha_1 - \alpha = 2$, e infine gli spazi a 3 dimensioni seganti, che riempiono lo spazio ambiente, formano una varietà di dimensione 9 anzichè 15, quindi $\alpha_2 = 6$ e perciò $\alpha_2 - \alpha_1 = 3$. Projettando questa Φ_3 in un S_8 e in un S_7 abbiamo esempi del terzo e secondo tipo.

Teor. III. — *Se* $M_{(h)}$ *ed* $M_{(h+q)}$ *di una* Φ_p *sono la prima e l'ultima delle varietà* $M_{(1)}, M_{(2)}, \ldots$ *che, senza riempire lo spazio ambiente, siano di dimensione minore dell'ordinario, e se è* $\alpha = p - q - 1$ *(valor massimo di* α*), la* $M_{(h+r)}$, $0 \leq r \leq q$ *è di dimensione* $(p+1)h + (r+1)(q+1) - \binom{r}{2}$ *e lo spazio ambiente è di dimensione* $(p+1)h + \binom{q+3}{2} - 1$. *Lo spazio di una* $\Phi_{\alpha_r - \alpha_{r-1}}$ *è di dimensione* $(p - q + r)h + \binom{r+2}{2} - 1$.

Difatti nelle ipotesi fatte si ha (oss. t. I) $\alpha = p - q - 1$, $\alpha_1 - \alpha = p - q$, $\alpha_2 - \alpha_1 = p - q + 1, \ldots, \alpha_r - \alpha_{r-1} = p - q + r - 1, \ldots$, $\alpha_q - \alpha_{q-1} = p - 1$, $\alpha_{q+1} - \alpha_q = p$. Sommando le prime $r+1$ di queste eguaglianze membro a membro, si ha $\alpha_r = (r+1)(p-q) + \binom{r}{2} - 1$, e sommandole tutte, $\alpha_{q+1} = (q+2)(p-q) + \binom{q+1}{2} - 1$. Allora la $M_{(h+r)}$ è di dimensione $(p+1)(h+r) + p - \alpha_r = (p+1)h + (r+1)(q+1) - \binom{r}{2}$; in particolare la $M_{(h+q)}$ è di dimensione $(p+1)h + \binom{q+3}{2} - 2$ e la $M_{(h+q+1)}$, cioè lo spazio ambiente, è di dimensione $(p+1)(h+q+1) + p - \alpha_{q+1} = (p+1)h + \binom{q+3}{2} - 1$. La dimensione dello spazio che contiene una $\Phi_{\alpha_r - \alpha_{r-1}}$, cioè una $\Phi_{p-q+r-1}$ è (n° 3, t. II) $(\alpha_r - \alpha_{r-1} + 1)(h+r) - \alpha_{r-1} - 1 = (p - q + r)(h + r) - r(p - q) - \binom{r-1}{2} + 1 = (p - q + r)h + \binom{r+2}{2} - 1$.

COR. — *Nelle ipotesi del teorema precedente per* $q=0$ *la* $M_{(h)}$ *è la sola varietà di dimensione minore dell'ordinario che non riempie lo spazio ambiente e la sua dimensione è* $(p+1)h+1$ *e la* Φ_p *appartiene ad uno spazio di dimensione* $(p+1)h+2$; *per* $q=p-2$ *la* $M_{(h+r)}$, $0 \leq r \leq p-2$, *è di dimensione* $\left[\alpha_r = \binom{r+2}{2}\right]$, $(p+1)(h+r)+p-\binom{r+2}{2}$, *in particolare la* $M_{(h+p-2)}$ *è di dimensione* $(p+1)h+\binom{p+1}{2}-2$ *e la* Φ_p *appartiene ad uno spazio di dimensione* $(p+1)h+\binom{p+1}{2}-1$. *La dimensione dello spazio di una* $\Phi_{\alpha_r-\alpha_{r-1}}$, *cioè di una* Φ_{r+1} *è* $(r+2)h+\binom{r+2}{2}-1$.

5. TEOR. — *Nelle ipotesi dell'ultimo teorema se è* $q=p-2$ *la* Φ_p *è di ordine* $2^p h$ *ed è rappresentabile in* S_p *col sistema doppio di uno dei sistemi* (noti (*)) *di ordine* h, *grado* h *e dimensione* $h+p-1$.

Fissati $h+p-1$ punti di Φ_p, essi determinano una Φ_{p-1} appartenente ad uno spazio (cor. precedente) di dimensione $ph+\binom{p}{2}-1$. Consideriamo ora due delle nostre Φ_{p-1} che avranno in comune una varietà di dimensione $p-2$ che vien determinata da $h+p-2$ punti, e fissiamo un S_{h+p-3} segante di essa, il quale perciò appartiene allo spazio comune agli spazi delle due Φ_{p-1} considerate. Preso in questo S_{h+p-3} un punto P, per esso passano $\infty^{\alpha_{p-3}} = \infty^{\binom{p-1}{2}}$ (cor. prec.) S_{h+p-3} seganti di Φ_p, i quali (n° 3, t. II) appartengono a ciascuno degli spazi delle fissate Φ_{p-1} ed i punti che essi hanno sulla Φ_p e che costituiscono una delle nostre Φ_{p-2}, appartengono ad entrambe le Φ_{p-1}. Ciò fa vedere che due Φ_{p-1} hanno in comune una Φ_{p-2} ed i loro spazi lo spazio di questa che è di dimensione $(p-1)h+$ $+\binom{p-1}{2}-1$ (cor. prec.), quindi gli spazi delle due Φ_{p-1} sono contenuti in uno spazio di dimensione $(p+1)h+\binom{p+1}{2}-2$, cioè in un iperpiano dello spazio ambiente della Φ_p, e la varietà formata da due Φ_{p-1} viene così ad essere una sezione iperpiana

(*) Cfr. la mia Nota: *I sistemi lineari* ecc., " Giorn. di mat. ", 1900.

della Φ_p. Ora allo stesso modo si vedrà che una Φ_{p-2} ed una Φ_{p-1} (cioè tre Φ_{p-1}) hanno in comune una Φ_{p-3} ed i loro spazi lo spazio di questa, che è di dimensione $(p-2)h+\binom{p-2}{2}-1$ e perciò questi spazi appartengono ad uno di dimensione $(p+1)h+\binom{p+1}{2}-3$. E generalizzando avremo che una Φ_{p-s} ed una Φ_{p-1} (cioè $s+1$ Φ_{p-1}) hanno in comune una Φ_{p-s-1} ed i loro spazi lo spazio di questa, il quale è di dimensione $(p-s)h+\binom{p-s}{2}-1$, e perciò appartengono ad uno spazio di dimensione $(p+1)h+\binom{p+1}{2}-(s+1)$. Così per $s=p-2$ avremo che una Φ_2 ed una Φ_{p-1} (cioè $p-1$ Φ_{p-1}) hanno in comune una linea Φ_1 ed i loro spazi di dimensione $3h+2$ e $ph+\binom{p}{2}-1$ lo spazio di questa Φ_1 che è di dimensione $2h$ e perciò appartengono ad uno spazio di dimensione $(p+1)h+$ $+\binom{p+1}{2}-(p-1)$. Ora vediamo come si tagliano una Φ_1 ed una Φ_{p-1}. Considerando una Φ_2 passante per Φ_1, la Φ_{p-1} la taglia in una Φ_1' e allora dobbiamo trovare qual'è l'intersezione di Φ_1 e Φ_1'. Ma qui ci troviamo nel caso studiato nella Nota citata, perciò Φ_1, Φ_1' hanno in comune h punti e i loro S_{2h} l'S_{h-1} da quelli determinato. Si conclude che p Φ_{p-1} hanno in comune h punti, e siccome due Φ_{p-1} formano una sezione iperpiana, così si vede subito che l'ordine della Φ_p è $2^p h$.

Consideriamo ora l' $S_{ph+\binom{p}{2}-1}$ cui appartiene una delle nostre Φ_{p-1} e prendiamo sulla Φ_p altri $h-1$ punti generici B, i quali con quel S determinano un $S_{(p+1)h+\binom{p}{2}-2}$; allora fissato un $S_{(p+1)h+\binom{p}{2}-1}$ passante per questo, esso incontra ancora la Φ_p in un punto solo. Difatti condotti per l'$S_{(p+1)h+\binom{p}{2}-1}$ fissato $p-1$ iperpiani, questi tagliano la Φ_p, oltre che nella Φ_{p-1} anzidetta in $p-1$ altre Φ'_{p-1} che hanno in comune una Φ_1 (di ordine $2h$) che taglia la Φ_{p-1} in h punti e passa per gli $h-1$ punti B, quindi l'$S_{(p+1)h+\binom{p}{2}-1}$ anzidetto la taglia ancora in un punto solo, e perciò anche con la Φ_p ha ancora un solo punto comune; ne segue che gli $S_{(p+1)h+\binom{p}{2}-1}$ passanti per il nostro $S_{(p+1)h+\binom{p}{2}-1}$ projettano la Φ_p biunivocamente in un S_p. Allora

risulta subito che il sistema delle Φ_{p-1} viene projettato in un sistema di ordine h, grado h e dimensione $h+p-1$, e che il sistema doppio di questo è il sistema rappresentativo della Φ_p.

Oss. — Le projezioni della Φ_p considerate nel numero precedente in spazi di dimensione minore di $(p+1)h+\binom{p+1}{2}-1$ e maggiore di $(p+1)h+p-1$ (che è la dimensione della $M_{(h)}$) ci offrono altrettanti esempi di varietà delle specie di cui ci siamo occupati in questo scritto.

Torino, febbraio 1909.

Relazione sulla Memoria del Dott. Luigi Botti, intitolata: *Ricerche sperimentali sulle illusioni ottico-geometriche.*

La Memoria del Dott. Botti, che fu affidata al nostro esame, contiene anzitutto un cenno storico sull'argomento. Vengono poi esaminate le varie illusioni ottico-geometriche principali distinguendole in illusioni variabili d'estensione, variabili di direzione e costanti d'estensione e di direzione: fra le illusioni della seconda classe l'autore esamina particolarmente le figure dello Zöllner e del Poggendorff e ne presenta alcune variazioni.

Passa poi l'autore in rassegna le principali teorie relative a tali illusioni, e si trattiene specialmente su quelle che hanno per base la visione prospettica, l'irradiazione e il movimento oculare o spiegano i fatti con l'analogia che sussiste fra essi e altri fatti che avvengono nel campo tattile.

L'autore espone da ultimo le sue conclusioni e mostra che una teoria soddisfacente delle illusioni esaminate deve tener conto di tutte le condizioni psicofisiologiche che possono avere influenza sui fenomeni.

Noi crediamo che questo diligente ed esteso lavoro, che riguarda un argomento molto discusso ed importante, meriti di essere accolto nei volumi dell'Accademia.

A. Mosso,
A. Naccari, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 28 Febbraio 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti i Soci: Boselli Vice Presidente, Rossi, Carle, Graf, Allievo, Renier, Pizzi, Ruffini, Brondi e De Sanctis, Segretario. — Scusa l'assenza il Socio D'Ercole.

Si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente, 14 febbraio 1909.

Il Socio Boselli, Vice Presidente dell'Accademia, offre a nome della R. Deputazione sovra gli studi di storia patria per le antiche provincie e la Lombardia, i volumi IV ed VIII della pubblicazione curata dalla stessa Deputazione: *Le campagne di guerra in Piemonte (1703-1708) e l'assedio di Torino (1706)* (Torino, Bocca, 1908-1909), e ne illustra brevemente il contenuto.

Il Socio De Sanctis presenta per la inserzione negli *Atti* una nota del Dr. Luigi Foscolo Benedetto su *Lo storico Cratippo*.

LETTURE

Lo storico Cratippo.

Nota del Dr. LUIGI FOSCOLO BENEDETTO.

Il passo di Dionisio (*de Thuc. iud.*, c. 16), in cui si trova la più antica menzione di Cratippo, non è, a mio parere, nelle sue linee fondamentali così intricato ed oscuro come fu sinora mostrato nelle loro varie interpretazioni dai critici. Io credo che in sostanza esso significhi questo: “ Non tutto in Tucidide è ugualmente perfetto. Accanto alle parti bellissime in cui nulla v'è da aggiungere o da levare sono parti prive interamente di artistica forza, particolarmente nelle demegorie. Esse sono imbarazzanti e noiose; e tali difetti non sono sfuggiti a Cratippo; non sono sfuggiti, per testimonianza del medesimo Cratippo, a Tucidide stesso, che sopprimendole nel libro 8° abbandonava così decisamente la condotta sino allora seguita, che confrontati tra di loro il primo libro e l'ottavo appaiono diversissimi „. Che possano in tal maniera intendersi le parole del retore, mostrerò coll'indagine particolareggiata del passo; prima di tutto però è necessario distinguere nitidamente che cosa sia di Cratippo e che cosa sia di Dionisio, ricostruire cioè, come meglio è possibile, il vero frammento cratippiano.

Venuto ad indicare i più frequenti elementi di debolezza (1) ἐν ταῖς δημηγορίαις καὶ ἐν τοῖς διαλόγοις καὶ ἐν ταῖς ἄλλαις ῥητορείαις Dionisio continua: Ὧν προνοούμενος ἔοικεν ἀτελῆ τὴν ἱστορίαν καταλιπεῖν, ὡς καὶ Κράτιππος ὁ συνακμάσας αὐτῷ καὶ τὰ παραλειφθέντα ὑπ' αὐτοῦ συναγαγὼν γέγραφεν, οὐ μόνον ταῖς πρά-

(1) Dionysii Halicarnasei *Opuscula*, ed. Usener e Radermacher, vol. I, pag. 348.

ξεσιν αὐτὰς ἐμποδὼν γεγενῆσθαι λέγων ἀλλὰ καὶ τοῖς ἀκούουσιν ὀχληρὰς εἶναι· τοῦτό γέ τοι συνέντα αὐτὸν ἐν τοῖς τελευταίοις τῆς ἱστορίας φησὶ μηδεμίαν τάξαι ῥητορείαν... Vi è una prima parte che è sicuramente tolta da Cratippo, quella dipendente da Κράτιππος γέγραφε λέγων: essere le demegorie d' impedimento ai fatti ed essere le demegorie fastidiose agli ascoltatori. Àvvi poi il periodo dipendente da φησὶ (sogg. di φησί è pure K.) in cui si dice che avendo ciò compreso Tucidide omise le orazioni sul finire della sua storia. Queste tre idee, che qui sono slegate, dovevano formare presso Cratippo, e lo dimostra chiaramente il τοῦτό γέ τοι συνέντα, un raziocinio solo, di cui l'ultima proposizione era certo la principale. Cratippo, propostosi il problema non caro solo ai moderni dell'assenza delle demegorie nel lib. 8°, deve avere detto a un di presso che Tucidide omise le demegorie, avendo veduto che esse impedivano i fatti e non piacevano agli uditori. Qual'era il valore preciso di una frase siffatta? Non è a noi possibile determinarne con piena sicurezza il significato; con tutta sicurezza possiamo solo vedere in che bizzarro modo l'ha interpretata Dionisio. Cratippo aveva detto τὰς ῥητορείας ἐμποδὼν γεγενῆσθαι ταῖς πράξεσιν. Alludeva egli forse, dappoichè l'espressione che segue ci mostra ch'egli aveva presente al pensiero le pubbliche letture dell'opera tucididea, all'interruzione che le demegorie producono nel naturale evolversi del racconto: esse lasciano a tratti sospesa la curiosità di chi ascolta. Dionisio si rese tutt'altro conto della frase: essere d'impedimento alla narrazione dei fatti voleva dire non lasciarli procedere, non lasciarli cioè terminare; onde Dionisio scrisse che per colpa delle demegorie Tucidide non finì l'opera sua. Cratippo aveva detto τὰς ῥητορείας ὀχληρὰς εἶναι τοῖς ἀκούουσιν. Siffatta molestia poteva anche essere, nella mente di Cratippo, solo una conseguenza del fatto testè ricordato: l'impedito sviluppo dei fatti. Dionisio intese in tutt'altra maniera quelle parole; la molestia egli credette nata dall' insufficienza dell'arte e scrisse che le demegorie erano dal punto di vista artistico inferiori al resto dell'opera.

Resta così spiegato l'organismo del raziocinio fondamentale e si vedono così disposte con una specie di chiasmo le due idee: da una parte le demegorie essere di arte inferiore e per esse l'opera non essere giunta al suo termine, dall'altra le de-

megorie essere d'impedimento ai fatti ed essere noiose agli ascoltatori.

Resta così pure divisa la responsabilità delle varie asserzioni che il periodo contiene. Ne risulta in primo luogo quasi sicuramente che vada tutta attribuita a Dionisio la grottesca spiegazione dell'incompiutezza dell'opera tucididea: non aver Tucidide narrato tutti i fatti che avrebbe dovuto narrare essendosi troppo indugiato a comporre le sue demegorie (1); appar probabile in secondo luogo che in molta parte pure gli spetti lo sfavorevole giudizio sul valore artistico delle orazioni. In molta parte, dicemmo, e non interamente. Chè già la stessa maniera con cui Cratippo spiegava la mancanza delle orazioni nell'ultima parte della storia, poteva offrire un piccolo spunto a siffatto giudizio. È naturale che Cratippo non sarebbe arrivato all'idea che le demegorie fossero spiaciute al pubblico e che l'insuccesso da esse causato avesse indotto lo storico a tralasciarle, se avesse fatto di esse una grande stima. Egli doveva pensare di esse almeno quello che ne pensò Cicerone (or. 30): *ipsae illae contiones ita multas habent obscuras abditasque sententias vix ut intellegantur.* Non bisogna però esagerare; nè io parteciperò agli entusiasmi del Mess (2), che non cela la sua riconoscenza a Dionisio per averci conservata una critica così ardita sollevantesi sopra il lato retorico dell'opera tucididea;

---

(1) Il senso più ovvio di ῥητορειῶν προνοεῖσθαι mi par quello di spendere cura, fatica attorno alle orazioni. L'espressione ὧν προνοούμενος oltremodo imprecisa offrì appiglio ad opinioni diverse; è essa che rese complicato, io credo, il senso di tutto il passo. Fu creduta sinonima dell'espressione susseguente τοῦτό γέ τοι συνέντα, e l'idea contenuta nel periodo che con queste parole incomincia influì sul ragionamento dei critici. Qui Tucidide accortosi dei difetti delle orazioni le elimina dal lib. 8°; là Tucidide accortosi dell'*inconcinnitas* proveniente dalle orazioni al suo lavoro si decide a lasciarlo interrotto. È strano che una tale opinione abbia goduto un discreto favore. Quanto poi alle parole ἀτελῆ καταλιπεῖν, che con esse Dionisio alluda ad una interruzione nell'esposizione dei fatti e non ad una non raggiunta finitezza artistica, mi sembra certo; il Mess (*Die Hellenika von Oxyrhynchos*, in “ Rhein. Mus. „, 1908, pag. 389) sostenendo la sua interpretazione dimenticava, tra l'altro, che anche altrove Dionisio rimprovera a Tucidide di non aver saputo disporre le sue cose in guisa da giungere fino al termine della guerra peloponnesiaca (cf. Περὶ Θουκ., c. 12).

(2) Op. cit., pag. 389.

nè sopratutto ripeterò il giudizio dello Stahl (1), secondo cui la spiegazione cratippiana poteva essere soltanto " das Erzeugniss " einer einseitigen literarischen Betrachtung, die den Zusam- " menhang der Geschichtschreibung mit dem wirklichen Leben " nicht mehr verstand „; contro di lui osserverò che Cratippo dice aver Tucidide omesse le demegorie πολλῶν μὲν κατὰ τὴν Ἰωνίαν γενομένων, πολλῶν δ' ἐν ταῖς Ἀθήναις, ὅσα διὰ λόγων καὶ δημηγοριῶν ἐπράχθη. Non sfuggiva dunque a Cratippo l'importanza delle orazioni nella pubblica vita, la loro natura di fatti storici.

Dappoichè fu proposito di Cratippo scoprire le cause per cui il lib. 8° differiva profondamente dagli altri, il rapido confronto tra il lib. 1° e l'8°, che Dionisio ci riferisce, si trovava già assai probabilmente nell'opera sua: Εἴ γέ τοι τὴν πρώτην καὶ ὀγδόην βύβλον ἀντιπαρεξετάζοι τις ἀλλήλαις, οὔτε τῆς αὐτῆς ἂν προαιρέσεως δόξειεν ἀμφοτέρας ὑπάρχειν οὔτε τῆς αὐτῆς δυνάμεως. ἡ μὲν γὰρ ὀλίγα πράγματα καὶ μικρὰ περιέχουσα πληθύει τῶν ῥητορειῶν, ἡ δὲ περὶ πολλὰς καὶ μεγάλας συνταχθεῖσα πράξεις δημηγορικῶν σπανίζει λόγων (2).

Isolato dagli svolgimenti personali di Dionisio questo primo frammento dell'opera di Cratippo, rimangono da esaminarsi le osservazioni con cui Dionisio accompagna la sua citazione. Ardita era la soluzione data da Cratippo al problema e Dionisio riferendola, per ottener fede dai suoi uditori, doveva mostrare l'autorevolezza della sua fonte. Non si limitò quindi a menzionare Cratippo; aggiunse ch'egli era ὁ συνακμάσας αὐτῷ καὶ τὰ παραλειφθέντα ὑπ' αὐτοῦ συναγαγών. Entrambe queste espressioni diedero luogo a lunghi ed animati dibattiti; e questo è naturale: dare di esse un' interpretazione sicura vuol dire stabilire con sicurezza in quale età visse Cratippo e quali relazioni ebbe colla storia di Tucidide la sua storia.

Delle parole τὰ παραλειφθέντα ὑπ' αὐτοῦ συναγαγών parve alla maggior parte dei critici che il senso più spontaneo, più logico fosse quello di " continuatore „. Perchè poi Dionisio, che

(1) *Kratippos und Thukydides*, in " Philologus „, L (1891), pag. 30.

(2) Omise quindi a torto questo periodo il Müller in *Frag. Hist. Graec.*, II, 75.

dello stile semplice, nitido fu sostenitore in teoria e seguace per lo più nella pratica, sia ricorso ad una circonlocuzione così peregrina per esprimere un' idea così comune, essi non si son domandato. Già lo Schmid (1) osservò che, se con τὰ παραλειφθέντα qui s'intendono gli avvenimenti che Tucidide avrebbe ancora potuto narrare, quando avesse condotta la sua esposizione fino al 404, il vocabolo παραλείπω non è il vocabolo più opportuno; si aggiunga che anche συνάγω sarebbe lontano dal suo significato più proprio. È certamente grave che l'opinione universalmente accolta debba, per trovare una base, deviare entrambi i vocaboli ad un'accezione inusitata. Che se, come lo Schmid stesso ammette (2), non si può negare a συναγαγὼν il valore di συγγράψας quando Luc. *de hist. consc.*, 16, dice ὑπόμνημα γεγονότων γυμνὸν συναγαγών (3), meno valide sono le ragioni per mantenere a παραλειφθέντα il suo nuovo valore. Il legame che lo Stahl (4) stabilisce tra il τὰ παραλειφθέντα συναγαγεῖν e il precedente τὴν ἱστορίαν ἀτελῆ καταλιπεῖν non regge, non essendovi tra le due idee logica dipendenza; nè regge di più l'argomento che di preferenza è invocato, che cioè al cap. 19 dello stesso opuscolo Dionisio coll'espressione τὰ πολλὰ καὶ μεγάλα πράγματα παραλιπών allude precisamente ai fatti da Tucidide non narrati degli ultimi anni della guerra del Peloponneso. Tale deduzione del cap. 19 è del tutto arbitraria. Il cap. in questione può servire invece con altri passi di Dionisio di fondamento ad un'interpretazione diversa: che Cratippo non continuò nel senso comune della parola l'opera tucididea, ma scrisse di tale opera dei veri e propri paralipomeni. Non ricorre una volta sola in Dionisio l'idea che Tucidide omise nella sua storia cose che non avrebbe dovuto omettere. Nel cap. stesso che immediatamente sussegue a quello in cui è citato Cratippo, vien mosso al grande autore il rimprovero di aver tralasciate delle

---

(1) *Zur Entstehung u. Herausgabe d. thuk. Geschichtswerks*, in " Philologus ", XLIX (1890), pag. 25.

(2) *Noch einmal Kratippos*, " Philologus ", LII (1894), pag. 129-130.

(3) Sarebbe eccessivamente sottile chi osservasse che Dionisio può aver sostituito a συγγράψας συναγαγών per causa della parola che seguiva; si sarebbe infatti avuto συγγράψας γέγραφε.

(4) Op. cit., pag. 35.

demegorie necessarie, di averne riportate delle inutili (17, 21), τιθέναι μὲν ἃς οὐκ ἔδει, παραλιπεῖν δὲ ἃς ἔδει λέγεσθαι, e se ne adduce un esempio. Nel capitolo che precede a quello in cui è citato Cratippo, si rimprovera pure a Tucidide di avere tenuto un diverso contegno nel parlare dell'ambasceria ateniese a Sparta e dell'ambasceria spartana ad Atene (15, 5). Εἰ δ' ἀκριβῶς ἔδει ταῦτα εἰρῆσθαι διὰ τί παρέλιπε ῥᾳθύμως ἐκεῖνα ; E finalmente nel tanto citato c. 19 non si fa che ritornare sullo stesso pensiero: l'ineguale distribuzione, la scelta irragionevole del materiale storico; lo sviluppo eccessivo in certe parti, la povertà in certe altre; Ἔτι δὲ μᾶλλον ἴδοι τις ἂν τὸ περὶ τὰς ἐξεργασίας τοῦ συγγραφέως ἀνώμαλον ἐπιλογισάμενος, ὅτι πολλὰ καὶ μεγάλα πράγματα παραλιπὼν τὸ προοίμιον τῆς ἱστορίας μέχρι πεντακοσίων ἐκμηκύνει στίχων . . . Possiamo dunque già fin d'ora concludere che quanto son forti le ragioni per oppugnare la spiegazione comune, tanto son deboli quelle che si recano per puntellarla.

Assai più frequenti e più gravi discussioni suscitò l'altra espressione ὁ συνακμάσας αὐτῷ. Nè le dispute avevano solamente lo scopo di stabilire con precisione il significato che qui avesse il vocabolo (1); si discusse invece se si dovesse accettare o no la notizia del retore di Alicarnasso, intesa comunque si volesse la contemporaneità dei due storici. Molti prestarono fede a Dionisio e che Cratippo fosse contemporaneo di Tucidide ammisero l'Unger (2), lo Herbst (3), lo Schmid (4), il Friedrich (5) e tra i più recenti il Blass (6), il Bury (7), il Walker (8). il

---

(1) È chiaro che qui sono intempestivamente ricordati esempi dell'uso vago, bizzarro (io direi, senz'altro, erroneo) cui fu piegata la parola συνακμάζειν. Dato lo scopo per cui Dionisio fa la sua osservazione, Cratippo doveva essere stato, nel suo pensiero, veramente contemporaneo di Tucidide. Un senso troppo lato è impossibile.

(2) *Die Nachrichten über Thukydides*, in " Jahrb. f. klass. Ph. „, CXXXIII, (1886), pag. 103 e sgg.

(3) *Die Arbeiten über Thukydides*, in " Philologus „, XLIX (1890) pag. 171 e sgg.

(4) Op. cit.

(5) " Jahrb. f. klass. Ph. „, CLV (1897), pag. 177.

(6) Cfr. *The Oxyrhynchus Papyri*, vol. V (1908), pag. 139 e sgg.

(7) Ibid.

(8) " Classical Review „, XXII May, No 3 — Id., " Beiträge z. alten Geschichte „, VIII, pag. 356 e sgg.

Costanzi (1), il Mess (2), l'Underhill (3), per limitarmi ai più noti (4). Altri invece assai per tempo si ribellarono alla chiarissima affermazione del retore, ritenendo giustamente inconciliabile la contemporaneità di Cratippo e di Tucidide, colla spiegazione data dal primo all'assenza delle orazioni nel lib. 8°. Già il Müller (5) e lo Schöll (6) notavano che siffatta spiegazione avrebbe dovuto insegnare ben altro a Dionisio. Ma fu specialmente lo Stahl che con indagine acuta cercò di dimostrare " tales nugas magis decere umbratilem posterioris alicuius rhe-" toris doctrinam quam viri Thucydidis temporum periti pru-" dentiam „ (7).

Secondo lo Schöll (e collo Schöll consentirono molti), l'aver Cratippo continuato Tucidide, fece credere a Dionisio ch'egli fosse contemporaneo di Tucidide e dei fatti raccontati nella continuazione. Io credo invece che quel συνακμάσας, più che della fantasticità di un lettore disattento, sia frutto di un logicissimo raziocinio. Supponiamo che Dionisio leggesse la già citata frase τὰς ῥητορείας ὀχληρὰς εἶναι τοῖς ἀκούουσιν del tutto ignaro dell'età di Cratippo. Che cosa doveva suggerirgli una tale considerazione? Cratippo non avrebbe potuto parlare dell'impressione prodotta dall'opera tucididea sugli uditori, se non fosse stato un uditore anche lui, se non fosse stato per lo meno un contemporaneo. Il ragionamento correva abbastanza bene e a farlo parere più saldo potè aggiungersi la natura dell'opera cratippiana e la data dei fatti ivi narrati.

Ma se fu tale la conclusione che Dionisio dedusse dalle parole della sua fonte, non sarà tale quella che ne dovremo trarre noi addestrati ad una critica ben diversa. Troppe cose bisognerebbe ammettere che ripugnano alla realtà ed alla ragione. E innanzi tutto che nella coscienza critica di Tucidide

---

(1) " Studi storici per l'antichità classica „, I, pag. 253 e sgg.

(2) Op. cit.

(3) " Journal of Hellenic Studies „, XXVIII, pag. 227 e sgg.

(4) È incline W. Schmid (Christs *Gesch. d. griech. Litt.* München, 1908, pag. 492.

(5) Op. cit.

(6) " Hermes „, XIII (1878), pag. 446.

(7) *De Cratippo historico disputatio*, Münster, 1887, Ind. lect., pag. 4.

si sia operato d'un tratto, quasi al fine della sua grande opera, uno strano rivolgimento contrario al suo passato, contrario all'ambiente letterario in cui vive. Scomparirebbe all'improvviso l'uomo che aveva riconosciuto così chiaramente l'importanza che nella vita storica hanno i discorsi, e l'utilità che ne può trarre lo storico per colorire con vigorosa efficacia le opposte tendenze politiche, e che per tanto tempo s'era a questo principio mantenuto fedele: i critici ci vorrebbero far credere ch'egli assurto ad una più severa e più scientifica concezione della storia, respingesse allora sdegnoso l'ultimo adornamento che la scienza aveva domandato in prestito all'arte; questi stessi critici hanno, subito dopo, la mirabile disinvoltura di aggiungere che la nobile rinunzia è stata una concessione ai gusti del popolo e ci presentano il grande adoratore della rigida scienza in contraddizione con sè stesso per appagare la folla (1). Con queste fantasie, inaccettabili a priori, mal si conciliano i fatti. Quanto alla prima, basterà osservare che il 1° libro di Tucidide presenta segni sicuri d'essere stato compiuto dopo composti in buona parte gli altri; e ciò non sarebbe sfuggito ad un contemporaneo e ad un integratore, che avrebbe cercato perciò non nel lib. 8°, ma nel 1° le vere idee critiche di Tucidide intorno ai componimenti storici. Quanto alla seconda, è lecito credere che Tucidide, il quale afferma essere l'opera sua κτῆμα ἐς ἀεὶ μᾶλλον ἢ ἀγώνισμα ἐς τὸ παραχρῆμα ἀκούειν, non abbia mai sottoposta l'opera sua al giudizio di nessun uditorio. L'indole di essa non le permetteva d'essere letta pubblicamente.

Si può d'altra parte spiegare l'ὀχληρὰς ἀκούουσιν di Cratippo anche senza collocarlo nei tempi in cui l'opera di Tucidide venne alla luce. Basta supporre ch'egli sia scrittore tardo di età e anche, bisogna pure concederlo, un po' tardo d'ingegno. Desideroso di risolvere il suo problema egli ricorse a colui che gli pareva meglio informato, a Tucidide, alle pagine ov'egli parla degli intenti, dei metodi suoi generali e dovettero sembrargli una rivelazione infallibile le famose parole (I, 22): καὶ ἐς μὲν ἀκρόασιν τὸ μὴ μυθῶδες αὐτῶν ἀτερπέστερον φανεῖται... κτῆμα τε ἐς ἀεὶ μᾶλλον ἢ ἀγώνισμα ἐς τὸ παραχρῆμα ἀκούειν ξύγκειται. Questo riferimento ad un pubblico di ascoltatori, questo

(1) Vedi specialmente lo Schmid, " Phil. „, 52 (1894), pag. 119 e sgg.

insistere sullo scarso effetto che l'opera avrebbe prodotto su di essi dovette sembrare a Cratippo, come sembrò a critici moderni, una considerazione *post eventum*. Tucidide aveva letto l'opera sua in pubblico e non aveva incontrato. Perchè? Cratippo non aveva forse per le demegorie un'ammirazione eccessiva; una punta satirica antideclamatoria, antioratoria era facilmente scorta nel passo citato. Era molto agevole l'associazione. Cratippo concluse che la storia di Tucidide non era piaciuta per colpa delle orazioni. Non restava che applicare siffatta conclusione al problema (1).

Cratippo non fu contemporaneo di Tucidide; egli visse lontano nel tempo dal grande storico di cui più non capiva la fisionomia artistica, di cui non conosceva esattamente (strano per chi compie l'opera d'un contemporaneo) le vicende esteriori della vita. Conoscendole egli avrebbe trovato del problema una soluzione più semplice, quella che i moderni, meglio di lui informati sulla biografia dello storico, hanno in generale accolta per vera: essere l'8° lib. privo di demegorie, solo perchè la morte dell'autore lo condannò a rimanere incompiuto (2).

Delle quattro testimonianze relative a Cratippo, viene seconda per tempo, non seconda per importanza, quella di Plutarco (*de gloria Ath.*, c. I) (3). La critica tendenziosa travisò la natura vera di questo capitolo semplicissimo; si cercò di mostrare ch'esso non è intimamente connesso col resto della piccola trattazione, ma costituisce una parentesi, un tutto a parte. È necessario dire subito che ciò non è vero. Tema del discorso

---

(1) Invito ancora una volta a non esagerare l'odio di Cratippo per le demegorie, su cui tanto insisterono, non senza un particolare lor fine, i critici più recenti. Si noti che, data la nostra interpretazione, Cratippo può anche avere creduto che le demegorie non piacessero, perchè arrestavano il naturale svolgimento dei fatti e scemavano in tal modo l'interesse dell'uditorio.

(2) Lo Schmid, " Phil. „, 52, pag. 118, n.) osservò che la forma ἐν τοῖς τελευταίοις rileva in Cratippo un prealessandrino ancora ignaro della distinzione della storia in libri. Cade tale obbiezione se si ammette per vero quello che abbiamo osservato poc'anzi: che il confronto tra il 1° libro e l'8° sia dello stesso Cratippo.

(3) Plutarchi, *Moralia*, ed. Bernardakis, II, 455.

plutarchiano è Πότερον Ἀθηναῖοι κατὰ πόλεμον ἢ κατὰ σοφίαν ἐνδοξότεροι. La lacuna, che va purtroppo notata al principio del libro, non ci vieta di vedere che a Plutarco, scrittore di storia, la prima forma di σοφία che s'è presentata al pensiero è la storia, la cui idea era del resto naturalmente richiamata da quella di πόλεμος. Egli sostiene che la gloria dell'uomo operatore dei fatti, dev'essere ritenuta maggiore della gloria dell'uomo che racconta quei fatti; che l'uomo di guerra apre la via allo scrittore di storie e ciò che v'è di grande e di bello nella storia, è un riflesso della bellezza e della grandezza dell'azione. Mostra con esempi la verità del suo asserto. Che cosa sarebbero stati senza le gloriose imprese degli uomini di azione Tucidide, Cratippo e va dicendo? Accanto a nomi di politici e di soldati son posti nomi di storici: gli uni e gli altri sono naturalmente ateniesi. Nessun storico, anche grande, non ateniese è citato e sarebbe perciò follia reputare che ateniese non fosse Cratippo. Lo sostiene infondatamente, accecato dal troppo amore per la sua tesi, lo Stahl (1). Egli osserva che più in là (c. 4) Plutarco per mostrare che ἡ ποιητικὴ χάριν ἔσχε καὶ τιμὴν τῷ τοῖς πεπραγμένοις ἐοικότα λέγειν, ricorda, oltre Menandro, Pindaro e Corinna. Ciò è vero; ma là si tratta di una idea generale, di una parentesi che non ha stretto rapporto col tema fondamentale dell'opera; qui, benchè la cosa sia enunciata in generale (ἂν γὰρ ἀνέλῃς τοὺς πράττοντας, οὐχ ἕξεις τοὺς γράφοντας) si ha di mira direttamente la istoriografia ateniese come prima forma di σοφία, tant'è vero che il 2° cap. incomincia: πολλῶν μὲν καὶ ἄλλων ἡ πόλις ἤδη μήτηρ καὶ τροφὸς εὐμενὴς τεχνῶν γέγονε. Nè si può credere che qui, anzichè storici ateniesi, sieno ricordati storici che si occuparono di Atene: non mancherebbe il nome di Erodoto o di Eforo o di altri parecchi. Ateniese fu dunque Cratippo e va respinta l'ipotesi del Müller ch'egli fosse nativo di Lesbo (2).

Il passo plutarchiano ci è particolarmente utile per un altro rispetto: esso ci porge nuovi preziosi elementi per stabilire che cosa veramente fosse l'opera di Cratippo. Prima Plutarco ci parla di Tucidide: Ἄνελε τὴν Περικλέους πολιτείαν καὶ τὰ ναύ-

---

(1) *De Cratippo*, pag. 10 e “ Philol. „, L (1891), pag. 40.
(2) Op, cit., II, 75.

μαχα πρὸς Ῥίῳ Φορμίωνος τρόπαια καὶ τὰς περὶ Κύθηρα καὶ Μέγαρα καὶ Κόρινθον ἀνδραγαθίας Νικίου καὶ τὴν Δημοσθένους Πύλον καὶ τοὺς Κλέωνος τετρακοσίους αἰχμαλώτους καὶ Τολμίδαν Πελοπόννησον περιπλέοντα καὶ Μυρωνίδην νικῶντα Βοιωτοὺς ἐν Οἰνοφύτοις καὶ Θουκυδίδης σοι διαγέγραπται. Quindi passa a Cratippo: Ἄνελε τὰ περὶ Ἑλλήσποντον Ἀλκιβιάδου νεανιεύματα καὶ τὰ πρὸς Λέσβον Θρασύλλου καὶ τὴν ὑπὸ Θηραμένους τῆς ὀλιγαρχίας κατάλυσιν καὶ Θρασύβουλον καὶ Ἀρχῖνον καὶ τοὺς ἀπὸ Φυλῆς ἑβδομήκοντα κατὰ τῆς Σπαρτιατῶν ἡγεμονίας ἀνισταμένους καὶ Κόνωνα πάλιν ἐμβιβάζοντα τὰς Ἀθήνας εἰς τὴν θάλατταν, καὶ Κράτιππος ἀνῄρηται. Questo passo fu l'unico fondamento su cui si basò il Müller per sostenere quello che noi credemmo di poter dedurre direttamente dal senso letterale della dichiarazione di Dionisio: τὰ παραλειφθέντα συναγαγών. Ne concludeva egli che Cratippo *non solum praetermissa a Thucydide supplevit, sed opus eius etiam continuavit.* E realmente se tutti, in genere, gli avvenimenti qui ricordati ci portano al periodo che immediatamente successe a quello narrato da Tucidide e ci mostrano che Cratippo si spinse colle sue storie almeno fino alla battaglia di Cnido, uno ve n'è donde appare che Cratippo si occupò pure dell'età che già Tucidide aveva descritta. Non parlo del τὰ πρὸς Λέσβον Θρασύλλου: giustamente l'Unger (1) obbiettò al Müller che si può anche vedervi un'allusione ai fatti del 410. Alludo invece al τὴν ὑπὸ Θηραμένους τῆς ὀλιγαρχίας κατάλυσιν. Perchè queste parole abbiano un significato accettabile, esse devono riferirsi all'abbattimento dell'oligarchia dei quattrocento, cui certo Teramene ebbe non piccola parte. Ci troviamo quindi dinanzi ad un argomento già da Tucidide svolto. Quel che dicemmo sul valore di παραλείπω e di συνάγω rende improbabile l'opinione che si tratti di una pura parentesi.

Di più non ci è dato poter ricavare dal passo in questione e mi paiono prive di fondamento le deduzioni che altri s'immaginò di tirarne. Vi furono cercate nuove ragioni per l'antichità di Cratippo. Si notò che, astraendo da Cratippo, tutti gli storici menzionati, Tucidide, Senofonte, Clitodemo, Diillo, Filocoro, Filarco, sono evidentemente in serie cronologica; onde anche

---

(1) Op. cit., pag. 107.

Cratippo va collocato cronologicamente tra Tucidide e Senofonte. Si fece anche di più; si sostenne che tutti i vari storici testè nominati erano stati sapientemente divisi da Plutarco in gruppi diversi; in tre secondo l'Unger e lo Stahl, in due secondo lo Herbst. Agli storici che narrarono avvenimenti in mezzo a cui vissero o come protagonisti (Senofonte) o come semplici contemporanei (Tucidide e Cratippo), Plutarco avrebbe contrapposti gli ἀλλοτρίων ἔργων ὑποκριταί, i ricostruttori delle età passate, gli storici della μνήμη. Tra questi non è ricordato Cratippo. A queste varie ubbie si può opporre una ragione assai grave: il testo di Plutarco. A chi lo esamini senza idee preconcette, apparirà uno solo il criterio che regola l'associazione delle diverse persone: la loro ateniesità. È un criterio necessario, portato dall'indole generale dell'opera. Il criterio cronologico non vi è necessario; base frequentissima nelle associazioni involontarie, si capisce perfettamente che qui pure ci sia, inconscio e conseguentemente incostante; ed è arbitrario dedurre dal fatto che Clitodemo, Diillo, Filocoro, Filarco sono cronologicamente disposti, la conseguenza che anche Tucidide, Cratippo e Senofonte lo sieno (1). Sarebbe come se qualcuno, notando che in genere i fatti registrati sotto il nome di Cratippo sono in serie cronologica, ed ignorando la cronologia dei fatti registrati sotto il nome di Tucidide, ne deducesse che anche questi ultimi devono essere in serie cronologica; la vittoria di Mironide ad Enofita verrebbe così ad essere posteriore alle imprese di Demostene e di Cleone.

Plutarco getta uno sguardo sul campo dell'istoriografia ateniese: cita fatti e nomi come la fantasia gli suggerisce. Dopo Tucidide cita Cratippo? È più che naturale: ha dato un brevissimo estratto dell'opera tucididea e l'opera cratippiana ne è l'immediata prosecuzione. Dopo quello di Cratippo altri nomi si presentano alla sua mente: tutti provano la verità da lui enunciata, che senza uomini di guerra storico non ci può essere. Un'unica eccezione lo arresta un momento: Senofonte. Egli è

---

(1) Bisognerebbe del resto anche provare che Clidemo, secondo Pausania, X, 15, 5, ὁπόσοι τὰ Ἀθηναίων ἐπιχώρια ἔγραψαν ὁ ἀρχαιότατος, sia più recente di Senofonte.

stato ad un tempo l'operatore e il narratore delle sue imprese, autore ed attore ad un tempo. Ma questa sola eccezione non fa sì che gli storici citati non costituiscano una sola regola generale e si debbano dividere in serie. Si stupirono i critici di non vedere, tra gli ἀλλοτρίων ἔργων ὑποκριταί contrapposti a Senofonte, insieme con Clitodemo, Diillo, Filocoro, Filarco ricordato anche Cratippo. Fu stupore inopportuno. Cratippo non è più menzionato, solo perchè è già stato menzionato prima.

E inutilmente del pari si considerò la citazione plutarchiana, come prova della rinomanza onde Cratippo godette. Dice il Costanzi: " Era Cratippo abbastanza noto, se Plutarco lo cita come autore il cui nome era strettamente congiunto con quello di Tucidide „. E l'essere stato citato " tra i due più grandi storici del tempo „ parve significativo anche al Walker e all'Underhill. Non bisogna esagerare. Si dimentica troppo presto che qui Plutarco si restrinse alla cerchia dell'istoriografia ateniese e che la vicinanza dei due nomi può essere una semplice conseguenza della vicinanza delle materie. Molto si disse e si può dire sull'oscurità di Cratippo; ricorderò solo che Dionisio di Alicarnasso, pur citandolo a proposito di Tucidide, non ha per lui alcun posto, nel suo scritto a Cn. Pompeo, accanto ai grandi storici Erodoto, Tucidide, Senofonte, Filisto; nella stessa citazione da noi esaminata è degno di nota ch'egli reputi opportuno specificarne l'età. Nè del resto deve troppo stupire il vedere l'oscuro Cratippo accanto al grande Tucidide; anche l'oscuro Clidemo è accanto al grande Senofonte.

Le nostre precedenti considerazioni intorno all'età di Cratippo trovano la loro piena conferma in un passo della vita di Tucidide di Marcellino (c. 46-51). Vi si discute sul luogo della morte di Tucidide e due diverse opinioni sono poste di fronte: che Tucidide sia morto in Tracia e che Tucidide sia morto in Atene. I partigiani della prima idea si basano sul fatto che la tomba di Tucidide in Atene porta l'ἰκρίον, segno solito del cenotafio; Didimo, partigiano della seconda, si basa sul fatto che ci fu un'amnistia dopo la quale lo storico dovette ritornare ad Atene: Δίδυμος δ' ἐν Ἀθήναις ἀπὸ τῆς φυγῆς ἐλθόντα βιαίῳ θανάτῳ· τοῦτο δέ φησι Ζώπυρον ἱστορεῖν· τοὺς γὰρ Ἀθηναίους κάθοδον δεδωκέναι τοῖς φυγάσι πλὴν τῶν Πεισιστρατιδῶν μετὰ

τὴν ἧτταν τὴν ἐν Σικελίᾳ· ἥκοντα οὖν αὐτὸν ἀποθανεῖν βίᾳ, καὶ τεθῆναι ἐν τοῖς Κιμωνίοις μνήμασι· καὶ καταγιγνώσκειν εὐήθειαν ἔφη τῶν νομιζόντων αὐτὸν ἐκτὸς μὲν τετελευτηκέναι, ἐπὶ γῆς δὲ τῆς Ἀττικῆς τεθάφθαι· ἢ γὰρ οὐκ ἂν ἐτέθη ἐν τοῖς πατρῴοις μνήμασιν ἢ κλέβδην τεθεὶς οὐκ ἂν ἔτυχεν οὔτε στήλης οὔτε ἐπιγράμματος, ἢ τῷ τάφῳ προσκειμένη τοῦ συγγραφέως μηνύει τοὔνομα. ἀλλὰ δῆλον ὅτι κάθοδος ἐδόθη τοῖς φεύγουσιν, ὡς καὶ Φιλόχορος λέγει καὶ Δημήτριος ἐν τοῖς ἄρχουσιν. ἐγὼ δὲ Ζώπυρον ληρεῖν νομίζω λέγοντα τοῦτον ἐν Θρᾴκῃ τετελευτηκέναι, κἂν ἀληθεύειν νομίζῃ Κράτιππος αὐτόν. τὸ δ᾽ ἐν Ἰταλίᾳ Τίμαιον αὐτὸν καὶ ἄλλους λέγειν κεῖσθαι μὴ καὶ σφόδρα καταγέλαστον ᾖ. È un passo molto controverso, che contiene una contraddizione assai grave. Le più varie congetture furono messe innanzi dai critici. Per potere dare di esse un sicuro giudizio, bisogna prima stabilire qual parte nel passo in questione spetti a Didimo e quale a Marcellino.

L'opinione ch'ebbe maggior fortuna è che Marcellino, esposte le due diverse teorie sul luogo della morte di Tucidide, prenda da ultimo posizione rispetto ad esse. L'ἐγὼ δέ segnerebbe in modo visibile l'entrata dell'autore in scena (1). Ma sorgono subito difficoltà numerose. Adottando il testo così come ci fu conservato, Marcellino accoglierebbe le ragioni di Didimo, chiamerebbe ridicola l'idea di Zopiro secondo cui Tucidide morì in Tracia e questo sarebbe in contrasto troppo stridente coll'affer-

(1) Mettendoci per un momento dal punto di vista di quei critici, di cui riassumiamo le congetture, osserveremo che potrebbe già con ἀλλὰ δῆλον incominciare il discorso di Marcellino. Le parole possono, è vero, acconciamente riferirsi a Didimo. Questi deride l'insipienza di coloro i quali adottando una via di mezzo credono che Tucidide sia morto fuori di Atene, ma sia stato sepolto in Atene; non sarebbe infatti stato sepolto nei monumenti patrii o vi sarebbe stato sepolto nascostamente e in tal caso non ci sarebbe la stela, nè l'epigrafe ricorderebbe il suo nome. Risulta chiaramente da questo ch'egli pensava che i suoi avversari nulla sapessero dell'amnistia e ripugnassero per siffatta ignoranza all'idea di una morte di Tuc. in patria; poteva pertanto naturalmente concludere: " ma d'altra parte è noto che Tucidide potè tornare in patria; anche Filocoro e Demetrio lo attestano ". — Le parole possono non meno acconciamente riferirsi a Marcellino. Questi non accetta le conclusioni di Didimo; non disconosce tuttavia la giustezza della ragione da lui addotta: " Ma è chiaro (egli direbbe) che l'amnistia ci fu; non è Didimo l'unico a dirlo; ma ciò non toglie che Didimo sia morto in Tracia ". Vale a dire Tucidide, ritornato dopo l'amnistia in Atene, ne sarebbe ripartito per recarsi nuovamente in Tracia.

mazione esplicita che Marcellino fa poco dopo (c. 71): ἀπέθανε δὲ μετὰ τὸν πόλεμον τὸν Πελοποννησιακὸν ἐν τῇ Θρᾴκῃ. Si può è vero ricorrere all'emendamento di Θρᾴκῃ in Ἀττικῇ togliendo così la contraddizione tra le due frasi che a così poca distanza si seguono, τοῦτο δέ φησι Ζώπυρον ἱστορεῖν e Ζώπυρον λέγοντα τοῦτον ἐν Θρᾴκῃ τετελευτηκέναι. Ma resta pur sempre inaspettato il giudizio di Marcellino che verrebbe così ad accettare l'opinione combattuta da Didimo, senza opporre a Didimo un solo argomento; inaspettata riesce la sua cultura storica estesa a Demetrio, Filocoro, Zopiro, Cratippo, Timeo, nonchè la baldanza e la sicurezza con cui ne respinge le idee.

Mi pare perciò che si possa ritornare con vantaggio ad una ipotesi, cui la critica non fece, fin dal suo primo apparire, troppo buon viso: che cioè il passo sia tutto quanto di Didimo. Sostenne questo lo Stahl, specialmente insistendo sull'erudizione ampia, sicura di cui il passo fa prova, meglio adatta certo a Didimo che a Marcellino (*De Crat.*, pag. 6): *Nam non ipsum Marcellinum ex sua rerum et scriptorum notitia Philochori Demetrii Zopyri Cratippi Timaei testimonia citare satis manifestum est* (1). Ma non mancano altre ragioni. Marcellino, citando i due opposti pareri, dice Οἱ μὲν... Δίδυμος δέ; e ciò perchè Didimo solo gli stava sott'occhio. La frase che s'inizia con ἐγὼ δέ, riprodotta nella sua forma diretta dal compilatore frettoloso e disattento, o passata nel testo dopo essere stata una citazione marginale, ha tutta l'impronta della decisa sprezzante sicurezza di Didimo: il ληρεῖν deve accoppiarsi col precedente εὐήθειαν. E resta così inalterata la seconda citazione di Zopiro, in cui, data la chiarezza e l'evidenza dell'espressione, a stento si riconosce un errore. Errata è invece la prima, il τοῦτο δέ φησιν ἱστορεῖν. Non mi fermo ad esaminare le molteplici proposte di correzione e non ne farò io di nuove. Lo sbaglio può essere dovuto semplicemente alla fretta del sunteggiare; delle tre idee, di cui è fatto

(1) Non conobbe assai probabilmente Marcellino Cratippo. L'averlo dimenticato là ove menziona i continuatori di Tucidide non è senza significato; se ne avesse conosciuto la bizzarra teoria sul lib. 8° ne avrebbe verisimilmente fatto cenno nel passo ove riferisce intorno al lib. 8° alcune erronee opinioni.

mallevadore: il ritorno dall'esilio, la morte violenta, la morte in Atene, egli forse aveva soltanto affermate le prime due.

Tutto ciò, del resto, è per noi di non capitale importanza. L'essenziale è che Cratippo cade tra Zopiro e Didimo; ad ogni modo dopo Zopiro; chè non mi pare necessaria e quindi non accettabile la congettura già riferita dal Müller, ripetuta dall'Unger ed ora ripresentata senza alcuna novità d'indagini dal Costanzi che in Didimo si parlasse non di adesione, ma di semplice consonanza. Se anche così fosse nulla ne guadagnerebbe la causa dell'antichità di Cratippo. Cratippo non può essere contemporaneo di Tucidide, poichè non poteva un contemporaneo discutere sul luogo della sua morte, specialmente poi quando questo contemporaneo era un continuatore e, come vedemmo, un ateniese. Nè potè, per la ragione stessa, vivere ai tempi di Tucidide, Zopiro. Cade irrevocabilmente l'ipotesi messa innanzi dallo Herbst (1), tendente ad identificare il nostro Zopiro coll'omonimo contemporaneo di Socrate e resta sempre più salda l'opinione che si tratti di Zopiro amico di Timone di Fliunte. Cratippo, posteriore, spetterebbe al 3° o 2° sec. av. C. (2).

In uno scolio alla vita di Andocide dello Pseudo-Plutarco (Plut., *Moralia*, p. 834, D, ed. Bernardakis, V, 151) noi abbiamo un ultimo tratto che rende, quanto all'età di Cratippo, la nostra persuasione più piena. Lo scolio è monco; ma ci dice tuttavia chiaramente che secondo Cratippo i Corinzi νύκτωρ τοὺς περὶ τὴν ἀγορὰν Ἑρμᾶς περιέκοψαν. Chi con noi veda in Cratippo uno scrittore tardo può rispondere facilmente al quesito che naturalmente si presenta a ciascuno: perchè tale versione sia ignota agli scrittori contemporanei del fatto. Il non trovarsene traccia in Tucidide e presso gli oratori attici non si spiega interamente osservando che tale opinione non abbia trovato presso di essi favore, poichè non a tutte le opinioni di cui presero nota essi accordarono il loro favore. Non ne parlano perchè è di nascita posteriore. Ad un solo è nota, oltre a Cratippo: a Filocoro (fr. 110, Sch. Aristoph. Lys., 1094). Se tra i due sia stato un rap-

---

(1) Op. cit., pag. 174.

(2) Vedi Susemihl, *Gesch. d. al. Litt.*, II, 468.

porto diretto non sappiamo. I ragionamenti che in vario senso furono fatti offrono, a mio parere, troppo facile il fianco alla critica.

Non è il caso di domandarci ancora a proposito di che Cratippo abbia potuto parlare della rottura delle Erme. Già rispondemmo, quando dicemmo l'opinione nostra sul τὰ παραλειφθέντα συναγαγών.

Non molte sono adunque le conclusioni. Noi abbiamo cercato di sceverare e di comprendere quel po' che a noi è giunto dalle storie perdute di Cratippo: gli scarsi frammenti qualcosa tuttavia ci dissero intorno all'età di Cratippo, intorno alle sue relazioni con Tucidide. Vedemmo in contrasto coi frammenti cratippiani un'esplicita dichiarazione di Dionisio e una presunta dichiarazione implicita di Plutarco. Mostrammo come Dionisio sia potuto cadere in errore e a proposito di Plutarco mostrammo che l'implicito giudizio non c'era. Altro ci disse implicitamente Plutarco intorno a Cratippo: la sua patria.

Di queste poche notizie deve restar paga la critica prudente, nemica delle avventure. Ma tale non fu certo la critica che si occupò di Cratippo. I più pazzi tentativi di identificazione furono fatti. Non merita nemmeno di essere discusso quello del Leutsch, che vede in Cratippo nientemeno che Senofonte. Cratippo sarebbe per le Elleniche quello che è Temistogene Siracusio per l'Anabasi (1). Non merita più di essere discussa, che già troppo lo fu, l'ipotesi dello Stahl, che cerca di fare di Cratippo storico e di Cratippo filosofo una persona sola (2). Esso oltre ad andare incontro a difficoltà molto gravi, ha il torto di basarsi sopra un irragionevole mutamento del testo. Nell'espressione ὁ συνακμάσας αὐτῷ l'αὐτῷ si riferisce evidentemente a Tucidide; lo prova tra l'altro l'ὑπ' αὐτοῦ che segue (3). Orbene lo Stahl sostituisce συνακμάσας σοὶ αὐτῷ, ove il σοὶ si riferirebbe ad Elio Tuberone, il destinatario dell'operetta. Giuste sono le obbiezioni mossegli dallo Herbst una volta e due volte dallo

---

(1) E. v. Leutsch, *Kratippos und Xenophon*, in " Phil. ", XXXIII (1873), pag. 97 e *Zu Markellinos*, ibid., pag. 127.

(2) Op. cit.

(3) Cfr. Lipsius, " Leipz. Studien ", IV, 153 e Friedrich, op. cit., pag. 177.

Schmid, alla cui ultima replica rimando il lettore (1). Del pari fondata sopra un mutamento del testo sulla sostituzione di καταλειφθέντα a παραλειφθέντα nel citato passo di Dionisio, è la congettura proposta senza eccessiva convinzione dallo Schmid: che cioè Cratippo sia l'ignota persona cui la figlia di Tucidide incaricò dell'edizione degli scritti lasciati dal padre (2). Più ardito e notabile, benchè privo anch'esso di basi, è l'edificio eretto da C. Müller (3). Egli crede che Cratippo abbia pubblicato un'opera storica abbracciante insieme colle storie di Tucidide le Elleniche di Teopompo e che tra l'uno e l'altro abbia colmata coll'opera propria la lacuna. Egli fu indotto a quest'ipotesi dall'erronea interpretazione delle fonti da noi esaminate. Credendo che Cratippo fosse giunto colle sue storie solo fino alla battaglia di Cnido, lo identificò con Teopompo. Pensò d'altra parte che Dionisio non avrebbe scritto τὰ παραλειφθέντα συναγαγών se Cratippo si fosse spinto oltre la fine della guerra del Peloponneso. Non badò ad un terzo fatto: Plutarco poteva soltanto confondere Cratippo e Teopompo, quando non avesse conosciuto quest'ultimo. I due nomi di Teopompo e Cratippo apparvero di recente nuovamente riuniti e fu quando il Grenfell e l'Hunt pubblicarono negli *Oxyrhynchus Papyri*, vol. V, n. 842, l'omai famoso frammento di prosa storica relativo alle vicende degli anni 396 e 395 nel mondo ellenico. Il Meyer, il Wilamowitz, seguiti dagli editori del papiro, attribuivano il papiro a Teopompo; Fed. Blass, seguito dal Bury e dal Walker identificava l'anonimo autore del papiro col nostro Cratippo. L'ipotesi cratippiana ebbe un grande successo. E si capisce. Il frammento di storia novamente scoperto pareva appartenere ad una continuazione di Tucidide e tra i continuatori di Tucidide doveva essere cercato l'autore. Caduta ben presto l'ipotesi teopompiana, Cratippo, lo confessa il Mess stesso (4), " war der einzige Name der von den Fortsetzern des Thukydides uns blieb „. Cratippo e l'autore del papiro non possono essere la stessa persona; una cosa sola hanno in comune: la patria. Non può essere messa a

---

(1) Op. cit., pag. 125-128.
(2) " Phil. „, 49, pag. 25.
(3) Op. cit., pag. 78.
(4) Op. cit., pag. 396.

confronto l' indole della loro opera: che le storie di Cratippo sieno semplicemente una continuazione di Tucidide noi abbiamo negato; che il frammento in questione non appartenga a una continuazione di Tucidide è opinione che si va omai facendo strada tra i critici (1). È ad ogni modo codesto un terreno instabile su cui non si può insistere troppo. Certa è invece la cronologia dei due autori e questo è sufficiente a chiudere la questione: Cratippo appartiene all'età alessandrina; l'autore del papiro è stato testimonio dei fatti che narra, ha veduto egli stesso la partenza di Demeneto, l'ammutinamento delle truppe di Conone che minutamente descrive; ha composto l'opera sua non soltanto prima della distruzione del regno di Persia per opera di Alessandro Magno, ma prima che scoppiasse la guerra sacra (357).

---

(1) Vedi G. De Sanctis, *L'Attide di Androzione e un papiro di Oxyrhynchos*, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino „ XLIII (1908), pag. 331 e sgg.; cfr. Underhill, op. cit.

L'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

Torino — Stabilimento Tipografico Vincenzo Bona.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 7 Marzo 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: NACCARI, Direttore della Classe, SPEZIA, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, MATTIROLO, GRASSI e CAMERANO Segretario. — I Soci SEGRE e PARONA scusano l'assenza.

Si legge e si approva l' atto verbale della seduta precedente.

Il Presidente comunica: 1° che venne conferita la pensione accademica al Socio PARONA; 2° la morte del prof. Giulio THOMSEN, Socio corrispondente dell'Accademia, avvenuta in Copenhagen il 13 febbraio u. s. La Presidenza inviò le dovute condoglianze.

Presentazione di libri in omaggio all'Accademia:

1° Dal Socio nazionale non residente prof. Giovanni SCHIAPARELLI la sua nota: *Orbite cometarie, correnti cosmiche, meteorite*;

2° *Commemorazione del prof. G. Ciscato* e *Commemorazione di G. C. C. Zachariae*, dal Socio nazionale non residente prof. G. LORENZONI. Lo stesso offre pure una nota del Dr. G. A. FAVARO: *Confronto fra le osservazioni dell'eclisse solare del 30 agosto 1905 fatte a Padova e i calcoli eseguiti con la " Connaissance des temps „ ed*

il " Nautical Almanac „ di Londra; ed il lavoro del Dr. A. Alessio: *Determinazione della gravità relativa fra Padova e Potsdam e valori delle durate d'oscillazione dei pendoli e dell'apparato tripendolare del R. Istituto idrografico di Padova*;

3° *Commemorazione di A. Gaudry*, del Socio corrispondente F. Bassani;

4° A. Galdieri, *Sul Trias dei dintorni di Gilzoni*, dal Socio Parona.

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° Dr. L. Colomba: *Relazioni fra le densità e le costanti cristallografiche in alcuni gruppi di sostanze*, dal Socio Spezia;

2° *Risultati sperimentali su funi di acciaio usate*, del Socio Guidi;

3° A nome del Socio Segre il Presidente presenta M. Pannelli: *Sul genere aritmetico di una varietà completa intersezione di forme.*

LETTURE

Relazioni fra le densità e le costanti cristallografiche in alcuni gruppi di sostanze.

Nota del Dr. LUIGI COLOMBA.
Libero docente di Mineralogia nell'Univ. di Torino.

I.

Una delle questioni attinenti alla cristallografia geometrica, che, per ora almeno, presenta le maggiori difficoltà ad essere risolta, anche solamente in modo parziale od empirico, è quella che si riferisce alla possibilità di determinare qualche relazione che in una data sostanza colleghi i caratteri cristallografici, fisici e chimici.

Alcuni tentativi furono fatti a questo scopo, ma mentre taluni, come sarebbero ad esempio quelli fondati sul concetto della sostituzione degli assi topici (1) o dei parametri di equivalenza (2) alle attuali costanti cristallografiche, non diedero alcun risultato pratico, altri invece portarono bensì a conseguenze non prive di importanza ma ebbero l' inconveniente di essere fondati su concetti troppo limitati; tali sono le ricerche di Beckenkamp (3) sul gruppo dei biossidi e quelle di Prior (4) sulle relazioni fra volumi molecolari e le costanti cristallografiche.

Io credo che le difficoltà, almeno in parte, derivino dal fatto di voler considerare come unica una questione che invece risulta da due parti ben distinte le quali essendo fondate su basi differenti, debbono essere studiate e risolte indipendentemente l'una

(1) Muthmann, *Beiträge zur Volumtheorie der Krystallisirten Körper*, " Zeit. für Kryst. und Min. ", XXII (1894), p. 497.

(2) Barlow e Pope, *A developement of the Atomic Theory*, ecc., " Journ. of Chem. Soc. " (1906), p. 1675.

(3) *Ueber die Dioxyde der Elementen der Vierten Gruppe der periodischen Systems*, " Zeit. für Kryst. und Min. ", XLII (1906), p. 448.

(4) *Note on a Connexion between the Molecular Volume and Chemical Composition of some cristallographically similar Minerals*, " Min. Mag. ", XIII (1903), p. 217.

dall'altra. Infatti la esistenza di tipi polimorfi in molte sostanze o la possibilità di produrli senza che nelle sostanze stesse si modifichino i rapporti quantitativi dei componenti, indica come in queste sostanze si possano avere o produrre assettamenti molecolari differenti e non è logico di ammettere che questi assettamenti molecolari ed i tipi cristallografici ad essi collegati debbano essere del tutto arbitrari; invece è molto più semplice il supporre che in una data sostanza, in conseguenza dei suoi caratteri chimici o di alcuni gruppi di caratteri fisici direttamente connessi con la sua natura chimica o con quella dei suoi componenti, possano manifestarsi determinati tipi cristallografici la cui più o meno facile comparsa sia collegata con cause differenti e talvolta estranee ai caratteri della sostanza stessa come sarebbero, ad esempio, la natura del mezzo da cui si separò la sostanza esaminata, l'esistenza di determinate condizioni termiche, ecc.

I due problemi, quindi, che si dovrebbero risolvere, sarebbero i seguenti:

1° *Data una sostanza ben definita e capace di cristallizzare, determinare quali siano per essa i tipi di cristallizzazione possibili;*

2° *Essendo noti questi diversi tipi, determinare quale di essi sia il più probabile in date condizioni.*

Il primo di questi problemi è certamente molto meno complicato del secondo per il fatto che alla sua soluzione non debbono concorrere fattori estranei ai caratteri intrinseci delle sostanze che si esaminano ; tuttavia anche per esso non si può parlare che di risultati approssimativi poichè essendo i detti caratteri in generale fondati su dati sperimentali, questi debbono essere sempre considerati come valori più o meno approssimati di quelli che realmente si dovrebbero ottenere e quindi introdotti nei calcoli non possono che portare a risultati pure più o meno approssimati.

Per determinare se sia possibile riferire ad un tipo speciale la relazione che dovrebbe collegare i caratteri cristallografici con la natura chimica di una sostanza è necessario di considerare alcuni fatti che si osservano nello svolgimento dei fenomeni fisici.

Nell'esame di questi fenomeni non è raro il caso in cui,

volendosi stabilire le leggi, anche solo empiriche, da cui sono regolati, si abbia la comparsa di valori fissi ai quali si dà appunto il nome di *costanti*. L'esistenza di queste costanti si può, a parer mio, interpretare supponendo che i detti fenomeni abbiano tendenza a manifestarsi in modo unico e ben determinato, essendo nei singoli casi i risultati più o meno modificati da speciali cause connesse con alcuni fra i caratteri fisici delle sostanze che si considerano.

Per il che, se si potesse far astrazione del tutto da queste cause perturbatrici, uno qualunque dei detti fenomeni dovrebbe, per qualunque sostanza che si considerasse, manifestarsi nello stesso modo e quindi dovrebbe essere misurato ed espresso da un valore costante.

Così ad esempio, se si esamina la legge di Dulong e Petit, si ha da essa che il prodotto del calorico specifico dei vari elementi per il loro peso di combinazione, porta ad un valore costante, detto calore atomico ed in media uguale a 6,4.

Se ora dall'equazione:

$$C.s \times P.a = \text{cost}$$

che rappresenta questa relazione si passa a quest'altra:

$$C.s = \frac{\text{cost}}{P.a}$$

la legge di Dulong e Petit si modificherebbe nel seguente modo: *il calorico specifico di un elemento è uguale ad un valore costante* (6,4) *diviso per il peso di combinazione dell'elemento stesso*; questa legge si può interpretare ammettendo che il calorico specifico in generale tenda ad assumere un valore medio di 6,4, essendo però questa tendenza più o meno fortemente ostacolata dal peso di combinazione di ogni singolo elemento.

Questo modo di interpretare i fenomeni che presentano un andamento analogo a quello della legge di Dulong e Petit, considerato alla stregua degli attuali concetti sulla costituzione della materia, apparisce estremamente semplice; invero se si ammette che i singoli elementi chimici siano solamente le risultanti di speciali stati di una sostanza unica, ne risulta che questa sostanza primordiale dovrebbe avere i suoi caratteri chimici e fisici i quali verrebbero certamente ad essere modi-

ficati in grado diverso nei singoli elementi in causa dei differenti stati che essi rappresentano.

Si può quindi presumere la esistenza di una classe di fenomeni direttamente connessi con i caratteri fondamentali della materia, considerata indipendentemente da ogni suo possibile stato speciale, e nei quali l'andamento generale può ridursi all'espressione:

$$C = \text{cost.} f(R)$$

quando con C si indichi il complesso dei valori che esprimono i fenomeni considerati, con cost. il valore unico corrispondente ad essi, se si considera la materia fondamentale indipendentemente da qualsiasi modificazione, e con $f(R)$ una funzione connessa con la perturbazione dovuta ai caratteri R speciali di ogni sostanza e capaci di influire sul valore costante, determinando in esso delle modificazioni variabili a seconda dei casi.

Se si considera il fenomeno della cristallizzazione esso è evidentemente uno di quelli che appartengono alla detta classe, poichè lo stato cristallino è da considerarsi come un vero stato fisico della materia, per cui una sostanza non assume lo stato cristallino per il fatto che essa abbia una determinata composizione chimica piuttosto che un'altra, ma bensì perchè fra le proprietà fondamentali della materia esiste pure quella di assumere in determinate condizioni fisiche uno speciale stato dotato di proprietà che hanno direzioni definite; invece le differenze di composizione chimica potranno influire nel senso di modificare quell'unico tipo cristallino che verrebbe assunto dalla materia fondamentale, determinando quindi la comparsa di un complesso di caratteri cristallografici proprii delle singole sostanze.

Volendo determinare queste cause perturbatrici, occorre ricordare che, sebbene non si possa mettere in dubbio che sul fenomeno della cristallizzazione e sul suo modo di manifestarsi debba avere un'influenza la natura chimica delle sostanze che si considerano, tuttavia, poichè esso è di natura puramente fisica, è necessario di ammettere che su di esso influiscano specialmente quelle proprietà che, pur essendo collegate colla composizione chimica delle sostanze considerate, hanno però un carattere fisico e dipendono dall'assettamento molecolare delle sostanze stesse; tali sarebbero appunto la densità, i pesi molecolari e conseguentemente i volumi molecolari.

L'idea di introdurre nel campo cristallografico i valori dei volumi molecolari non è nuova; accenno, ad esempio, alle ricerche di Prior (1) il quale giunse a risultati abbastanza importanti secondo i quali *sostanze che hanno costanti cristallografiche molto vicine presentano in generale differenze molto piccole nei loro volumi molecolari, quando si possa stabilire fra di esse una analogia di struttura chimica.* Questa legge però non tiene conto del fatto che il volume molecolare ha in molte sostanze solide un valore puramente convenzionale.

Difatti quando si analizza un corpo, dai risultati che si ottengono è bensì possibile di ricavare i rapporti nei quali entrano i vari componenti, ma non si deduce nessun dato per stabilire la vera grandezza molecolare del corpo considerato; essa riesce quindi del tutto indefinita quando non si possa determinare in altro modo il suo volume molecolare.

II.

Vi ha però modo di ottenere un valore connesso intimamente con i volumi molecolari e che presenta il vantaggio di essere del tutto indipendente dalla vera grandezza molecolare delle sostanze considerate.

Ammesso che la comparsa dello stato cristallino in una sostanza inizialmente amorfa dipenda dal fatto che le sue particelle vengano ad essere sottoposte a deformazioni omogenee (1) le quali abbiano per effetto di produrre nell'interno delle particelle stesse oppure nella loro reciproca disposizione una serie di discontinuità più o meno grandi rispetto a determinate direzioni, si può supporre che, almeno parzialmente, queste deformazioni corrispondano a modificazioni nel primitivo volume molecolare delle sostanze stesse.

Fatti analoghi si debbono pure avverare quando una sostanza già dotata di stato cristallino modifica, in conseguenza di una

(1) Loc. cit.

(1) Ho impiegato questo nome di deformazione per indicare il passaggio dallo stato amorfo al cristallino, sebbene da alcuni autori sia stato impiegato per indicare il fatto inverso, partendo dal principio che col nome di deformazione si può indicare qualunque modificazione in uno stato preesistente di equilibrio.

qualsiasi causa, questo stato cristallino, perchè anche in tal caso si avrà una variazione nel suo equilibrio e nel suo assettamento molecolare.

Queste modificazioni nel volume molecolare che io indico complessivamente col nome di *deformazioni di volume*, sono sempre accompagnate da variazioni nelle densità quando si ammetta che in conseguenza di queste modificazioni vengano a variare gli assettamenti molecolari delle sostanze considerate.

In generale queste modificazioni sono rappresentate da contrazioni nei volumi molecolari, ma in realtà non si può ammettere questo contegno come assoluto e costante, avendosi esempi di sostanze, come appunto avviene nell'acqua, le quali si comportano inversamente. Ed anzi se si considerano le ricerche di Tamman sulle variazioni del punto di fusione coll'aumentare delle pressioni, si è indotti ad ammettere che ogni sostanza abbia un massimo per il detto punto, per cui al di là di questo massimo il passaggio allo stato cristallino sarebbe accompagnato da una diminuzione nella densità e quindi si avrebbe, al di là di questo punto, per qualsiasi sostanza, un comportamento analogo a quello dell'acqua.

Parimenti non si potrà escludere la possibilità di variazioni che portino a dilatazioni nel volume molecolare quando si tratti di sostanze che già essendo dotate di stato cristallino, modifichino questo stato, non essendovi nessun motivo per ammettere che il nuovo stato cristallino debba rappresentare uno stato di maggiore contrazione di volume che non il primitivo.

Ciò posto abbiasi una sostanza qualunque la cui molecola M risulti costituita da un determinato numero n di gruppi: $r', r'', \dots r^n$; se con V si indica il volume molecolare della sostanza considerata e con $v', v'', \dots v^n$ i volumi molecolari dei singoli gruppi componenti, nel caso in cui passando da questi alla molecola M non si abbia nessuna modificazione nel volume molecolare si avrà:

$$V = v' + v'' + \dots + v^n = \Sigma v^n.$$

Questa uguaglianza si può supporre esistere non soltanto nelle sostanze prive di stato cristallino, ma anche quando due o più

sostanze dotate di uno stesso tipo cristallino si combinano dando luogo a nuove sostanze nelle quali si mantenga inalterato il primitivo tipo cristallino; invece quando una sostanza o assume uno stato cristallino, oppure in qualsiasi modo modifica lo stato cristallino iniziale posseduto da essa o dai suoi componenti, l'uguaglianza soprascritta non si avvera più, avendosi sempre una differenza che, a seconda dei casi, sarà rappresentata da una dilatazione oppure da una contrazione di volume che rispettivamente portano alle seguenti disuguaglianze:

$$V < \Sigma v^n$$

$$V > \Sigma v^n$$

le quali portano a due tipi differenti che si possono indicare rispettivamente con i nomi di *deformazioni positive* e *negative.*

Le precedenti disuguaglianze si possono ridurre alla seguente espressione:

$$V = \frac{\Sigma v^n}{A}$$

essendo

$$A \gtreqless 1$$

a seconda che si abbia deformazione positiva o negativa.

Questo valore di A, che si può facilmente ricavare essendo

$$A = \frac{\Sigma v^n}{V},$$

rappresenta la deformazione di volume tanto nella sua grandezza quanto nel suo segno; esso può quindi indicarsi col nome di *indice della deformazione del volume* o più semplicemente con quello di *indice di deformazione.*

Questo indice di deformazione è del tutto indipendente dalla grandezza molecolare reale delle sostanze considerate (1) essendo

---

(1) Infatti suppongasi che, pur mantenendosi in un determinato corpo invariato il rapporto dei componenti $r', r'' \dots r^n$, la molecola abbia un grado di complessità superiore a quella corrispondente alla più semplice espressione

$$M = r' + r'' + \dots + r^n.$$

Essendo ad esempio pari ad m il numero dei singoli componenti, si

il suo valore connesso semplicemente col rapporto esistente fra gli atomi o gruppi costituenti le sostanze stesse, per il che si può far completamente astrazione da questa grandezza reale ed assumere quelle corrispondenti alla più semplice espressione della molecola.

La determinazione in una sostanza del valore di Σv^n, necessaria per ricavare il suo indice di deformazione, si può ottenere supponendo di scindere la sua molecola in due gruppi costituiti rispettivamente dall'elemento o dagli elementi che hanno comportamento elettropositivo ed elettronegativo; se poi si tien conto che per ottenere i volumi molecolari tanto di questi gruppi componenti quanto del composto è necessario di ricorrere alle densità, si deduce che i risultati che si ottengono nella determinazione degli indici di deformazione debbono essere solo considerati in modo approssimativo poichè esse sono le risultanti di una serie di operazioni aritmetiche compiute su un complesso di dati sperimentali e quindi affetti da cause di errori che per quanto piccoli non sono mai trascurabili.

III.

Se si considera una serie di specie chimiche cristallizzate, anche nel caso in cui presentino analogia di composizione chimica, si nota come non si possano a tutta prima stabilire relazioni di sorta fra i loro indici di deformazione, essendo questi variabili entro limiti più o meno estesi e differendo anche per il segno.

Tuttavia queste differenze appariscono minori quando si considerino certi gruppi di sostanze monometriche; in queste come

---

avrà che la molecola complessa, che indico con M_1, sarà rappresentata dall'espressione

$$M_1 = m(r' + r'' + \ldots + r^{m})$$

e quindi si avrà per il nuovo volume molecolare un valore V_1, tale che, essendo A_1 il nuovo indice di deformazione, si dovrà avere

$$A_1 = \frac{m\,\Sigma v^n}{V_1}.$$

Essendo però $M_1 = mM$, sarà pure $V_1 = mV$ e per conseguenza

$$A_1 = \frac{m\,\Sigma v^n}{mV} = \frac{\Sigma v^n}{V} = A.$$

appunto si vede dalle tabelle stampate nelle pagine seguenti, sebbene si abbia ancora la possibilità di deformazioni positive o negative in sostanze anche chimicamente affini, si nota che gli indici di deformazione sono rappresentati da numeri molto prossimi ai valori:

1,60 1,075 0,93.

Nei detti gruppi non tutte le specie presentano ugual grado di approssimazione; però se si assumono per le densità valori che, pur mantenendosi molto vicini a quelli sperimentali, oscillino intorno ad essi in modo che l'errore in generale non superi in più od in meno 0,10 si nota che sono pochissime le specie le quali presentino ancora discordanze sensibili fra i risultati teorici e quelli sperimentali.

Ora una tale differenza non può per nulla infirmare la bontà dei risultati perchè in generale essa non si scosta dai valori minimi e massimi che in molte specie può presentare la densità ed anche frequentemente può essere contenuta nei limiti degli errori di osservazione.

Un gruppo che dà risultati molto buoni è quello dei monosolfuri, ecc. monometrici; se in questo gruppo si uguagliano a v' i volumi atomici degli elementi che hanno comportamento anionico ed a v'' le quantità che rappresentano, per i singoli elementi metallici, i volumi monoatomici o biatomici, a seconda che per giungere alla più semplice espressione della molecola sia necessario di introdurre uno o due atomi di ognuno di essi, determinando in tal modo Σv^n in funzione di questi valori di v' e v'' si ottengono, se si eccettuano alcune specie, per gli indici di deformazione risultati molto prossimi ai primi due valori sopra riportati, specialmente se, come ho fatto io, si limitano le ricerche a quelle specie che si mostrano ben definite non solo dal lato chimico ma pur anche per quanto riguarda la loro densità; il che mi ha costretto per ora ad escludere i tellururi e qualche seleniuro.

Partendo per il solfo ed il selenio rispettivamente dai pesi di combinazione 32 e 79, ed assumendo per le loro densità valori rispettivamente uguali a 1,95 ed a 4,2, si giunge per i loro volumi atomici ai numeri 16,40 e 17,80.

Indicando poi con *p.a*, *d*, *v.a* rispettivamente i pesi di com-

	p.a	*d*	*v.a*	*v'*	*v''*	$\Sigma v''$	*V.m*	*P.m*	D_1	*D*	$D-D_1$
$A = 160$:											
CaS	*40,10*	*1,60*	*25,06*	16,41	25,06	41,47	25,90	72,10	2,78	2,80	+0,02
SrS	*87,60*	*2,60*	*33,70*	„	33,70	50,11	31,30	119,60	3,81	3,72	—0,09
BaS	*137,40*	*3,70*	*37,13*	„	37,13	53,54	33,46	169,40	5,06	4,30	—0,74
MgS	*24,36*	*1,65*	*14,76*	„	14,76	31,15	19,44	56,36	2,89	2,85	—0,04
Li_2S	*7,03*	*0,55*	*12,78*	„	25,56	41,97	26,23	46,06	1,75	1,70	—0,07
NiSe	*58,70*	*9,00*	*6,52*	18,80	6,52	25,22	15,82	137,70	8,71	8,50	—0,21
$A = 1,075$:											
PbS (*Galena*) . . .	*207,00*	*11,50*	*18,00*	16,41	18,00	34,41	32,00	239,00	7,47	7,50	+0,03
Ag_2S (*Argentite*) . .	*108,00*	*10,60*	*10,18*	„	20,36	36,77	34,20	248,00	7,25	7,29	+0,04
ZnS (*Blenda*) . . .	*65,40*	*6,80*	*9,61*	„	9,61	26,02	24,18	97,40	4,03	4,05	+0,02
MnS (*Alabandite*) .	*55,00*	*7,50*	*7,33*	„	7,33	23,74	21,99	87,00	3,95	3,98	+0,03
Cu_2S	*63,60*	*8,90*	*7,04*	„	14,08	30,49	28,36	159,20	5,61	5,65	+0,04
Ag_2Se (*Naumannite*)	*108,00*	*10,60*	*10,18*	18,80	20,36	39,16	36,42	295,00	8,09	8,00	—0,09
Cu_2Se (*Berzehanite*) .	*63,60*	*8,90*	*7,04*	„	14,08	32,88	30,58	206,20	6,74	6,71	—0,03
ZnSe	*65,40*	*6,80*	*9,61*	„	9,61	28,41	26,44	144,40	5,46	5,46	—0,04
MnSe	*55,00*	*7,50*	*7,33*	„	7,33	26,13	24,21	134,00	5,53	5,60	+0,07

binazione, le densità ed i volumi atomici dei singoli metalli ed assumendo a seconda dei casi per A i valori 1,60 e 1,075, si ottengono per le specie appartenenti al detto gruppo i valori riportati nella tabella alla pagina precedente, nella quale $V.m$, $P.m$, D_1, D indicano rispettivamente i volumi molecolari, i pesi molecolari e le densità teoriche e reali dei singoli composti considerati.

Da questi valori si deduce che le uniche specie le quali si allontanano sensibilmente dai valori teorici sarebbero il solfuro di bario ed il seleniuro di nichelio.

Per quest'ultima specie potrebbe anche darsi che le discordanze constatate, relativamente piccole, dipendessero da errori di osservazione, non così per il solfuro di bario in cui la differenza fra il valore sperimentale e teorico delle densità è troppo grande per poter dipendere da una causa così semplice.

Un gruppo di specie che presenta deformazioni negative molto prossime a 0,93 è quello degli spinelli; se si considerano questi minerali come corrispondenti alla formola generale $R''R_2'''O_4$ si può ammettere che rappresentino i sali monometallici di metaacidi del tipo $HR'''O_2$ risultanti dall'unione di un'anidride del tipo $R_2'''O_3$ con una molecola di acqua. Volendo quindi scinderli nei loro componenti, si può supporre che risultino da una molecola di sesquiossido (Al_2O_3, Fe_2O_3, Cr_2O_3, Mn_2O_3) il cui volume molecolare corrisponderebbe a v' e di una molecola di ossido basico (MgO, MnO, ZnO, CdO, FeO) il cui volume molecolare darebbe il valore di v''.

Limitando le osservazioni a quelle specie che si trovano relativamente pure in natura ovvero vennero ottenute sinteticamente ed escludendo per ora quelle contenenti il protossido di ferro, per il fatto che esso non è noto allo stato libero, rimangono da considerare le specie seguenti:

$MgAl_2O_4$; $ZnAl_2O_4$; $MnAl_2O_4$; $ZnFe_2O_4$; $MnFe_2O_4$; $MgCr_2O_4$;
$ZnCr_2O_4$, $CdCr_2O_4$, $MnCr_2O_4$.

Assumendo per i singoli ossidi che entrano nelle predette specie come volumi molecolari i valori dedotti dalla seguente tabella:

Al_2O_3	$p.m = 102,2$	$d = 4$	$v.m = 25,55$
Fe_2O_3	„ 159,8	„ 5,25	„ 30,44
Cr_2O_3	„ 152,6	„ 5,20	„ 29,25
MgO	„ 40,36	„ 3,60	„ 11,16
ZnO	„ 81,40	„ 5,80	„ 14,03
MnO	„ 71,00	„ 5,20	„ 13,65
CdO	„ 124,40	„ 8,10	„ 15,86

si ottengono i risultati seguenti ponendo $A = 0,93$:

	Σv^n	$V.m$	$P.m$	D_1	D	$D - D_1$
$MgAl_2O_4$ (*Spinello*)	36,71	39,47	142,56	3,61	3,60	—0,01
$ZnAl_2O_4$ (*Gahnite*)	39,58	42,55	183,60	4,31	4,50	+0,19
$MnAl_2O_4$	39,20	42,16	173,20	4,10	4,12	+0,02
$ZnFe_2O_4$	44,47	47,81	241,20	5,04	5,13	+0,09
$MnFe_2O_4$ (*Jacobsite*)	44,09	47,41	230,80	4,87	4,75	+0,12
$MgCr_2O_4$	40,51	43,56	192,96	4,43	4,41	—0,02
$ZnCr_2O_4$	43,58	46,64	234,00	5,02	5,30	+0,28
$CdCr_2O_4$	45,21	48,61	281,00	5,75	5,79	+0,04
$MnCr_2O_4$	43,00	46,23	223,60	4,83	4,87	+0,04

Da questi risultati apparisce che, se si fa astrazione dalle specie contenenti zinco e dalla jacobsite, le altre specie danno invece risultati buonissimi poichè, se si determinasse da esse A partendo dalle densità reali, si otterrebbero per esso valori che oscillano fra 0,927 e 0,936 con una media uguale a 0,930.

Per quanto riguarda la jacobsite la piccola differenza fra i risultati teorici e sperimentali si può spiegare tenendo conto del fatto che in essa è sempre contenuta una quantità non trascurabile di magnesio; la presenza di impurità rappresentate specialmente da protossido di ferro potrebbe anche spiegare la sensibile differenza che si osserva nella gahnite considerata come puro alluminato di zinco. Il fatto però che anche le altre specie contenenti zinco si allontanano sensibilmente dai valori teorici lascia supporre che queste anormalità siano collegate a qualche carattere speciale dello zinco.

IV.

L'esistenza di indici di deformazione differenti nelle sostanze monometriche indica senz'altro come la comparsa del tipo monometrico non dipenda soltanto dalla deformazione del volume molecolare poichè in tal caso non si spiegherebbero tali differenze.

Si tratta ora di vedere se si possa giungere ad una equazione del tipo:

$$C = \text{cost.}\, f(R)$$

supponendo che A rappresenti il valore di $f(R)$; cioè se si possa, introducendo una costante, ottenere la comparsa del tipo monometrico partendo dai predetti valori di A.

A questo scopo conviene di osservare come i tre numeri soprariportati mostrino alcune interessanti relazioni che li collegano: invero si osserva che il secondo è quasi uguale ai due terzi del primo; inoltre il terzo è pure quasi esattamente il reciproco del secondo per modo che si può ammettere che i casi ad essi riferibili rappresentino deformazioni uguali in valore assoluto ma di segno contrario, il che riduce già sensibilmente la iniziale indeterminatezza del valore della deformazione molecolare in relazione col tipo monometrico.

Ed anzi applicando questo concetto anche al primo valore risulterebbe nelle sostanze monometriche la possibilità di un quarto valore che dovrebbe essere il reciproco del primo.

Considerando come vere in modo assoluto queste relazioni fra i diversi valori di A ed indicando rispettivamente con A_1, A_2, A_3, A_4 i quattro valori, si ottiene, prendendo come valore base $A_1 = 1{,}075$:

$$A_1 = 1{,}075$$

$$A_2 = \frac{3A_1}{2} = 1{,}612$$

$$A_3 = \frac{1}{A_1} = 0{,}930$$

$$A_4 = \frac{2}{3A_1} = 0{,}620$$

valori questi, se si considerano i primi tre, estremamente prossimi a quelli ottenuti come valori medii sperimentali, essendo

le differenze talmente piccole da non poter produrre sensibili differenze nei risultati.

Si consideri ora il sistema monometrico come un caso speciale del sistema romboedrico, il che avviene quando nell'equazione generale

$$c = \text{tg}(0001 . 10\bar{1}1) \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

si ponga $\text{tg}(0001 . 10\bar{1}1) = 54°44'$, se si limitano le grandezze angolari ai minuti primi; poichè in tal caso il romboedro fondamentale diviene un cubo, si ha

$$c = 1{,}2246 = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ (1)}.$$

Ammesso che esista una qualche relazione fra gli indici di deformazione e c, non potendosi a priori stabilire, anche quando si ammetta l'intervento di una costante, quale possa essere il tipo di questa relazione, è necessario di partire da un concetto arbitrario.

A quest'uopo partendo dal valore base $A = 1{,}075$ considero una relazione equivalente a quella data dalla legge di Dulong e Petit; ammetto cioè che si possa avere l'equazione

$$cA_1 = \text{cost}.$$

Questa equazione, se si ammette che il valore di c, ottenuto partendo dall'equazione generale del sistema romboedrico applicata al monometrico, rappresenti la misura assoluta degli assi trigonali delle sostanze monometriche, si riduce alla seguente:

$$1{,}2246 \times 1{,}075 = \text{cost} = 1{,}316...$$

che dà un valore determinato per la costante.

In tale caso è possibile di stabilire, date le relazioni che passano fra i diversi valori dell'indice di deformazione nelle sostanze monometriche, quali siano i tipi delle relazioni che, me-

---

(1) Infatti essendo $\text{tg}\, 54°{,}44' ... = \sqrt{2}$ si ha:

$$c = \text{tg}(54°\, 44') \frac{1}{2} \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

diante l'intervento della detta costante, collegano i singoli valori dell'indice di deformazione con $c = 1,2246$ (1).

Si ottengono così in tal modo le quattro equazioni:

$$A_1 = 1,075 \qquad cA_1 = 1,316...$$

$$A_2 = 1,612 \qquad \frac{A_2}{c} = 1,316...$$

$$A_3 = 0,930 \qquad \frac{c}{A_3} = 1,316...$$

$$A_4 = 0,620 \qquad \frac{1}{cA_4} = 1,316...$$

che dànno la possibilità di risolvere in tutti i casi corrispondenti alle sostanze monometriche l'equazione generale

$$C = \text{cost.} f(R)$$

quando si ponga $C = c$ e si sostituiscano a $f(R)$ i valori trovati per l'indice di deformazione; in tal caso infatti, se si indica la costante con Q_3 (trattandosi di un valore ottenuto partendo dagli assi trigonali) si ottengono le seguenti equazioni:

---

(1) Essendo i valori delle deformazioni negative i reciproci di quelli corrispondenti alle deformazioni positive, basterà determinare il tipo della relazione in queste e quindi l'unico caso da considerare è quello in cui si abbia

$$A_2 = 1,612.$$

Considero l'equazione

$$A_1 c = Q_3.$$

Essendo $A_2 = \frac{3A_1}{2}$ si ottiene $A_1 = \frac{2A_2}{3}$; sostituendo questo valore di A_1 nella precedente equazione si ha:

$$A_1 c = \frac{2A_2}{3} c = \frac{2A_2}{3} \sqrt{\frac{3}{2}} = Q_3.$$

Elevando al quadrato ottengo

$$\frac{4(A_2)^2}{9} \frac{3}{2} = \frac{2}{3} (A_2)^2 = (Q_3)^2$$

d'onde si ricava

$$\sqrt{\frac{2}{3}} A_2 = Q_3$$

e quindi essendo

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{c}$$

$$\frac{A_2}{c} = Q_3.$$

$$A_1 = 1{,}075 \qquad c = \frac{Q_3}{A_1} = \frac{1{,}316}{1{,}075} = 1{,}2246$$

$$A_2 = 1{,}612 \qquad c = \frac{A_2}{Q_3} = \frac{1{,}612}{1{,}316} = 1{,}2246$$

$$A_3 = 0{,}930 \qquad c = A_3 Q_3 = 0{,}930 \times 1{,}316 = 1{,}2246$$

$$A_4 = 0{,}620 \qquad c = \frac{1}{A_4 Q_3} = \frac{1}{0{,}620 \times 1{,}316} = 1{,}2246$$

le quali sono sufficienti, quando sia noto il valore dell'indice di deformazione per determinare c; a queste equazioni do il nome di *parametrali*.

V.

Considerando il reticolato cubico come fondamentale nelle sostanze monometriche si possono ottenere i reticolati proprii delle sostanze romboedriche e dimetriche supponendo che in quello cubico si abbiano deformazioni speciali che si manifestino rispetto ad uno degli assi trigonali o quadratici; nel primo caso il reticolato cubico si trasformerebbe in un romboedro, nel secondo in un parallelepipedo retto a base quadrata, essendo in ambedue i casi le altezze degli assi principali, che in tal modo verrebbero a comparire e che indico con c_3 e c_4, collegate con il grado di deformazione avvenuta rispetto all'uno oppure all'altro dei detti assi.

È quindi interessante di vedere se si possono applicare le equazioni parametrali ottenute, alla determinazione cristallografica delle sostanze romboedriche e dimetriche.

In questi casi però le cose debbono essere considerate sotto un aspetto differente che nel monometrico, essendo necessario, affinchè esista un accordo fra i risultati teorici e quelli sperimentali, che partendo dai valori reali delle densità si possa, applicando una oppure un'altra delle equazioni parametrali, giungere per c_3 o c_4 a valori tali che con essi siano compatibili tutte le forme cristalline note nelle sostanze che si esaminano.

Ciò sarebbe sufficiente teoricamente, qualunque fosse la forma che in tal modo verrebbe ad essere considerata come fondamentale; non conviene però di dimenticare che, ad eccezione di pochi casi, la determinazione sperimentale della forma fondamentale nei cristalli di un adeterminata sostanza non è

fatta in modo arbitrario, ma apparisce invece connessa con caratteri non trascurabili della forma stessa, quali sarebbero ad esempio l'esistenza di una sfaldatura secondo le sue facce, la sua maggior frequenza, il suo prevalente sviluppo, ecc.

Per cui affinchè si abbia un vero accordo reale fra le conclusioni teoriche e quelle sperimentali è necessario che, almeno nella massima parte dei casi, le forme fondamentali teoriche siano direttamente coincidenti oppure siano collegate da relazioni geometriche molto semplici con quelle attualmente ammesse per le sostanze considerate e nel caso in cui ad una data sostanza si diano, a seconda dei vari autori, differenti valori, la forma fondamentale abbia le stesse relazioni prima accennate con una delle forme fondamentali ammesse per la sostanza che si esamina.

I risultati che ottenni in alcuni gruppi di sostanze romboedriche e dimetriche, scelte come nel caso precedente fra quelle che presentino poca complessità di formole e non siano inquinate da impurità, sono abbastanza buoni avverandosi anche per esse che le differenze fra i risultati teorici e quelli reali sono in generale molto piccole.

Anche in questi casi dato il carattere puramente preliminare delle presenti ricerche ho trascurato completamente ogni accenno al problema riguardante le cause per cui ad una data sostanza sia da applicarsi un'equazione piuttosto che un'altra.

Nel gruppo già esaminato dei monosolfuri ecc., si hanno numerose specie romboedriche; applicando ad esse convenientemente le equazioni parametrali, si ottengono in tutte, ad eccezione delle greenockite che si scosta di poco, per c_3 valori corrispondenti a quelli dati da Dana. La determinazione di $\Sigma v''$ fu ottenuta partendo dei seguenti elementi considerati come componenti.

S	$p.a = 32$	$d = 1,95$	$v.a = 16,41$
As	„ $= 75$	„ $= 5,75$	„ $= 13,03$
Sb	„ $= 120$	„ $= 6,60$	„ $= 18,18$
Zn	„ $= 65,4$	„ $= 6,8$	„ $= 9,61$
Cd	„ $= 112,4$	„ $= 8,5$	„ $= 13,22$
Cu	„ $= 63,6$	„ $= 8,9$	„ $= 7,04$
Ni	„ $= 58,7$	„ $= 9$	„ $= 6,52$

Da questi valori si ottengono i risultati riportati nella seguente tabella in cui le lettere poste a capo di ogni colonna hanno gli stessi significati che nelle tabelle delle sostanze monometriche prima esaminate, essendo inoltre indicati con c_3 e C_3 rispettivamente i valori teorici e sperimentali delle costanti cristallografiche.

	v'	v''	Σv^n	D	$P.m$	$V.m$	A	c_3	C_3	C_3-c_3	D_1
$c_3 = \frac{Q_3}{A}$											
CuS (*Covellite*)	16,41	7,04	23,45	4,65	95,6	20,55	1,141	1,153	1,146	—0,007	4,68
NiS (*Millerite*)	16,41	6,52	22,93	5,28	90,7	17,18	1,334	0,986	0,988	+0,002	5,27
$c_3 = \frac{A}{Q_3}$											
ZnS (*Wurtzite*)	16,41	9,61	26,00	4,02	97,4	24,22	1,073	0,815	0,817	+0,002	4,03
CdS (*Greenockite*)	16,41	13,22	29,63	5,00	144,4	28,88	1,022	0,776	0,810	+0,034	5,19
NiAs (*Niccolite*)	13,03	6,52	19,55	7,40	133,7	18,06	1,082	0,822	0,819	—0,003	7,36
NiSb (*Breithauptite*)	18,18	6,52	24,70	8,10	178,7	22,06	1,119	0,850	0,858	+0,008	8,16

Nel gruppo dei solfosali si hanno due specie romboedriche le quali presentano delle composizioni chimiche ben definite: sono esse la *proustite* e la *pirargirite* rispettivamente corrispondenti alle formule $3Ag_2S.As_2S_3$ e $3Ag_2S.Sb_2S_3$. Se in esse si pone v' uguale al volume molecolare dei sesquisolfuri di arsenico e di antimonio, essendo v'' uguale al triplo del volume molecolare del protosolfuro di argento, determinando questi valori di v' e v'', partendo dai seguenti dati

As_2S_3	$p.m = 246$	$d = 3,70$	$v.m = 66,48$
Sb_2S_3	„ $= 336$	„ $= 4,50$	„ $= 74,66$
Ag_2S	„ $= 248$	„ $= 7,30$	„ $= 33,97$

si ottengono per la costante cristallografica valori molto prossimi a quelli dati da Dana (1) e quando si parta dall'equazione $c_3 = \frac{1}{AQ_3}$, come risulta dalla seguente tabella:

(1) *System of Mineralogy*, 1892, p. 131, 134.

	v'	v''	Σv^n	D	$P.m$	$V.m$	A	c_3	C_3	C_3-c_3	D_1
Proustite	66,48	101,91	168,39	5,57	990	177,73	0,947	0,8025	0,8039	0,0014	5,50
Pirargirite	74,66	101,91	176,67	5,85	1080	184,61	0,957	0,7940	0,7890	0,0050	5,88

Un altro gruppo che merita d'essere considerato è quello dei titanati, nel quale però si ha l'inconveniente che la specie più importante, cioè la *ilmenite*, contiene protossido di ferro il quale non è noto allo stato libero; di questa specie mi occuperò in seguito, per cui mi limito per il momento a considerare la *pirofanite* ($MnTiO_3$) e la *geikielite* ($MgTiO_3$), ambedue romboedriche; a queste si può anche aggiungere la *perofskite* ($CaTiO_3$) considerandola come monometrica.

Per quanto riguarda le due prime specie, ponendo v' uguale a 18,60 che corrisponde al volume molecolare del biossido di titanio, essendo la sua densità uguale a 4,30, e ponendo rispettivamente v'' uguale ai volumi molecolari dei protossidi di manganese e magnesio già uguagliati nella tavola degli spinelli a 13,65 ed a 11,16 si ottengono, partendo dall'equazione $c_3 = \frac{Q_3}{A}$, valori molto prossimi alle costanti attuali delle dette specie (1).

	v'	v''	Σv^n	D	$P.m$	$V.m$	A	c_3	C_3	C_3-c_3	D_1
Pirofanite	18,60	13,65	32,25	4,53	151	33,33	0,967	1,361	1,367	+0,006	4,47
Geikielite	18,60	11,16	29,76	3,90	120,36	30,86	0,964	1,365	1,370	+0,005	3,85

Per la perofskite si può giungere a risultati pure discretamente buoni assumendo la stessa equazione; in questo caso essendo la sostanza monometrica la deformazione deve essere positiva e quindi deve essere $A = 1,075$; si ottengono in tal caso i risultati seguenti, essendo il volume molecolare dell'ossido

(1) Groth, *Chemische Krystallographie*, 1908, 2ª parte, pp. 240, 241.

di calcio uguale a 17,40, se si parte dalla densità 3,20 e dal peso molecolare 56,1.

	v'	v''	$\Sigma v''$	A	$V.m$	$P.m$	D_1	D	$D_1 - D$
Perofskite	18,60	17,40	36,00	1,075	33,53	136,10	4,05	4	—0,05

VI.

Prima di accennare alle specie dimetriche da me esaminate, è necessario di discutere una questione di indole generale onde si possa stabilire un accordo fra i risultati che si ottengono per il sistema romboedrico e quelli che si ottengono per il sistema dimetrico.

Io ho nelle pagine precedenti ricavata l'equazione del cubo da quella generale del romboedro in funzione del suo asse trigonale; se invece la si vuole ricavare in funzione della sua altezza, occorre di partire dall'equazione propria del sistema dimetrico, la quale dà la grandezza dell'asse verticale in funzione dell'angolo 001 . 111; questa equazione

$$c_4 = \mathrm{tg}(001.111) \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

porta al cubo quando si ponga $\mathrm{tg}(001.111) = \mathrm{tg}\, 54°44'$; nel qual caso si ottiene:

$$c_4 = \mathrm{tg}(54°44') \frac{1}{2} \sqrt{2} = 1.$$

Ora, se si confronta questa equazione con quella del sistema romboedrico, pure applicata al caso speciale del sistema monometrico, si nota che esse non sono coesistenti, poichè fra i due valori di c_3 e di c_4 non esiste il rapporto di $\sqrt{3}$ ad 1 che si deve avverare fra la semidiagonale ed il semiasse del cubo.

Per il che, se si assume come fondamentale l'equazione propria del sistema romboedrico (il che è logico essendo il cubo un caso speciale di un romboedro), è necessario di modificare quella del sistema dimetrico in modo che fra c_3 e c_4 venga ad

avverarsi il predetto rapporto, il che si ottiene quando a c_4 si sostituisca un valore c_4' tale che sia (1):

$$c_4' = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

cioè quando all'equazione stessa si dia il tipo

$$c_4 = \frac{\operatorname{tg} 54^\circ 44'}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Per cui la grandezza di c_4 sarebbe approssimativamente uguale a 0,707.

Però anche compiendo questa modificazione si nota ancora che si hanno delle differenze nei risultati quando si applichino, nel caso del sistema monometrico considerato come caso speciale del dimetrico, le quattro equazioni prima considerate; invero, si nota come esse diano luogo a due valori differenti per la costante, ognuno dei quali ricavabile da una coppia di equazioni e collegati dalla condizione di essere l'uno triplo dell'altro (2); indicando questi due valori con Q_4 e Q_4' si ha:

---

(1) Infatti affinchè un tale rapporto esista è necessario che si abbia

$$\sqrt{3} : 1 :: \sqrt{\frac{3}{2}} : c_4'$$

d'onde si ricava

$$c_4' = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

(2) Si consideri la coppia di equazioni proprie del sistema romboedrico applicate al caso speciale del monometrico

$$\frac{Q_3}{A} = c_3 = \sqrt{\frac{3}{2}} \qquad \frac{A}{Q_3} = c_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

e quelle corrispondenti al sistema dimetrico pure applicate al monometrico:

$$\frac{Q_4}{A} = c_4' = \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad \frac{A}{Q_4'} = c_4' = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Combinando insieme le prime equazioni di ogni coppia e così pure le seconde, si ottiene:

$$Q_3 = Q_4 :: \sqrt{3} : 1$$
$$Q_4' = Q_3 :: \sqrt{3} : 1$$

$$A_1 = 1{,}075 \qquad c_4' A_1 = Q_4 = 0{,}759...$$

$$A_2 = 1{,}612 \qquad \frac{A_2}{c_4'} = Q_4' = 2{,}277...$$

$$A_3 = 0{,}930 \qquad \frac{c_4'}{A_3} = Q_4 = 0{,}759...$$

$$A_4 = 0{,}620 \qquad \frac{1}{c_4' A_4} = Q_4' = 2{,}277...$$

Se si considerano questi due valori Q_4 e Q_4' e si confrontano con il valore di Q_3 si nota che essi stanno nel seguente rapporto:

$$Q_3 : Q_4 : Q_4' :: \sqrt{3} : 1 : 3$$

che corrisponde a quello che in un reticolato monometrico si può stabilire fra la semidiagonale del cubo e le semialtezze del cubo stesso e dell'ottaedro ad esso circoscritto; vale a dire considerando separatamente le due coppie di valori Q_3, Q_4 e Q_3, Q_4', si otterrebbero due distinti reticolati l'uno cubico e l'altro ottaedrico e circoscritto al primo.

Per il che, volendo riferire le sostanze dimetriche ad un reticolato che si possa direttamente ricavare da quello cubico, si dovranno solamente considerare le equazioni:

$$c_4' A_1 = Q_4 \qquad \frac{c_4'}{A_3} = Q_4$$

che, quando da essa voglia dedursi c_4' si trasformano nelle seguenti:

$$\text{(I)} \qquad \frac{Q_4}{A_1} = c_4' \qquad Q_4 A_3 = c_4'.$$

Volendo poi da queste ricavare i valori attuali c_4 delle costanti cristallografiche basta ricordare che essendo rispettivamente:

---

d'onde si ricava

$$Q_3 = Q_4 :: Q_4' = Q_3$$

e quindi ottenendo Q_4'

$$Q_4' = \frac{(Q_3)^2}{Q_4}.$$

Ora dalla prima delle due proporzioni soprascritte si ha $Q_3 = Q_4 \sqrt{3}$ ed elevando al quadrato $(Q_3)^2 = 3(Q_4)^2$; sostituendo questo valore di $(Q_3)^2$ nella precedente equazione si ha

$$Q'_4 = \frac{(3Q_4)^2}{Q_4} = 3 Q_4.$$

$$c_4 = \mathrm{tg}(001\,.\,111)\frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad c_4' = \frac{\mathrm{tg}(001\,.\,111)}{2}$$

sarà

$$c_4 = c_4'\sqrt{2} \qquad\qquad c_4' = \frac{c_4}{\sqrt{2}}$$

e quindi le (I) si cambiano nelle seguenti:

$$\frac{Q_4\sqrt{2}}{A_1} = c_4 \qquad Q_4\sqrt{2}\,A_3 = c_4$$

che generalizzate per applicarle al sistema dimetrico dànno:

$$\frac{Q_4\sqrt{2}}{A} = c_4 \qquad Q_4\sqrt{2}\,A = c_4.$$

Le specie dimetriche da me considerate appartengono al gruppo dei tungstati e dei molibdati ed a quello dei manganiti.

Per quelle appartenenti al primo dei detti gruppi si hanno in alcuni casi risultati abbastanza buoni se si orientano però in modo che la forma fondamentale sia quella che attualmente corrisponde al simbolo 101 (1). Alcune altre specie però, e questo avviene specialmente nei molibdati, dànno differenze un po' più sensibili. Ma ciò può dipendere da varie cause; così per il molibdato calcico le densità date non riguardano il composto chimico puro, ma la varietà esistente in natura sotto il nome di *powellite*; e siccome questa varietà contiene sempre quantità non trascurabili di tungstato calcico, è evidente che la densità teorica deve essere inferiore di quella reale.

Invece nei molibdati di stronzio e di bario, studiati cristallograficamente da Hjortdahl (2), le densità note furono ottenute anteriormente da Marhs (3) su materiale non cristallizzato, e quindi è logico di ottenere teoricamente una densità superiore. E tali sono appunto le conclusioni a cui sono giunto. Per quanto

---

(1) Tale differenza di orientamento non è per nulla in contrasto con l'abito dei cristalli delle dette specie, poichè in molte di esse, e fra queste specialmente la scheelite, sono frequentemente più sviluppate le facce della 101 che non quelle della 111; ed anzi la scheelite, quando venne scoperta, fu appunto riferita all'attuale 101.

(2) *Krystallform der Erdalkali Molybdate*, " Zeit. für Kryst. und Min. ", XII (1887), p. 411.

(3) Clarke, *A Table of Specific Gravity for solids and liquids*. London, 1888, p. 105.

riguarda i dati riferentisi ai gruppi che entrano a costituire i tungstati ed i molibdati sono partito dalla seguente tabella, nella quale i valori delle densità corrispondenti alle anidridi tungstica e molibdica sono quelli dati da Zettnow (1) e da Schafarik (2):

WO_3	$p.m = 232$	$d = 7,35$	$v.m = 31,56$
MoO_3	„ $= 144$	„ $= 4,40$	„ $= 32,73$
PbO	„ $= 223$	„ $= 9$	„ $= 24,77$
CaO	„ $= 56,1$	„ $= 3,20$	„ $= 17,40$
SrO	„ $= 103,6$	„ $= 4,75$	„ $= 21,81$
BaO	„ $= 153,4$	„ $= 5,80$	„ $= 26,45$

Partendo dalle costanti date da Dana (3), Hjortdahl (4) e Zambonini (5) si ottengono, per le specie appartenenti al gruppo dei tungstati e molibdati, i seguenti valori per le costanti C_4 se si ammette come fondamentale l'attuale 101:

$CaWO_4$ (*Scheelite*)	$C_4 = 1,085$	$CaMoO_4$	$C_4 = 1,092$
$SrWO_4$	„ $= 1,102$	$SrMoO_4$	„ $= 1,111$
$BaWO_4$. . . .	„ $= 1,134$	$BaMoO_4$	„ $= 1,147$
$PbWO_4$ (*Stolzite*)	„ $= 1,103$	$PbMoO_4$ (*Wulfenite*)	„ $= 1,113$

Ponendo v' e v'' rispettivamente uguali ai volumi molecolari dell'anidride tungstica o molibdica e degli ossidi basici che entrano nei singoli composti esaminati, si ottengono i risultati riferiti nella seguente tabella quando, a seconda dei casi, si adoperi l'una o l'altra delle due equazioni ricavate per il sistema dimetrico ed indicando con c_4 e C_4 i valori teorici e sperimentali della costante:

---

(1) " Jahresber. über die Fortschritte der Chemie „, XX, p. 216.

(2) " Journal für Praktische Chemie „, XC, p. 12.

(3) *System of Mineralogy*, 1892, p. 982.

(4) Loc. cit.

(5) *Beitr. zur Krystallographischen Kenntniss*, *ecc.*, " Zeit. für Kryst. und Min. „, (1905), XLI, p. 53.

						101		111			
	Σv^n	D	$P.m$	$V.m$	A	c_4	C_4	c_4	C_4	$C_4 - c_4$	D_1
$c_4 = Q_4 \sqrt{2}\, A$											
$CaWO_4$ . .	48,96	6,00	288,10	48,01	1,018	1,094	1,085	1,547	1,535	—0,012	5,95
$CaMoO_4$ . .	50,13	4,35 (1)	200,10	46,00	1,089	1,170	1,092	1,654	1,545	—0,109	4,05
$PbWO_4$ . .	56,33	8,23	455,00	55,15	1,021	1,097	1,103	1,551	1,560	+0,009	8,28
$PbMoO_4$ . .	57,50	6,70	367,00	54,77	1,049	1,127	1,113	1,594	1,577	—0,017	6,60
$c_4 = \frac{Q_4 \sqrt{2}}{A}$											
$SrWO_4$ . .	53,37	6,18	335,60	54,30	0,983	1,192	1,102	1,544	1,558	+0,014	6,13
$SrMoO_4$ . .	54,54	4,15	247,60	59,66	0,914	1,176	1,111	1,663	1,574	—0,089	4,39
$BaWO_4$ . .	58,01	6,35	385,40	60,69	0,956	1,124	1,134	1,591	1,604	+0,013	6,29
$BaMoO_4$ . .	59,18	4,65	297,40	63,95	0,923	1,164	1,147	1,646	1,623	—0,023	4,70

Al gruppo dei manganiti riferisco quelle specie che si possono considerare come derivanti da acidi in cui l'anidride sia rappresentata dal biossido di manganese e che, a seconda che assumono il tipo di metaacido o di ortoacido, corrisponderebbero alle formole

$$H_2Mn^{IV}O_3 \qquad H_4Mn^{IV}O_4.$$

Le specie riferibili a questo gruppo sono tre:

Bixbyite	$Fe''Mn^{IV}O_3$	Monometrica	
Braunite	$Mn''Mn^{IV}O_2$	Dimetrica	$C_4 = 0{,}986$
Hausmannite	$Mn_2''Mn^{IV}O_4$	„	$C_4 = 1{,}174$

Tralasciando per ora la bixbyite per il fatto che contiene protossido di ferro, si ottengono risultati molto buoni per le altre due specie se si applicano rispettivamente ad esse le equazioni $c_4 = Q_4 \sqrt{2}\, A$ e $c_4 = \frac{Q_4 \sqrt{2}}{A}$, quando si parta per il biossido e per il protossido di manganese rispettivamente dai seguenti dati:

MnO_2	$p.m = 87$	$d = 5{,}00$	$v.m = 17{,}40$
MnO	„ $= 71$	„ $= 5{,}20$	„ $= 13{,}65$

(1) Valore ottenuto su cristalli naturali impuri di Sout Hecla, Michigan, da Palacke („ Am. Journ. of Science „, 7 (1899), p. 367).

si hanno in tal modo per le costanti valori molto prossimi a quelli dati da Dana (1).

I risultati sono riassunti nella seguente tabella, dando alle lettere il significato delle tabelle precedenti:

	Σv^n	D	$P.m$	$V.m$	A	Equazione	c_4	C_4	C_4-c_4	D_1
Braunite . .	31,05	4,75	158	33,26	0,933	$Q_4\sqrt{2}\,A$	1,003	0,986	−0,017	4,66
Hausmannite	44,70	4,75	229	48,21	0,927	$\frac{Q_4\sqrt{2}}{A}$	1,160	1,174	+0,014	4,68

L'essere queste due specie determinate partendo da equazioni differenti non presenta nulla di anormale, essendo differenti gli acidi da cui derivano; un contegno anormale sembra invece avverarsi nel gruppo dei tungstati e dei molibdati, in cui le specie, per quanto riferentisi a formole chimiche analoghe, richiedono, a seconda dei casi, l'una o l'altra equazione; tuttavia però, il fatto che queste variazioni non sono saltuarie, ma seguono una legge abbastanza ben definita, dimostrano come esse non infirmino per nulla i risultati da me ottenuti, essendo probabilmente collegate con la natura degli elementi che entrano nei composti considerati.

Invero, se si considerano i tungstati ed i molibdati dei metalli alcalino-terrosi, è facile di constatare come si avveri in essi una graduale modificazione nella deformazione, connessa con la densità degli ossidi dei metalli stessi, osservandosi come il valore dell'indice di deformazione vada diminuendo col crescere delle dette densità, per cui, data la grande esiguità della deformazione positiva nel tungstato e nel molibdato di calcio, è naturale che nei corrispondenti sali di stronzio e di bario, in causa della grande differenza che si nota fra le densità dei corrispondenti ossidi, le deformazioni divengano negative.

Questo fatto non è del resto proprio solo dei tungstati e dei molibdati; esso si avvera pure nel gruppo dei solfuri, dove si

(1) *System of Mineralogy*, 1892, p. 231, 232.

nota anche come in uno stesso gruppo le deformazioni vadano diminuendo coll'aumentare della densità dei metalli; ed anzi in questo gruppo, limitando le osservazioni ai veri solfuri, perchè per quanto riguarda i seleniuri, gli arseniuri e gli antimoniuri, il piccolo numero di specie note non permette di giungere a conclusioni generali, si osserva che le deformazioni elevate, pari a 1,612 nelle specie monometriche, si hanno esclusivamente nelle specie contenenti metalli leggeri.

VII.

Dato il discreto accordo che si nota negli esempi riferiti fra le conclusioni teoriche ed i risultati sperimentali, riesce interessante di stabilire se le costanti da me indicate con le lettere Q_3 e Q_4 possano avere un qualche significato teorico ben definito, oppure se debbano semplicemente considerarsi come valori empirici dedotti da un numero più o meno grande di osservazioni sperimentali.

A questo scopo considero i tre valori Q_3, Q_4, Q_4', fra i quali, come ho detto, esiste la relazione che passa fra la semidiagonale di un cubo e le semialtezze del cubo stesso e dell'ottaedro ad esso circoscritto.

Questa relazione può spiegarsi tenendo conto di quanto ho detto nelle prime pagine del presente studio riguardo alla interpretazione che può darsi alle costanti che spesso compariscono nell'esame dei fenomeni fisici; basta ammettere che le due costanti Q_3 e Q_4 rappresentino rispettivamente la semidiagonale e la semialtezza di un reticolato cubico determinato, il quale corrisponderebbe al tipo cristallografico proprio della materia considerata indipendentemente da qualsiasi modificazione derivante dai vari stati che può assumere.

Ed in questo caso anche Q_4' verrebbe ad avere un significato, perchè corrisponderebbe alla semialtezza del reticolato ottaedrico derivabile dal sopraccennato reticolato cubico.

Da questo concetto risulta come conclusione che, mentre per un lato occorrerebbe ammettere che il detto tipo cristallino debba essere monometrico, per altro lato sarebbe necessario dare al reticolato cubico fondamentale una determinata grandezza reale.

Per quanto riguarda la prima di queste conseguenze, io credo

che molto facilmente si possa dimostrare: infatti, per quanto considerando i sistemi cristallini dal lato puramente geometrico si venga alla conclusione che il sistema triclino è quello che rappresenta il caso più generale, se invece si esamina il fenomeno cristallogenico dal lato fisico, si nota il fatto inverso, poichè se si ammette che la comparsa dello stato cristallino dipenda da una speciale deformazione del mezzo che tende a cristallizzare, quanto più i caratteri dipendenti dallo stato cristallino assunto dal mezzo stesso si allontaneranno da quelli inerenti allo stato amorfo, tanto più la deformazione sarà grande. Considerando i sistemi cristallini a questa stregua, è evidente che il sistema monometrico è quello corrispondente alla deformazione più semplice.

Ora, se si tien conto che col comparire di determinati stati nella materia iniziale si deve pure avere la comparsa di caratteri chimici i quali, tanto più tendono a differenziarsi, quanto più i detti stati speciali, che possono essere rappresentati o da un elemento chimico oppure da un composto qualunque, si allontanano dallo stato iniziale della materia stessa, è logico di ammettere che lo stesso fatto avvenga anche per i caratteri fisici e quindi anche per quelli cristallografici, per cui ne risulta che il tipo cristallino assunto dalla materia iniziale deve essere quello meno complicato dal lato fisico e quindi il monometrico.

In quanto poi si riferisce al concetto di una grandezza assoluta per il reticolato fondamentale, esso non urta per nulla col fatto che le dimensioni dei cristalli sembrano variare senza legge definita ed indipendentemente dai loro caratteri cristallografici. Infatti, ammesso che i reticolati cristallini siano dovuti a particelle che vengono a collocarsi le une rispetto alle altre in determinate posizioni, è evidente che le distanze che, nelle varie direzioni, separano le particelle di uno stesso reticolato debbono essere funzioni di energie definite che emanano nelle dette direzioni dalle particelle stesse, e quindi debbono essere rappresentate da valori finiti e connessi con il complesso dei caratteri delle sostanze costituenti le particelle stesse.

Partendo da questi principî è possibile di ottenere, per il reticolato cubico fondamentale proprio della materia considerata allo stato iniziale, valori che concordano in modo quasi assoluto

con quelli rappresentati dalle costanti Q_3 e Q_4, le quali sono sufficienti per determinare il reticolato cubico stesso.

Si consideri una particella omogenea amorfa; poichè il suo carattere essenziale è quello di presentare proprietà uguali in ogni direzione, si potrà esprimere il complesso di questi suoi caratteri, indipendentemente dalla sua reale forma, mediante una sfera di cui essa occuperebbe il centro O ed il cui raggio rappresenterebbe quella determinata quantità di energia, uguale in ogni senso, di cui essa dispone.

Se questa energia subisce qualche variazione nella sua intensità e se non sarà accompagnata da deformazioni, l'equilibrio fisico considerato si manterrà sempre sferico; in caso differente l'energia non sarà più uguale in ogni senso e si avrà quindi la comparsa di discontinuità rispetto a determinate direzioni. Per cui, se con A e con B si indicano due punti dell'equilibrio fisico stesso, mentre nel primo caso, per qualunque valore di OA ed OB si avrà

$$OA = OB$$

nel secondo invece, mancando quest'eguaglianza, si potranno avere casi differenti che in generale potranno essere espressi dalle equazioni:

$$OA = aOB \qquad OA = \frac{a}{OB}$$

oppure dalle loro reciproche

$$OA = \frac{1}{aOB} \qquad OA = \frac{OB}{a}$$

essendo a un fattore variabile connesso colla intensità e col tipo della deformazione.

Se si costruiscono i luoghi corrispondenti a queste equazioni si nota che, per ogni valore di a le due equazioni:

$$\text{(I)} \qquad OA = aOB \qquad OA = \frac{OB}{a}$$

portano a coppie di rette che si possono considerare come coppie di elementi corrispondentisi in due fasci di rette inversamente uguali, aventi il loro sostegno in O; invece le altre due equazioni:

$$\text{(II)} \qquad OA = \frac{a}{OB} \qquad OA = \frac{1}{aOB}$$

portano a coppie di iperboli equilatere riferite agli asintoti, e che si possono considerare come collegate da una relazione involutoria, costituendo esse, col variare di a, due fasci di iperboli equilatere aventi il loro sostegno nella retta all'infinito determinata dagli assi coordinati che rappresentano gli asintoti comuni a tutte le iperboli appartenenti ai due fasci.

Tanto nella coppia dei fasci di rette corrispondenti alle prime due equazioni, quanto nella coppia di fasci di iperboli si può ottenere la comparsa di elementi doppi quando si ponga $a = 1$.

Nel primo caso un elemento doppio sarà rappresentato dalla bisettrice dell'angolo degli assi coordinati positivi, e poichè le due equazioni (I) si ridurranno al tipo unico

$$OA = OB$$

esse porteranno nuovamente al caso di deformazione nulla.

Nel secondo si otterrà delle (II) una equazione unica

$$OA = \frac{1}{OB}$$

che rappresenta l'iperbole equilatera di potenza uguale all'unità.

Se ora si considera un reticolato cubico, tenendo conto dell'importanza che in esso assumono gli assi trigonali e quadratici, suppongasi che A e B rappresentino rispettivamente le estremità di un asse trigonale e di uno quadratico; fra essi esiste la relazione

$$OA : OB :: \sqrt{3} : 1$$

da cui si ricava:

$$OB = \frac{OA}{\sqrt{3}}. \tag{III}$$

Se si segna rispetto agli assi coordinati prima considerati la retta corrispondente a questa equazione, si osserva che essa incontra tutte le iperboli sopraccennate in punti differenti, i quali rappresenterebbero tutti i casi nei quali ognuna delle equazioni stesse porta ad un tipo di deformazione monometrica; se fra tutte queste iperboli si considera quella che è elemento doppio nei due fasci e che corrisponde, come si vide, alla equazione

$$OA = \frac{1}{OB}$$

il punto M in cui essa è incontrata dalla retta rappresentata dalla (III) avrà come coordinate due valori di x ed y tali che si avrà:

$$x = OB = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} = 0{,}7598...$$

$$y = OA = \sqrt[4]{3} = 1{,}3160...$$

valori che dànno rispettivamente il semiasse e la semidiagonale di un reticolato cubico che si può considerare come corrispondente al tipo più semplice di deformazione, poichè nell'equazione che ad essa corrisponde si è posto $a = 1$.

Ora questi valori sono, si può dire, del tutto coincidenti con quelli ottenuti prima per Q_3 e Q_4, per cui si possono sostituire ad essi; in tal caso si ottiene, determinando A_1, A_2, A_3, A_4 nel caso del sistema monometrico:

$$A_1 = 1{,}0746... \quad A_2 = 1{,}6119... \quad A_3 = 0{,}9305... \quad A_4 = 0{,}6203...$$

Ne risulterebbe di qui un fatto che potrebbe avere una certa importanza teorica, quando l'impiego delle dette costanti potesse essere generalizzato, poichè si giungerebbe alla seguente legge: *la comparsa dello stato cristallino nella materia considerata indipendentemente da qualsiasi perturbazione connessa con le speciali proprietà delle singole sostanze, avviene in modo che la deformazione assuma il tipo più semplice possibile, per quanto si riferisce tanto all'intensità ed all'andamento del fenomeno, quanto al tipo ed alla grandezza assoluta del reticolato cristallino fondamentale.*

L'esistenza poi nelle singole sostanze, considerate come dipendenti da speciali stati della materia, di caratteri cristallografici particolari, verrebbe in tal modo a dipendere dal fatto che esse, in causa appunto delle differenze nelle loro singole proprietà, presenterebbero una tendenza ad avere caratteri differenziali più spiccati sia comparandole le une alle altre, sia rispetto alla materia considerata allo stato iniziale.

VIII.

Sostituendo i valori teorici ottenuti per Q_3 e Q_4 nelle equazioni parametrali proprie del sistema romboedrico e dimetrico

in generale, esse assumono rispettivamente i tipi seguenti nel romboedrico:

$$\frac{A}{\sqrt[4]{3}} = c_3 \qquad \frac{\sqrt[4]{3}}{A} = c_3 \qquad A\sqrt[4]{3} = c_3 \qquad \frac{1}{A_4\sqrt[4]{3}} = c_3$$

e nel dimetrico essendo $Q_4 = \frac{1}{Q_3}$:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}\,A} = c_4 \qquad \frac{\sqrt{2}\,A}{\sqrt[4]{3}} = c_4.$$

Tale sostituzione ha, per quanto riguarda il sistema romboedrico, un grande vantaggio in quanto che permette di ridurre, anche in detto sistema, come nel dimetrico, a due soli i casi da considerare, poichè si può dimostrare che le quattro equazioni parametrali possibili nel detto sistema si possono, quando A rimanga costante, dividere in due gruppi, ognuna delle quali porta a forme compatibili le une colle altre. Infatti si considerino le quattro equazioni suddette e, supponendo di dare un determinato valore ad A, si chiamino con c_3' c_3'' c_3''' c_3'''' i valori corrispondenti di c_3, si ha:

$$1^a \quad c_3' = \frac{\sqrt[4]{3}}{A} \qquad 2^a \quad c_3'' = \sqrt[4]{3}\,A$$

$$3^a \quad c_3''' = \frac{A}{\sqrt[4]{3}} \qquad 4^a \quad c_3'''' = \frac{1}{A\sqrt[4]{3}}.$$

Se si considerano le coppie di equazioni 2ª e 3ª e 1ª e 4ª e si deducono rispettivamente dalla 3ª e dalla 4ª i valori di A

$$A = c_3'''\sqrt[4]{3} \qquad A = \frac{1}{\sqrt[4]{3}\,c_3''''}$$

e si sostituiscono questi valori nella seconda e nella prima, si ottiene:

$$c_3'' = c'''\sqrt{3} \qquad c_3' = c_3''''\sqrt{3}.$$

Inversamente se si considerano le stesse coppie di equazioni e si ricavano rispettivamente i valori di A della 2ª e della 1ª, ottenendo in tal modo:

$$A = \frac{c_3''}{\sqrt[4]{3}} \qquad A = \frac{\sqrt[4]{3}}{c_3'}$$

e si sostituiscono rispettivamente questi valori nella 3ª e nella 4ª. si ottiene:

$$c_3''' = \frac{c_3''}{\sqrt{3}} \qquad c_3'''' = \frac{c_3'}{\sqrt{3}}.$$

Ora come è noto, nel sistema romboedrico, quando è data una sostanza per la quale c_3 ha un determinato valore, le forme che corrispondono rispettivamente ai simboli dati da $c_3\sqrt{3}$ e da $\frac{c_3}{\sqrt{3}}$ sono compatibili con la costante data e corrispondono ai simboli $11\bar{2}1(41\bar{2})$ e $11\bar{2}3(210)$.

Poichè nei valori di $c_3', c_3'', c_3''', c_3''''$ non hanno influenza di sorta le grandezze che possono essere assunte dall'angolo $0001.10\bar{1}1$, le relazioni che collegano due a due le quattro equazioni parametrali sussisteranno anche nel caso in cui si tratti di sostanze monometriche.

In questo sistema i valori corrispondenti a $c_3\sqrt{3}$ e $\frac{c_3}{\sqrt{3}}$, essendo $c_3 = 1{,}2246...$, portano a facce appartenenti ancora alle forme di simbolo $41\bar{2}$ e 210 e precisamente a determinati gruppi di facce di dette forme che sono in simmetria esagonale rispetto agli assi trigonali; se in un cristallo monometrico che presenti la combinazione 100. 111. 421. 210 si considera l'asse trigonale normale alla faccia 111 come principale, cioè come corrispondente all'unico asse trigonale delle sostanze romboedriche, le facce appartenenti ai gruppi considerati sono rispettivamente rappresentate dai simboli:

$$41\bar{2},\ 14\bar{2},\ \bar{2}41,\ \bar{2}14,\ 1\bar{2}4,\ 4\bar{2}1$$
$$210,\ 120,\ 021,\ 012,\ 201,\ 102.$$

Il fatto che le quattro equazioni parametrali corrispondenti all'asse trigonale si possono suddividere in due gruppi ognuno formato da due equazioni equivalenti, non implica però che nel sistema romboedrico si possa sempre ad arbitrio scegliere l'una o l'altra equazione di ogni coppia per determinare c_3, poichè, per quanto si disse prima, quando una delle equazioni porta ad una forma di tipo romboedrico, la sua equivalente porta invece ad una forma di tipo esagonale (isosceloedro); ne risulta quindi che lo scambio arbitrario delle due equazioni sarà solamente possibile quando si tratti di sostanze i cui cristalli presentino

simmetria esagonale. Invece quando si tratti di sostanze i cui cristalli presentano simmetria trigonale si dovrà assumere quella equazione che porta a forme appartenenti alla serie dei romboedri.

Così ad esempio, nella covellite applicando le due equazioni equivalenti:

$$\frac{Q_3}{A} = c_3' \qquad \frac{1}{AQ_3} = c_3''$$

si ottengono per c_3' e c_3'' rispettivamente valori molto prossimi a 1,146 ed a 0,6616; ora mentre il primo di detti valori corrisponde ad una forma appartenente alla serie dei romboedri, e precisamente alla $10\bar{1}1$ di Dana (1), invece il secondo porterebbe all'isosceloedro $11\bar{2}3$; e poichè la covellite è trigonale ne risulta la necessità di assumere il primo valore.

Invece nel caso della niccolite, la quale presenta simmetria esagonale, si possono assumere indifferentemente l'una o l'altra delle due equazioni:

$$\frac{A}{Q_3} = c_3' \qquad AQ_3 = c_3''$$

che portano rispettivamente per c_3' e c_3'' ai valori 0,8194 e 1,419, i quali corrispondono rispettivamente alle costanti date per questa specie da Dana (2) e da Goldschmidt (3).

Sebbene queste equivalenze, che sussistono fra coppie di equazioni parametrali romboedriche, riducano sensibilmente il numero dei tipi cristallografici che si possono avere per una data sostanza, anche solo rimanendo nei sistemi monometrico, romboedrico e dimetrico, quando rimanga costante A, tuttavia non verrebbe a mancare la possibilità che questi tipi differenti possano esistere dando luogo in tal modo alla comparsa di un tipo di polimorfismo speciale. Questo polimorfismo potrebbe indicarsi col nome di *geometrico*, poichè nelle sostanze che lo presenterebbero, essendo costante A, sarebbero pure uguali le densità o solo varierebbe la relazione che collega A colla co-

---

(1) *System of Mineralogy*, 1891, p. 68.

(2) Loc. cit., pag. 71.

(3) *Index der Krystallformen der Mineralien*, 1891, 3 Bd., p. 75.

stante propria del sistema a cui appartiene la sostanza che si considera.

Ora in realtà esempi di questo tipo di polimorfismo geometrico non sono noti; essendo l'unico che molto si approssimi ad esso il caso della blenda e della würtzite, le quali presentano densità pressochè uguali ed hanno nelle loro costanti una relazione estremamente vicina a quella che si richiede perchè rappresentino due tipi cristallografici l'uno inverso dell'altro. Infatti, come si è visto, mentre per la blenda, partendo dal valore 4,03 per la densità, si giunge mediante l'equazione $\frac{Q_3}{A} = c_3$ al valore 1,2246 proprio delle specie monometriche, se si assume invece l'equazione inversa $\frac{A}{Q_3} = c_3$ si ottiene, mantenendo costante A e quindi D:

$$c_3 = \frac{1,0746}{1,3160} = 0,8165,$$

valore estremamente vicino a quello della wurtzite pari a 0,8175.

Ora il fatto della quasi assoluta mancanza di casi di polimorfismo geometrico potrebbe costituire una obbiezione rispetto alla reale esistenza di accordi fra i risultati teorici e quelli sperimentali.

Io credo però che questa obbiezione non possa assumere grande importanza per il fatto che è logico di ammettere che, pur essendo possibile la comparsa di più tipi cristallografici in una data sostanza, uno fra questi presenti la massima tendenza a formarsi quando le condizioni in cui la sostanza assume lo stato cristallino, determinino in essa una data contrazione nel volume molecolare e quindi la comparsa di un dato assettamento interno; e poichè nei casi di polimorfismo geometrico, rimanendo costante la densità, devesi ammettere un grado uguale di deformazione di volume, d'onde ne risulterebbe la persistenza di un determinato tipo di assettamento molecolare, non vi sarebbe alcuna ragione perchè i caratteri cristallografici, a meno che non intervengano cause speciali, possano presentare comportamento variabile, mentre gli altri caratteri fisici rimangono costanti.

D'altra parte queste mie ricerche non hanno certo la pre-

tesa di risolvere in modo completo i complicatissimi problemi attinenti alla comparsa dello stato cristallino nelle sostanze ed il tipo che questo stato deve assumere in determinate condizioni; esse debbono solo considerarsi come una prima contribuzione diretta a stabilire un indirizzo di ricerche il quale può essere utile allo studio delle questioni inerenti ai fenomeni cristallogenici e per conseguenza non v' ha ragione alcuna che le conclusioni a cui sono giunto dall'esame delle specie considerate nelle precedenti pagine, debbano assumere un carattere generale, potendo anche avvenire che gli esempi da me riportati costituiscano un caso particolare di una legge più generale.

Istituto Mineralogico dell'Università di Torino.
1° Marzo 1909.

Risultati sperimentali su funi d'acciaio usate.

Nota del Socio CAMILLO GUIDI.

(Con una Tavola).

Scopo della presente Nota è di riferire sui risultati sperimentali da me ottenuti sopra alcuni spezzoni di funi d'acciaio tolte di servizio da funicolari, onde trarne qualche utile conseguenza circa le condizioni da imporre per mantenere in servizio nel miglior modo questi organi flessibili di trasmissione, importantissimi e pur molto delicati.

Gli spezzoni mi vennero favoriti dall'*Ufficio speciale delle ferrovie*, e precisamente:

1° Dal *Circolo di Milano*, in data 10 marzo 1908 ebbi uno spezzone di cm. 40 circa di lunghezza, tagliato dalla fune della funicolare di Regoledo.

2° Il *Circolo di Torino* inviò:

a) con lettera 24 aprile 1908: 4 spezzoni tolti dalla funicolare del Castellaccio in Genova, ed altri 4 spezzoni tolti dalla funicolare di Mondovì;

b) con lettera 24 agosto 1908: uno spezzone tolto dalla funicolare genovese (S. Anna) in Genova;

c) con lettera 21 settembre 1908: due spezzoni tolti dalla funicolare di Superga;

d) con lettera 28 settembre 1908: uno spezzone tolto dalla funicolare del Monte dei Cappuccini in Torino;

e) con lettera 4 dicembre 1908: uno spezzone tolto dalla funicolare del Castellaccio in Genova.

3° Il *Circolo di Napoli* con lettere del 6 e 27 luglio 1908 inviò 3 spezzoni tolti dalle funicolari del Vomero (Montesanto e Chiaia) di Napoli.

Ad eccezione dello spezzone troppo corto e già scomposto, inviato dal Circolo di Milano, tutti gli altri furono assoggettati ad esperienze.

Se si eccettuano le funi delle funicolari del Vomero, messe ben presto fuori di servizio, tutte le altre presentano i fili più o meno profondamente consumati in dati tratti equidistanti; consumo offrente l'aspetto di una limatura, prodotta da scorrimento relativo dei trefoli fra loro. In tali condizioni riescono, per lo più, poco concludenti le prove sui fili; non si può infatti parlare di una prova regolare di torsione, perchè il più delle volte , dopo uno o due giri avviene la rottura nelle sezioni indebolite, nemmeno di una prova al piegamento; la stessa prova a tensione riesce poco concludente, non potendosi formare un criterio giusto riguardo alla resistenza unitaria ed all'allungamento di rottura. D'altra parte le sezioni consumate dei fili si trovano, per buona ventura, sempre sfalzate nella fune, di guisa che non ha poi grande interesse la conoscenza delle proprietà resistenti del filo nelle dette sezioni. Era quindi da attribuirsi maggiore importanza alla prova a tensione sulla fune intera, e ciò feci misurando gli allungamenti fino al centesimo di millimetro, onde ottenere un valore abbastanza attendibile del modulo di elasticità, allo scopo di riconoscere se le qualità elastiche della fune fossero alterate coll'uso.

Per calcolare il modulo di elasticità occorreva conoscere la sezione metallica resistente attuale della fune. Osservando che il consumo è uniforme sulla lunghezza della fune, feci un primo calcolo della detta sezione moltiplicando quella primitiva pel rapporto del peso unitario della fune consumata al peso unitario della fune nuova. Ma questo calcolo, oltrechè non tiene conto di una possibile variazione di peso dell'anima e delle so-

stanze lubrificanti, non contempla la eventuale presenza di rotture di fili; ne feci quindi un secondo moltiplicando la sezione primitiva per il rapporto fra la resistenza offerta dalla fune usata, e quella della fune nuova. Dei due valori così calcolati presi la media a rappresentare la probabile sezione metallica resistente. Così, ad esempio, per la prima fune il primo calcolo fornisce $238 \frac{2,00}{2,20} =$ mm² 216; il secondo dà $238 \frac{26,40}{28,75} =$ mm² 219 e quindi presi come sezione resistente mm² 217. In questo caso i due risultati si possono riguardare come eguali, ma in altri il divario è notevole. A titolo di esempio riporto qui appresso le deformazioni constatate per questa prima fune, partendo da uno sforzo iniziale di tonn. 2, ed il relativo calcolo del modulo di elasticità E:

Sforzi: tonn.	2	3	4	5	6	2
Allungam. su 50 cm. $^{mm}/_{100}$	0	15	30	45	61	5
Differenze	15	15	15	16		

e quindi, ricordando che la sezione metallica sopra calcolata è di cm² 2,17, si ha

$$E = \frac{1}{2,17} \; \frac{50000}{15} = 1536 \; {}^{t}/_{cm^2}.$$

L'allegata tabella contiene i dati ed i risultati sperimentali relativi alle diverse funi. Essa è divisa in tre parti: nella parte a sinistra sono riportati i dati relativi alle funi nuove ed alle corrispondenti prove di collaudo; nella parte centrale trovansi i dati relativi al servizio; nella parte a destra i risultati ottenuti sulle funi usate. A complemento della tabella servono le osservazioni che seguono, il cui numero d'ordine corrisponde al n° d'ordine delle funi indicate nella tabella.

1° *Funicolare del Castellaccio* (tronco superiore). — Ogni trefolo è formato di 8 fili di mm. 2,2 di diametro, avvolti con passo di mm. 140 attorno ad un trefolino composto di 7 fili di mm. 1,3 di diametro, uno dei quali serve di anima, attorno a cui sono avvolti gli altri con passo di mm. 70. Il passo delle eliche dei trefoli è di mm. 260.

La fune si presenta all'esterno uniformemente consumata, ma nello spezzone non si vedono fili rotti. I fili grossi nei tratti ove affiorano alla superficie esterna della fune sono consumati per la lunghezza di mm. 18 circa.

Le sezioni maggiormente consumate dei fili grossi hanno la forma di un segmento circolare di 2,95 mm² circa cioè 0,78 dell'area primitiva. In queste sezioni i fili sopportano soltanto 2 piegamenti di 90°, un giro e mezzo di torsione, ed una resistenza unitaria a tensione di 142 $^{Kg}/_{mm^2}$; l'allungamento di rottura per tensione, misurato su 30 cm., è soltanto del 1 $^0/_0$. I fili interni dei trefoli offrono una resistenza a tensione di 117 $^{Kg}/_{mm^2}$ con un allungamento del 1,5 $^0/_0$, sopportano 45 torsioni, e 20 piegamenti.

2° Altro spezzone uguale al precedente.

3° *Funicolare del Castellaccio* (tronco inferiore). — La formazione della fune è quella stessa del n° precedente. Questo spezzone si presenta molto consumato; su di un tratto lungo cm. 50 si riscontrano 18 rotture di fili grossi. Oltre al consumo dei fili esterni, la fune è molto deteriorata anche per la ruggine; così i fili grossi esterni, come i più piccoli interni sono fragilissimi: i fili grossi, nelle sezioni più consumate, le quali presentano un'area di mm² 1,33 circa, cioè il 35 $^0/_0$ della primitiva, sopportano appena un piegamento di 90°.

4° *Funicolare di Mondovì.* — Ciascun trefolo è formato da un filo di ferro centrale, sul quale si avvolgono in senso destro 5 fili d'acciaio; questo trefolino è poi rivestito da altri 11 fili d'acciaio avvolti in senso sinistro; tutti i fili hanno il diametro di mm. 1,9. L'avvolgimento dei trefoli nella fune è in senso destro. Passo delle eliche dei fili esterni dei trefoli = mm. 115. Passo delle eliche dei trefoli = mm. 230. Esternamente la fune apparisce poco consumata, internamente invece i fili presentano profonde limature attaccate anche da ruggine, lunghe cm. 4, distanziate di circa cm. 7. Nei punti maggiormente limati il filo presenta una sezione ovale di area mm² 1,9 ~ cioè 0,67 della primitiva; in questi punti il filo è fragilissimo, sopporta appena un piegamento di 90°. Sulla lunghezza libera di cm. 65 fra le teste, lo spezzone presenta 24 rotture di fili.

5° Campione simile al precedente: non presenta fili rotti.

6° *Funicolare genovese* (S. Anna). — Ogni trefolo è piatto

e risulta di un'anima in ferro piatto di mm. $4,5 \times 1,5$, attorno a cui si avvolgono 11 fili di diametro mm. 1,00; su questi si avvolgono ancora altri 11 fili di mm. 2,10 di diametro. Passo dell'elica del filo grosso = mm. 80; passo dell'elica del trefolo nella fune = mm. 200.

La fune apparisce esternamente un poco logorata in modo uniforme, ma i trefoli nella parte interna presentano un consumo molto più marcato: i fili grossi risultano limati profondamente su tratti lunghi cm. 5 ~. Nei punti di maggior consumo il filo grosso presenta una sezione pressochè rettangolare di area mm^2 1,60 ~, cioè 0,46 della primitiva. In questi punti il filo è fragilissimo, non sopportando un piegamento di 90°.

7° *Funicolare di Superga.* — Ogni trefolo risulta di 8 fili avvolti ad elica attorno ad un'anima di canapa. Passo dell'elica del filo nel trefolo = mm. 130; passo dell'elica del trefolo nella fune = mm. 280; diametro del filo = mm. 2,10.

All'esterno la fune apparisce poco consumata e non si vedono fili rotti; all'interno della fune ogni filo presenta dei tratti lunghi cm. 5 circa, distanziati fra loro cm. 10, nei quali è profondamente limato. Nei punti di maggior consumo la sezione del filo è quella di un segmento circolare di area mm^2 1,90 ~, cioè 0,55 della primitiva; in questi punti il filo sopporta appena un piegamento di 90°, inoltre il filo non resiste a più di $2\,{}^1/_2$ torsioni, mentre la resistenza a tensione è rilevante, circa 137 $^{Kg}/_{mm^2}$, ma con un allungamento del 0,7 $^0/_0$.

8° *Funicolare del Monte dei Cappuccini.* — Ogni trefolo è formato da un filo centrale, anima, attorno a cui si avvolgono con passo di mm. 80 altri 6 fili dello stesso diametro di mm. 2,00. Passo dell'elica del trefolo nella fune = mm. 160.

La fune si presenta esternamente poco consumata; ma all'interno i fili hanno dei tratti limati, e nei punti maggiormente logorati la sezione del filo è quella di un segmento circolare di area mm^2 2,97, cioè 0,94 della primitiva; in questi punti il filo sopporta soltanto un piegamento e mezzo di 90°,

9° *Funicolare di Montesanto al Vomero.* — Ogni trefolo è composto di un filo centrale, anima, di mm. 2,5, attorno a cui si avvolgono 6 fili di mm. 2,6; questo trefolino è poi rivestito da altri 12 fili dello stesso diametro. Passo dell'eliche dei fili esterni dei trefoli = mm. 150; passo dell'elica del trefolo = mm. 400. *Gli avvolgimenti sono tutti nello stesso senso.*

Lo spezzone apparisce esternamente ben poco consumato; ma presenta due fili rotti.

Scomposto il rimanente pezzo, lungo m. 1,40, dello stesso saggio si scoprono molte rotture interne di fili: 13 in un trefolo, 12 in un altro, una in ciascuno di altri due trefoli. Sperimentati a tensione i due trefoli più danneggiati, uno presentante 9 rotture su cm. 60 fra i cunei di attacco, e l'altro 5, si ottennero rispettivamente le resistenze di t. 7,00 e di t. 8,40. Sperimentati anche molti fili di questo spezzone si ebbero i risultati seguenti medi su 12 fili esterni: resistenza totale a tensione Kg. 866 con allungamento del 2,5 %, 20 torsioni e 5 $^1/_2$ piegamenti di 90°, ed i seguenti risultati su 12 fili interni: resistenza totale a tensione Kg. 767 con allungamento del 3,2 %, 23 torsioni e 5 piegamenti di 90°.

Il moderato consumo dei fili di questa fune ed i buoni risultati delle prove non spiegherebbero le molte rotture di fili constatate dopo un breve esercizio; mancano gli elementi per giudicare se esse debbano ascriversi a condizioni speciali dell'impianto.

10° Spezzone analogo al precedente, tagliato dal tratto della fune all'esterno dei serrafune, e che perciò non sopportò sforzo alcuno di servizio; esso accompagnò le carrozze avvolto sui respingenti a valle, esposto alle intemperie.

11° *Funicolare di Chiaia al Vomero.* — Ogni trefolo risulta di un trefolino formato di 4 fili di mm. 2,34 attorno a cui si avvolgono 8 fili di mm. 3,35. Peraltro uno dei trefolini è invece costituito da un filo centrale, anima, attorno al quale si avvolgono altri 6 fili.

Passo dell'elica del filo grosso nel trefolo = mm. 150
„ „ del trefolo nella fune = „ 350

Gli avvolgimenti sono nello stesso senso.

Questo spezzone, analogamente al precedente, non sopportò sforzo di servizio, ma accompagnò le carrozze come sopra fu detto.

Prescindendo dalla fune di Montesanto al Vomero, tolta molto presto di servizio, tutte le altre, più o meno considere-

volmente consumate, hanno dimostrato tuttavia una resistenza molto rilevante, tenuto conto del consumo; ma, in generale, un allungamento percentuale di rottura scarsissimo, ed un valore molto elevato del modulo di elasticità; tutti fatti che uniti alla constatata fragilità dei singoli fili dimostrano evidentemente un notevole incrudimento del materiale. Nella mia precedente Memoria sui cavi d'acciaio e di canapa (1) ho fatto vedere, con risultati sperimentali, come, specialmente sui fili d'acciaio lucidi, come quelli di cui qui si tratta, la ripetizione di sforzi, eccedenti appena il limite di elasticità, abbia per conseguenza l'incrudimento del materiale. Si può quindi ragionevolmente concludere che in generale le funi delle funicolari non ostante le prescrizioni regolamentari, si trovano esposte in servizio, per cause diverse, quali: false manovre, azione dei freni, sollecitazioni alternate ripetute nell'avvolgimento sulle pulegge, sollecitazioni dinamiche accompagnate da vibrazioni ecc., a sforzi superanti il limite di elasticità del materiale, i quali ne producono il rapido deperimento.

Se tutto ciò consiglia a richiedere nei regolamenti, che la calcolata tensione massima della fune in servizio sia notevolmente inferiore al limite di elasticità, dovrebbe indurre anche ad adottare un materiale meno duro. Al giorno d'oggi si tende ad esagerare nella resistenza dei fili d'acciaio raggiungendo frequentemente i 200 $^{Kg}/_{mm^2}$; ora se la durezza del materiale giova contro il consumo dei fili per attrito nello scorrimento relativo che subiscono i vari trefoli, d'altra parte coll'eccessiva durezza il filo perde di plasticità, l'allungamento percentuale di rottura risulta troppo scarso, la fune diviene più sensibile all'azione dannosa delle ripetizioni ed alternative di sforzi e delle sollecitazioni dinamiche, azione aggravata anche dal fatto della diminuita flessibilità della fune.

È interessante a sapersi per le funi metalliche a quale distanza dalla sezione di rottura un filo ridiviene capace, in virtù dell'attrito che si sviluppa fra esso ed i fili adiacenti, a resi-

(1) *Risultati sperimentali su cavi di acciaio e di canapa,* " Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino ", 1908.

stere, nella stessa misura di questi, allo sforzo di trazione, a cui è sottoposta la fune, per poi dedurre a quale distanza minima possono trovarsi le sezioni di rottura di più fili senza che la fune subisca una diminuzione di resistenza maggiore di quella corrispondente alla rottura di un solo filo. Abbiamo risolto tale problema sui due spezzoni delle funicolari al Vomero, quella di Chiaia e l'altra di Montesanto, nel modo seguente. Piazzato il saggio nella macchina di prova, si fa in adiacenza della rottura di un filo, battendo con un colpo secco su di uno scalpello a taglio finissimo, un'impronta contemporaneamente sul filo rotto e su di un adiacente, in modo che le due impronte si trovino esattamente in una medesima sezione trasversale della fune. Esercitando ora uno sforzo di trazione sulla fune si vedranno le due impronte scostarsi sensibilmente fra loro, perchè il filo rotto non può, in adiacenza della rottura, partecipare alla deformazione elastica e plastica che subiscono i fili adiacenti, i quali son tesi; e per mezzo di un catetometro si può misurare lo scorrimento relativo. Facendo invece le stesse impronte ad una sufficiente distanza dalla rottura, si vedrà che esse si spostano sempre di conserva, il che prova che a quella distanza il filo rotto, in grazia del forte attrito che, nella fune in tensione, si sviluppa fra esso ed i fili adiacenti, partecipa alla stessa deformazione, e per conseguenza anche allo stesso sforzo di essi.

Ora ecco i risultati ottenuti:

Sulla fune della funicolare di Chiaia, lo scorrimento relativo di un filo esterno rotto, in adiacenza della rottura, rispetto ad un suo adiacente, assoggettando la fune fino allo sforzo di 50^t ha raggiunto mm. 0,98, mentre lo stesso filo alla distanza di mm. 140 dalle impronte adiacenti alla rottura (distanza presso a poco eguale al passo dell' elica del filo nel trefolo) non ha manifestato alcuno scorrimento rispetto al detto filo adiacente. Ripetuta l'esperienza su di un altro filo rotto si è avuto lo stesso risultato. Ed anche su di un terzo filo rotto lo scorrimento, a distanza di un passo dell'elica dalla sezione di rottura, è stato nullo.

Finalmente osservando una prima coppia d'impronte fatte, com'è stato precedentemente detto, su di un quarto filo rotto e su di un suo adiacente, in vicinanza della sezione di rottura, e poi un'altra coppia a distanza (valutata secondo l'asse della

fune) di mm. 125 dalla prima, si è trovato che lo spostamento relativo delle prime tacche, per un aumento di sforzo di 30 tonn. (da 2 a 32^t) era di mm. 0,38, mentre le seconde tacche non subirono alcuno scorrimento relativo.

Se allo sforzo variabile del filo rotto crescente dal valore zero (in corrispondenza della prima coppia d'impronte) al valore finale eguale allo sforzo sopportato dall'adiacente filo sano (nella sezione in cui il filo rotto comincia a divenire solidale coll'adiacente sano) si sostituisce uno sforzo medio costante, che supporremo la metà del valore finale, l'allungamento subìto dal filo rotto, in quel tratto, sarà la metà di quello subìto nello stesso tratto dal filo sano adiacente, ed allora raddoppiando lo scorrimento osservato di mm. 0,38, si avrà in mm. 0,76 l'allungamento del filo sano nel detto tratto che indicheremmo con x. D'altra parte sulla stessa fune e su di una lunghezza di mm. 468 è stato osservato (prendendo la media delle deformazioni su due lati diametralmente opposti) un allungamento di mm. 2,96 per l'aumento di sforzo di 30 tonn. (da 2 a 32 t.); quindi può ricavarsi x dalla semplice proporzione

$$0,76 : x = 2,96 : 468$$

da cui

$$x = \text{mm. } 120.$$

Questo risultato andrebbe d'accordo col fatto che le seconde impronte non subirono alcuno spostamento relativo.

Sulla fune della funicolare di Montesanto, ripetuta l'esperienza su due fili rotti, si è avuto, per lo sforzo di 50 tonn. in media uno scorrimento di mm. 0,47 in adiacenza della rottura, e nessuno scorrimento a distanza di cm. 15.

Dai risultati delle descritte ultime esperienze possiamo concludere che per le due funi sperimentate *un filo rotto ridiviene solidale coi fili adiacenti ad una distanza dalla sezione di rottura, che è eguale od anche inferiore al passo dell'elica del suo avvolgimento.*

Torino, 7 marzo 1909.

N. d'ordine	F	Peso per m. corr. Kg.	Carico di rottura t.	Allungamento di rottura %	Perdita di resistenza %	Modulo di elasticità E t/cm²	*OSSERVAZIONI*
1	Funico in G	2,00	26,40	1,6	8,2	1536	Rottura di 3 trefoli fuori attacchi.
2	Id.	„	26,30	1,4	8,5	1290	„ 3 „ „
3	Id.	1,53	11,40	0,9	58,5	1110	„ 3 „ „
4	Id. d	2,25	24,80	1,2	30,5	1580	„ 3 „ „
5	Id. I	„	29,90	1,6	16,3	2000	„ 4 „ „
6	Id. Ge Geno	2,07	19,30	1,5	—	940	„ 3 „ „
7	Id. di	1,21	15,40	1,0	30,6	1670	„ 3 „ „
8	Id. de cini	1,10	15,30	3,4	—	1760	„ 2 „ „
9	Id. di (Nap	—	80,00	3,0	5,1	1060	„ di più fili grossi „
10	Id. I non	—	88,00	4,0	—	725	„ di molti fili grossi „
11	Id. di (Nap ha la	—	66,50	3,6	—	800	„ di più fili grossi „

(1) e

(2) d

(3) pi avvolge sulle pulegge del locomotore.

N. d'ordine	PROVENIENZA	Composizione: trefoli	Composizione: anime di canapa	Composizione: fili	Diametro: della fune	Diametro: dei fili	Sezione metallica	Peso per m. corr.	Carico di rottura: totale	Carico di rottura: per mm²	Allungamento di rottura	Durata di servizio	Chilometri percorsi	Lunghezza della fune in servizio	Allungamento permanente	Rotture di fili	Diametro puleggia d'avvolgimento	Tensione massima della fune in servizio	Diametro della fune	Sezione metallica attuale	Peso per m. corr.	Carico di rottura	Allungamento di rottura	Perdita di resistenza	Modulo di elasticità E	OSSERVAZIONI
		n°	n°	n°	mm.	mm.	mm²	Kg.	t.	Kg.	%	mesi		m.	m.	n.	m.	t.	mm.	mm²	Kg.	t.	%	%	t/cm²	
1	Funicolare del Castellaccio in Genova (tronco super.)	6	1	48● 42•	25,9	2,20 1,30	238	2,20	28,75	128	—	44	56382	700	3,025	99	4	2,171	25	217	2,00	26,40	1,6	8,2	1536	Rottura di 3 trefoli fuori attacchi.
2	Id. Id. Id.	”	”	”	”	”	”	”	”	”		”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	26,30	1,4	8,5	1290	” 3 ” ”
3	Id. Id. (tronco infer.)	”	”	”	24,9	”	”	”	27,50	116	2,2	89	118911	800	4,000	31	”	”	19	132	1,53	11,40	0,9	58,5	1110	” 3 ” ”
4	Id. di Mondovì	6	1	96 6	28	1,90	272 (1)	2,60	35,70	131	3,8	48	50000	587	8,99	1600	3,50	2,595	23	212	2,25	24,80	1,2	30,5	1580	” 3 ” ”
5	Id. Id.	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	24	231	”	29,90	1,6	16,3	2000	” 4 ” ”
6	Id. Genovese (S. Anna) in Genova	5	1	55● 55•	25	2,10 1,00	234	2,40	—	—	—	37	48168	380	3,10	12	2,50	2,200	23	202	2,07	19,30	1,5	—	940	” 3 ” ”
7	Id. di Superga (Torino)	6	7	48	23,5	2,10	166	1,60	22,20 (2)	133 (2)	4,2 (2)	98	57000 (3)	6250			2,30 4,00	3,754	19	120	1,21	15,40	1,0	30,6	1670	” 3 ” ”
8	Id. del Monte dei Cappuccini (Torino)	6	1	42	18	2,00	132	1,19	—	—	—	48		116	0,40	2	2,20	3,560	18	122	1,10	15,30	3,4	—	1760	” 2 ” ”
9	Id. di Montesanto al Vomero (Napoli)	6	1	108● 6•	40	2,60 2,50	603	5,75	84,28	140	4	12	28000	1020	3,50	$>$1000		7,400	38	572	—	80,00	3,0	5,1	1060	” di più fili grossi ”
10	Id. Id. Id. (spezzone che non ha lavorato)	”	”	”	”	”	”	”	”		”								41	603	—	88,00	4,0	—	725	” di molti fili grossi ”
11	Id. di Chiaia al Vomero (Napoli) (spezzone che non ha lavorato)	6	1	48● 24•	36	3,35 2,34	526					87 1/2	100200	770	3,35	180		5,000	38	526	—	66,50	3,6	—	800	” di più fili grossi ”

(1) escluse le anime di ferro dolce.
(2) da un precedente collaudo.
(3) percorsi dal treno in salita; la velocità della fune durante la salita è molto maggiore di quella del treno; nella discesa la fune pur restando ferma, si avvolge sulle pulegge del locomotore.

Sul genere aritmetico di una varietà completa intersezione di forme.

Nota di M. PANNELLI.

Sia $|V_1|$ un sistema lineare di curve tracciato sopra una superficie algebrica (varietà a due dimensioni), e $|V_1'|$ il sistema ad esso aggiunto. Fra il grado Ω_0 e il genere Ω_1 del sistema $|V_1' - V_1|$ ha luogo la relazione lineare (*):

$$\Omega_0 - \Omega_1 + 1 = 0,$$

nella quale, come si vede, non entra il genere aritmetico della superficie.

Analogamente sia $|V_2|$ un sistema lineare di superficie dato in una varietà algebrica a tre dimensioni, e $|V_2'|$ il sistema ad esso aggiunto. Fra il grado Ω_0, il genere Ω_1 e il genere aritmetico Ω_2 del sistema $|V_2' - V_2|$ sussiste la relazione lineare (**):

$$\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 2 = 2(P_a - 1)$$

nella quale P_a è il genere aritmetico della varietà.

(*) Castelnuovo-Enriques: *Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques*, § 25, " Mathematische Annalen ", Band XLVIII.

(**) Severi: *Alcune proprietà fondamentali per la Geometria sulle varietà algebriche*, " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ", Vol. XVI, Serie 5ª.

La dimostrazione che il chiar.mo Prof. Severi dà della relazione sopra riportata, relazione già intuita dal Noether, pel caso particolare in cui la varietà data non possegga superficie eccezionali, nella sua classica Memoria: *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischen Gebilde*, § 13, " Mathematische Annalen ", Band VIII, si basa sopra due diverse espressioni del teorema di Riemann-Roch, esteso alla varietà a tre dimensioni.

Osserva inoltre che la via più naturale per provare la relazione stessa sarebbe quella di farne una verificazione, riportandosi ad una varietà W dello spazio S_4, fornita di sole singolarità ordinarie, nella quale la data può supporsi trasformata birazionalmente. Seguendo appunto questa ultima via,

I caratteri del sistema $|V'-V|$ si comportano dunque diversamente rispetto al genere aritmetico della varietà data, secondochè questa è a due o a tre dimensioni.

Le proprietà precedenti si estendono alle varietà superiori; e tale estensione, nell'ipotesi per ora in cui queste varietà siano complete intersezioni di forme, costituisce l'oggetto della presente nota (*).

§ 1°.

1. — La postulazione $\chi(l, h, r)$ per una forma d'ordine l qualunque, di una varietà F_s, ad $s = r - h$ dimensioni, di uno spazio S_r, priva di parti multiple, ma avente del resto singolarità qualsivogliano, la quale sia completa intersezione di $h (h \leq r)$ forme degli ordini $n_1, n_2, \ldots, n_h$, è data dall'espressione (**):

$$(1) \qquad \binom{l+r}{r} - \sum_i \binom{l-n_i+r}{r} + \sum_{ij} \binom{l-n_i-n_j+r}{r} - \ldots + \\ + (-1)^h \binom{l-n_1-n_2-\ldots-n_h+r}{r}$$

nella quale le somme si estendano alle combinazioni semplici di $1^a, 2^a, \ldots, (h-1)^a$ classe degli indici $1, 2, \ldots, h$, ed inoltre si

io stesso avevo già dimostrato la relazione anzidetta, ma nel caso in cui la varieta W fosse dotata soltanto di superficie doppia. Per evitare le difficoltà, inerenti alle formule di postulazione e di equivalenza, che mi si presentavano, quando, volendo trattare il caso generale, dovevo supporre che la varietà W possedesse anche altri elementi singolari (curva tripla e punti quadrupli), pensai di riferirmi in sua vece, alla varietà, priva affatto di singolarità, di uno spazio $S_d (d \geq 7)$, alla quale la data può sempre ridursi. Stavo facendo in questo senso i miei studi, quando il Prof. Severi, venuto a conoscenza di essi, gentilmente mi avvertì di aver già presentato all'Accademia dei Lincei la Nota dianzi ricordata. Allora stimai inutile continuare le accennate ricerche, limitatamente alle varietà a tre dimensioni; mentre mi parve potesse ancora avere una qualche importanza estenderle alle varietà superiori. Così ebbe origine il lavoro attuale.

(*) A questa estensione accenna anche il Prof. Severi nella Nota precedentemente citata, dicendo che per le varietà a quattro dimensioni il genere aritmetico torna ad essere indipendente dai caratteri del sistema canonico.

(**) Severi: *Su alcune questioni di postulazione*, § 1, " Rendiconti del Circolo matematico di Palermo ", Vol. XVII, anno 1903.

ponga eguale a zero ogni simbolo $\binom{m}{r}$ nel quale la base m sia inferiore all'indice r.

In seguito con $\binom{m}{r}$ si converrà di rappresentare il quoziente della divisione, per il fattoriale di r, del prodotto di r numeri interi consecutivi decrescenti a partire da m, qualunque sia m, cioè positivo, nullo o negativo. In virtù di questa convenzione, quelli dei simboli combinatori, che entrano nella formola precedente, nei quali la base è inferiore ad r, ma positiva o nulla, sono conseguentemente eguali a zero; gli altri, nei quali invece la detta base è negativa, sono diversi da zero. Perciò i simboli combinatori della formula stessa ai quali si deve attribuire il valore zero, si riducono soltanto a questi ultimi. Quindi indicando con $\mathfrak{d}$ la somma dei valori effettivi dei termini della (1) ad essi corrispondenti, e con $\psi(l, h, r)$ il valore che prende la stessa (1) quando si tenga conto anche dei termini anzidetti, si ha evidentemente:

$$\chi(l, h, r) + \mathfrak{d} = \psi(l, h, r). \tag{2}$$

Ciò posto, si trasformi ogni termine della ψ mediante la relazione:

$$\binom{m}{r} = \binom{m-1}{r} + \binom{m-1}{r-1}$$

vera qualunque sia m; si ottiene:

$$\chi(l, h, r) + \mathfrak{d} = \left[\binom{(l-1)+r}{r} - \sum_i \binom{(l-1)-n_i+r}{r} + \right.$$

$$\left. + \sum_{ij} \binom{(l-1)-n_i-n_j+r}{r} - \ldots + (-1)^h \binom{(l-1)-n_1-n_2-\ldots-n_h+r}{r}\right] +$$

$$+ \left[\binom{l+(r-1)}{r-1} - \sum_i \binom{l-n_i+(r-1)}{r-1} + \sum_{ij} \binom{l-n_i-n_j+(r-1)}{r-1} - \ldots + \right.$$

$$\left. + (-1)^h \binom{l-n_1-n_2-\ldots-n_h+(r-1)}{r-1}\right]$$

donde, per le notazioni adottate, segue:

$$\chi(l, h, r) + \mathfrak{d} = \psi(l-1, h, r) + \psi(l, h, r-1).$$

Effettuando la medesima trasformazione sopra $\psi(l-1, h, r)$, si ha:

$$\psi(l-1, h, r) = \psi(l-2, h, r) + \psi(l-1, h, r-1)$$

e analogamente:

$$\psi(l-2, h, r) = \psi(l-3, h, r) + \psi(l-2, h, r-1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi(2, h, r) = \psi(1, h, r) + \psi(2, h, r-1)$$

$$\psi(1, h, r) = \psi(0, h, r) + \psi(1, h, r-1).$$

Sommando membro a membro tutte le eguaglianze precedenti, si ricava:

$$\chi(l, h, r) + \delta = \psi(0, h, r) + \sum_{k=1}^{k=l} \psi(k, h, r-1) \tag{3}$$

e questa relazione è vera qualunque sia l.

2. — Dicesi *genere aritmetico*, P_s, di una varietà F_s di un S_r, completa intersezione di h forme degli ordini $n_1, n_2, \ldots, n_h$, la postulazione della varietà stessa per una forma dell'ordine $\sum n_1 - r - 1$, la somma estesa a tutti i numeri $n_1, n_2, \ldots, n_h$.

Per avere il valore di P_s basta dunque porre nella (1), $l = \sum n_1 - r - 1$, e poi tener conto delle convenzioni fatte. Per l'anzidetto valore di l, solo il simbolo che somministra l'ultimo termine della (1), acquista come base un numero negativo, e precisamente -1; quindi soltanto ad esso è da attribuire il valore zero. Così si trova:

$$P_s = \binom{n_1+n_2+\ldots+n_h-1}{r} - \sum \binom{n_1+n_2+\ldots+n_{h-1}-1}{r} + \tag{4}$$
$$+ \sum \binom{n_1+n_2+\ldots+n_{h-2}-1}{r} - \ldots + (-1)^{h-1} \sum \binom{n_1-1}{r}$$

ed inoltre:

$$\delta = (-1)^s.$$

Ora pongasi nella (1), $l = 0$; si ottiene:

$$\psi(0, h, r) = \binom{r}{r} - \sum \binom{-n_1+r}{r} + \sum \binom{-n_1-n_2+r}{r} - \ldots +$$
$$+ (-1)^h \binom{-n_1-n_2-\ldots-n_h+r}{r}.$$

Dal confronto di questa formula con la (4), tenendo presente la relazione:

$$\binom{m-1}{r} = (-1)^r \binom{-m+r}{r}$$

si deduce facilmente:

$$\psi(0, h, r) = (-1)^s P_s + 1.$$

Con ciò la (3) diventa:

$$\chi(l, h, r) + \delta = \sum_{k=1}^{k=l} \psi(k, h, r-1) + (-1)^s P_s + 1. \tag{5}$$

E questa relazione, al pari della (3), sussiste per qualunque valore di l.

3. — Ciò stabilito, si consideri dapprima il caso di una curva di un S_r, completa intersezione di $h = r-1$ forme degli ordini $n_1, n_2, \ldots, n_{r-1}$. Poichè la sua dimensione s è eguale ad 1, così in virtù della (4) si ha:

$$\chi(l, r-1, r) + \delta = \sum_{k=1}^{k=l} \psi(k, r-1, r-1) - P_1 + 1.$$

Qui il valore di ψ è dato dalla formula:

$$\psi(k, r-1, r-1) = \binom{k+r-1}{r-1} - \Sigma \binom{k-n_i+r-1}{r-1} +$$

$$+ \Sigma \binom{k-n_i-n_j+r-1}{r-1} - \ldots + (-1)^{r-1} \binom{k-n_1-n_2-\ldots-n_{r-1}+r-1}{r-1}$$

e perciò, come è facile dimostrare (*) si trova:

$$\psi(k, r-1, r-1) = n_1 n_2 \ldots n_{r-1} = P_0$$

dove P_0 indichi l'ordine della curva data. Da questa relazione segue:

$$\sum_{k=1}^{k=l} \psi(k, r-1, r-1) = l P_0$$

(*) Bertini: *Introduzione alla Geometria Proiettiva degli iperspazi*, cap. 11, n° 20.

e quindi si ottiene in fine (*):

$$\chi(l, r-1, r) + \delta = lP_0 - P_1 + 1. \tag{6}$$

Questa formula dà adunque la postulazione, per una forma d'ordine l qualunque, della curva considerata d'ordine P_0 e genere P_1.

Ora si consideri l'espressione:

$$\psi(k, r-1, r) = \binom{k+r}{r} - \Sigma\binom{k-n_i+r}{r} + \\ + \Sigma\binom{k-n_i-n_j+r}{r} - \dots + (-1)^{r-1}\binom{k-n_1-n_2-\dots-n_{r-1}+r}{r}$$

dove k è un numero intero qualunque. Essa è una funzione intera di grado r rispetto a k, epperò può scriversi:

$$\psi(k, r-1, r) = A_0k^r + A_1k^{r-1} + \dots + A_{r-2}k^2 + A_{r-1}k + A_r$$

dove le A_i sono funzioni intere omogenee di $n_1, n_2, \dots, n_{r-1}$. Quando a k si attribuisce un valore l così alto, che per esso risulti $\delta = 0$, il valore $\psi(l, r-1, r)$ che in corrispondenza acquista $\psi(k, r-1, r)$, coincide, in virtù della (2), con quello $\chi(l, r-1, r)$, dato dalla formula (6), nella quale si faccia pure $\delta = 0$. Per un siffatto valore di l, si ha dunque:

$$A_0l^r + A_1l^{r-1} + \dots + A_{r-2}l^2 + (A_{r-1} - P_0)l + (A_r + P_1 - 1) = 0.$$

I valori di l, che verificano questa equazione sono infiniti; perciò deve aversi:

$$A_0 = 0,\ A_1 = 0,\ \dots,\ A_{r-2} = 0,\ A_{r-1} = P_0,\ A_r = -P_1 + 1.$$

Quindi si trova:

$$\psi(k, r-1, r) = kP_0 - P_1 + 1 \tag{7}$$

qualunque sia k.

4. — In secondo luogo, suppongasi di avere una superficie di un S_r, completa intersezione di $h = r-2$ forme degli or-

(*) CASTELNUOVO: *Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica*, " Rendiconti del Circolo matematico di Palermo ", Vol. VII.

dini $n_1, n_2, \ldots, n_{r-2}$. Poichè la sua dimensione s è eguale a 2, così in virtù della (5), si ha:

$$\chi(l, r-2, r) + \delta = \sum_{k=1}^{k=l} \psi(k, r-2, r-1) + P_2 + 1.$$

Qui il valore di ψ è dato dalla formula:

$$\psi(k, r-2, r-1) = \binom{k+r-1}{r-1} - \Sigma \binom{k-n_i+r-1}{r-1} +$$
$$+ \Sigma \binom{k-n_i-n_j+r-1}{r-1} - \ldots + (-1)^{r-2} \binom{k-n_1-n_2-\ldots-n_{r-2}+r-1}{r-1}$$

e perciò, tenendo presente la (7), si ha:

$$\psi(k, r-2, r-1) = kP_0 - P_1 + 1$$

dove P_0 è l'ordine di una sezione spaziale della superficie data, e quindi quello della superficie stessa, e P_1 è il suo genere. Dalla relazione precedente segue:

$$\sum_{k=1}^{k=l} \psi(k, r-2, r-1) = (1 + 2 + 3 + \ldots + l)P_0 - l(P_1 - 1) =$$
$$= \binom{l+1}{2} P_0 - l(P_1 - 1)$$

e quindi si ottiene infine (*):

$$\chi(l, r-2, r) + \delta = \binom{l+1}{2} P_0 - \binom{l}{1} P_1 + P_2 + l + 1. \tag{8}$$

Questa formula dà adunque la postulazione, per una forma d'ordine l qualunque, della superficie considerata d'ordine P_0, di genere aritmetico P_2 e avente per sezione spaziale una curva di genere P_1.

Ora con considerazioni del tutto analoghe a quelle fatte alla fine del n° precedente, si dimostra che qualunque sia k, si ha:

$$\psi(k, r-2, r) = \binom{k+1}{2} P_0 - \binom{k}{1} P_1 + P_2 + k + 1. \tag{9}$$

(*) Severi: *Su alcune questioni di postulazione,* § 5.

5. — Stabilite così le formule (8) e (9), è facile dimostrare con procedimenti affatto simili a quelli tenuti nei due casi già considerati (n[i] 3 e 4), che la postulazione per una forma d'ordine l qualunque, di una varietà a tre dimensioni, completa intersezione di $r-3$ forme, è data dall'espressione:

$$(10) \quad \chi(l, r-3, r) = \binom{l+2}{3} P_0 - \binom{l+1}{2} P_1 + \binom{l}{1} P_2 - P_3 + \binom{l+2}{2}$$

dove P_0 e P_3 sono l'ordine e il genere aritmetico della varietà data, e P_1 e P_2 sono il genere e il genere aritmetico della curva e della superficie ottenute segando la varietà stessa con i due spazi S_{r-2} ed S_{r-1}.

Dall'esame dei secondi membri delle eguaglianze (6), (8) e (10), si scorge facilmente la legge con la quale essi sono formati. Quindi, applicando il metodo di induzione, si giunge senza incontrare alcuna difficoltà, al seguente risultato generale:

I. " La postulazione, per una forma d'ordine l qualunque,
" di una varietà $F_s \, (s = r - h)$ di uno spazio S_r, priva di parti
" multiple, ma del resto avente singolarità qualsivogliano, la
" quale sia completa intersezione di h forme degli ordini $n_1, n_2, \ldots, n_h$,
" è data dall'espressione:

$$(11) \quad \chi(l, h, r) + \delta = \binom{l+s-1}{s} P_0 - \binom{l+s-2}{s-1} P_1 + \binom{l+s-3}{s-2} P_2 - \ldots + \\ + (-1)^{s-1} \binom{l}{1} P_{s-1} + (-1)^s P_s + \binom{l+s-1}{s-1}$$

" dove δ ha il significato ad esso attribuito nel n° 1, P_0 è l'or-
" dine della varietà F_s e P_s, P_{s-1}, ..., P_2, P_1 sono i generi aritmetici
" della varietà stessa e delle sue $s-1$ sezioni fatte con gli spazi
" S_{h+s-1}, S_{h+s-2}, ..., S_{h+2}, S_{h+1} ".

Di qui ponendo $l = \sum n_1 - r - 1$ e ricordando (n° 2) che in tale ipotesi si ha:

$$\chi(\sum n_1 - r - 1, \, h, \, r) = P_s, \quad \delta = (-1)^s$$

si ricava:

II. " L'ordine P_0 della varietà F_s e i generi aritmetici delle

" sue $s-1$ sezioni spaziali sono legati fra loro dalla seguente
" relazione lineare:

$$(12)\quad \binom{\Sigma n_1-h-2}{s}P_0-\binom{\Sigma n_1-h-3}{s-1}P_1+\binom{\Sigma n_1-h-4}{s-2}P_2-\ldots+$$
$$+\binom{\Sigma n_1-r-2}{2}P_{s-2}-\binom{\Sigma n_1-r-1}{1}P_{s-1}+\binom{\Sigma n_1-h-2}{s-1}=1$$

oppure dall'altra:

$$(13)\quad \binom{\Sigma n_1-h-2}{s}P_0-\binom{\Sigma n_1-h-3}{s-1}P_1+\binom{\Sigma n_1-h-4}{s-2}P_2-\ldots-$$
$$-\binom{\Sigma n_1-r-2}{2}P_{s-2}+\binom{\Sigma n_1-r-1}{1}P_{s-1}+\binom{\Sigma n_1-h-2}{s-1}=2P_s-1$$

" dove P_s è il genere aritmetico della varietà data F_s, secon-
" dochè la dimensione s di questa è pari o dispari „.

6. — La formula (13) può essere utilmente applicata per calcolare il genere aritmetico di una varietà ad un numero dispari di dimensioni, quando si conoscano i generi aritmetici delle sue differenti sezioni spaziali.

Suppongasi dapprima di avere in S_r una curva, completa intersezione di $r-1$ forme degli ordini $n_1, n_2, \ldots, n_{r-1}$. In questo caso si ha:

$$h=r-1,\ s=1,\ P_0=n_1 n_2 \ldots n_{r-1},$$

e con ciò la (13) somministra immediatamente la nota formula:

$$P_1=\frac{1}{2}n_1 n_2 \ldots n_{r-1}[\Sigma(n_1-1)-2]+1$$

la somma estesa da 1 ad $r-1$.

In secondo luogo abbiasi in S_r una varietà a tre dimensioni, completa intersezione di $r-3$ forme degli ordini $n_1, n_2, \ldots, n_{r-3}$. In questo caso è intanto:

$$h=r-3,\ s=3,\ P_0=n_1 n_2 \ldots n_{r-3}.$$

Inoltre, in virtù della formula precedente, per il genere P_1 della curva d'intersezione della varietà data con S_{r-2}, si ha:

$$P_1=\frac{1}{2}n_1 n_2 \ldots n_{r-3}[\Sigma(n_1-1)-2]+1$$

la somma ora estesa da 1 ad $r-3$. Infine, il genere aritmetico P_2 della superficie d'intersezione della stessa varietà con un S_{r-1} è dato dalla espressione (*):

$$P_2 = \frac{1}{12} n_1 n_2 \ldots n_{r-3} [2\Sigma(n_1-1)^2 + \\ + 3\Sigma(n_1-1)(n_2-1) - 8\Sigma(n_1-1) + 12] - 1$$

le somme estese come nella formula precedente. Con ciò la (13), dopo non difficili trasformazioni, somministra:

" Il genere aritmetico di una varietà a tre dimensioni, di " un S_r, completa intersezione di $r-3$ forme degli ordini n_1, " $n_2, \ldots, n_{r-3}$, è dato dalla espressione:

$$P_3 = \frac{1}{24} n_1 n_2 \ldots n_{r-3} [\Sigma(n_1-1)^3 + 2\Sigma(n_1-1)^2(n_2-1) + \\ + 3\Sigma(n_1-1)(n_2-1)(n_3-1) - 7\Sigma(n_1-1)^2 - \\ - 10\Sigma(n_1-1)(n_2-1) + 18\Sigma(n_1-1) - 24] + 1 \text{ "}.$$

I risultati ottenuti nel numero precedente possono essere messi sotto un'altra forma ben più notevole, sostituendo ai generi P_i i caratteri del sistema lineare di varietà segato in F_s da tutte le forme d'ordine l. A tale oggetto è necessario dimostrare dapprima alcune relazioni, anche per sè stesse rimarchevoli, esistenti fra i coefficienti binomiali, ed inoltre stabilire la formula, con la quale si calcola il genere aritmetico di una *varietà composta*.

§ 2°.

1. — La nota formula:

$$\binom{l_1+l_2+\ldots+l_k}{\mu} = \Sigma \binom{l_1}{x_1}\binom{l_2}{x_2}\cdots\binom{l_k}{x_k}$$

nella quale si suppone $k \leq \mu$, e la somma deve essere estesa a tutte le soluzioni intere e positive, incluse quelle costituite parzialmente da zeri, dell'equazione:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = \mu$$

(*) SEVERI: *Su alcune questioni di postulazione*, § 1, n° 4. La espressione ivi data per il genere P_2 differisce da quella sopra riportata soltanto per la forma.

può essere messa sotto un aspetto diverso, riunendo in un medesimo gruppo tutti quei termini, che sono prodotti dallo stesso numero di fattori.

I termini, di cui ciascuno è il prodotto di $k-i$ fattori, essendo $i=1, 2, \ldots, k-1$, provengono da quelle soluzioni dell'equazione precedente, nelle quali entra il medesimo numero i di zeri, e che perciò sono le stesse soluzioni intere e positive, ora escluse quelle costituite parzialmente da zeri, dell'equazione:

$$y_1+y_2+\ldots+y_{k-i}=\mu.$$

Quindi se $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{k-i})$ è una qualunque di queste soluzioni e con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-i}$ si indicano $k-i$ qualsivogliano dei numeri $l_1, l_2, \ldots, l_k$, uno generico dei termini anzidetti è:

$$\binom{\lambda_1}{\eta_1}\binom{\lambda_2}{\eta_2}\cdots\binom{\lambda_{k-i}}{\eta_{k-i}}.$$

E da questo si deducono tutti gli altri, prima lasciando fisse le basi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-i}$ e prendendo per gli indici $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{k-i}$ tutte le soluzioni dell'ultima equazione, e poi sostituendo, in ciascuno dei termini così ottenuti, a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-i}$ successivamente tutte le combinazioni della classe $k-i$ dei numeri $l_1, l_2, \ldots, l_k$. Chiamando $A_{k-i,k}$ la somma di tutti i termini ricavati in questo modo, si ha:

$$\binom{l_1+l_2+\ldots+l_k}{\mu}=$$

$$=A_{k,k}+A_{k-1,k}+A_{k-2,k}+\ldots+A_{k-i,k}+\ldots+A_{3,k}+A_{2,k}+A_{1,k}.$$

Adottando notazioni analoghe alle precedenti, si ottiene:

$$\Sigma\binom{l_1+l_2+\ldots+l_{k-1}}{\mu}=\Sigma A_{k-1,k-1}+\Sigma A_{k-2,k-1}+\ldots+\Sigma A_{k-i,k-1}+\ldots+\Sigma A_{2,k-1}+\Sigma A_{1,k-1}$$

$$\Sigma\binom{l_1+l_2+\ldots+l_{k-2}}{\mu}=\Sigma A_{k-2,k-2}+\ldots+\Sigma A_{k-i,k-2}+\ldots+\Sigma A_{2,k-2}+\Sigma A_{1,k-2}$$

. . . .

$$\Sigma\binom{l_1+l_2+\ldots+l_{k-i}}{\mu}=\Sigma A_{k-i,k-i}+\ldots+\Sigma A_{2,k-i}+\Sigma A_{1,k-i}$$

. . . .

$$\Sigma\binom{l_1+l_2}{\mu}=+\Sigma A_{2,2}+\Sigma A_{12}$$

$$\Sigma\binom{l_1}{\mu}=\Sigma A_{11}$$

Dalle eguaglianze precedenti si ricava:

$$\binom{l_1+l_2+\ldots+l_k}{\mu}-\sum\binom{l_1+l_2+\ldots+l_{k-1}}{\mu}+\sum\binom{l_1+l_2+\ldots+l_{k-2}}{\mu}-\ldots+$$
$$+(-1)^i\sum\binom{l_1+l_2+\ldots+l_{k-i}}{\mu}-\ldots+(-1)^{k-2}\sum\binom{l_1+l_2}{\mu}+(-1)^{k-1}\sum\binom{l_1}{\mu}=$$
$$=A_{kk}+\sum_{i=1}^{i=k-1}\left[A_{k-i,k}-\sum A_{k-i,k-1}+\sum A_{k-i,k-2}-\ldots+(-1)^i\sum A_{k-i,k-i}\right].$$

Ora si cerchi quante volte un termine generico $\binom{\lambda_1}{\eta_1}\binom{\lambda_2}{\eta_2}\ldots\binom{\lambda_{k-i}}{\eta_{k-i}}$ della somma $A_{k-i,k}$ è contenuto in $\sum A_{k-i,k-j}$, dove j varia da 1 sino ad i.

La somma $\sum\binom{l_1+l_2+\ldots+l_{k-j}}{\mu}$ è formata da tutti i simboli combinatori, che si deducono da quello messo in evidenza, facendo le combinazioni della classe $k-j$ dei numeri $l_1, l_2, \ldots, l_k$. Fra questi simboli solo ciascuno di quelli provenienti dalle $\binom{i}{j}$ delle anzidette combinazioni, che contengono i $k-i$ numeri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-i}$, introduce in $\sum A_{k-i,k-j}$ un termine eguale a quello considerato. In $\sum A_{k-i,k-j}$ sono dunque contenuti $\binom{i}{j}$ di questi termini, epperò il numero totale di quelli eguali a $\binom{\lambda_1}{\mu_1}\binom{\lambda_2}{\mu_2}\ldots\binom{\lambda_{k-i}}{\mu_{k-i}}$, che figurano nel secondo membro dell'eguaglianza precedente, è:

$$1-\binom{i}{1}+\binom{i}{2}-\ldots+(-1)^i\binom{i}{i}=0$$

e quindi l'eguaglianza stessa diventa:

$$(14)\quad A_{kk}=\sum\binom{l_1}{y_1}\binom{l_2}{y_2}\ldots\binom{l_k}{y_k}=\binom{l_1+l_2+\ldots+l_k}{\mu}-\sum\binom{l_1+l_2+\ldots+l_{k-1}}{\mu}+$$
$$+\sum\binom{l_1+l_2+\ldots+l_{k-2}}{\mu}-\ldots+(-1)^{k-2}\sum\binom{l_1+l_2}{\mu}+(-1)^{k-1}\sum\binom{l_1}{\mu}.$$

In particolare, pongasi $l_1=l_2=\ldots=l_k=l$. In tal caso, in luogo del simbolo A_{kk}, conviene, per ciò che segue, usare l'altro $C_{k,\mu}$, dove il primo indice rappresenta il numero dei fattori di ogni termine: $\binom{l}{y_1}\binom{l}{y_2}\ldots\binom{l}{y_k}$; ed il secondo è la somma

costante dei k numeri interi, positivi e diversi da zero: $y_1, y_2, \ldots, y_k$. Si ha pertanto:

$$(15)\qquad C_{k,\mu} = \binom{kl}{\mu} - \binom{k}{1}\binom{(k-1)l}{\mu} + \binom{k}{2}\binom{(k-2)l}{\mu} - \ldots + \\ + (-1)^{k-2}\binom{k}{k-2}\binom{2l}{\mu} + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}\binom{l}{\mu}.$$

2. — Per ulteriori ricerche è ancora necessario mettere sotto altra forma l'espressione seguente:

$$(16)\qquad X = \binom{ml-n}{m} - \binom{m+1}{1}\binom{(m-1)l-n}{m} + \binom{m+1}{2}\binom{(m-2)l-n}{m} - \ldots + \\ + (-1)^{m-3}\binom{m+1}{m-3}\binom{3l-n}{m} + (-1)^{m-2}\binom{m+1}{m-2}\binom{2l-n}{m} + \\ + (-1)^{m-1}\binom{m+1}{m-1}\binom{l-n}{m}.$$

A tale oggetto, si osservi dapprima che si ha:

$$m!\binom{\lambda-n}{m} = \lambda^m - \alpha_1\lambda^{m-1} + \alpha_2\lambda^{m-2} - \ldots + (-1)^{m-1}\alpha_{m-1}\lambda + (-1)^m\alpha_m$$

dove $\alpha_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ rappresenta la somma dei prodotti i ad i dei numeri $n, n+1, n+2, \ldots, n+m-1$. In virtù di questa relazione, nella quale si ponga λ successivamente eguale ad ml, $(m-1)l$, $(m-2)l$, ..., $3l$, $2l$, l, la espressione precedente, ordinata rispetto ad l, diventa:

$$(17)\qquad m!X = \Big[m^m - \binom{m+1}{1}(m-1)^m + \binom{m+1}{2}(m-2)^m + \ldots + \\ + (-1)^{m-2}\binom{m+1}{m-2}\cdot 2^m + (-1)^{m-1}\binom{m+1}{m-1}\Big] l^m \\ - \alpha_1\Big[m^{m-1} - \binom{m+1}{1}(m-1)^{m-1} + \binom{m+1}{2}(m-2)^{m-1} + \ldots + \\ + \ldots (-1)^{m-2}\binom{m+1}{m-2}\cdot 2^{m-1} + (-1)^{m-1}\binom{m+1}{m-1}\Big] l^{m-1} \\ + \alpha_2\Big[m^{m-2} - \binom{m+1}{1}(m-1)^{m-2} + \binom{m+1}{2}(m-2)^{m-2} + \ldots + \\ + \ldots (-1)^{m-2}\binom{m+1}{m-2}\cdot 2^{m-2} + (-1)^{m-1}\binom{m+1}{m-1}\Big] l^{m-2} \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+(-1)^{m-1}\alpha_{m-1}\Big[m-\binom{m+1}{1}(m-1)+\binom{m+1}{2}(m-2)-\dots+$$
$$+(-1)^{m-2}\binom{m+1}{m-2}\cdot 2+(-1)^{m-1}\binom{m+1}{m-1}\Big]\,l$$
$$+(-1)^{m}\alpha_{m}\Big[1-\binom{m+1}{1}+\binom{m+1}{2}-\dots+$$
$$+(-1)^{m-2}\binom{m+1}{m-2}+(-1)^{m-1}\binom{m+1}{m-1}\Big].$$

Ora si ricordi che per $t \leq m$ si ha la relazione (*):

$$a^t-\binom{m+1}{1}(a-1)^t+\binom{m+1}{2}(a-2)^t-\dots+$$
$$+(-1)^{m-2}\binom{m+1}{m-2}(a-m+2)^t+(-1)^{m-1}\binom{m+1}{m-1}(a-m+1)^t$$
$$+(-1)^{m}\binom{m+1}{m}(a-m)^t+(-1)^{m+1}\binom{m+1}{m+1}(a-m-1)^t=0.$$

(*) La relazione sopra scritta si deduce facilmente dall'altra (vera qualunque sia a):

$$a^m-\binom{m}{1}(a-1)^m+\binom{m}{2}(a-2)^m-\dots+(-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}(a-m-1)^m+$$
$$+(-1)^m(a-m)^m=m!$$

(Cauchy: *Exercices de Mathématiques*, Vol. I, pag. 49, 1826). Infatti, si consideri dapprima l'espressione:

$$a^m-\binom{m+1}{1}(a-1)^m+\binom{m+1}{2}(a-2)^m-\dots+(-1)^m\binom{m+1}{m}(a-m)^m+$$
$$+(-1)^{m+1}(a-m-1).$$

Questa, in virtù della formula:

$$\binom{m+1}{k}=\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1},$$

si può scrivere così:

$$\Big[a^m-\binom{m}{1}(a-1)^m+\binom{m}{2}(a-2)^m-\dots+(-1)^m(a-m)^m\Big]$$
$$-\Big[(a-1)^m-\binom{m}{1}(a-2)^m+\binom{m}{2}(a-3)^m-\dots+(-1)^m(a-m-1)^m\Big]=m!-m!=0.$$

L'espressione considerata è dunque nulla. In modo analogo si dimostra che anche nulla è l'espressione che si deduce da essa sostituendo $m-1$ all'esponente m. E così di seguito.

nella quale a può essere positivo, nullo o negativo. Facendo in essa $a=m$ e $t=m-i$ $(i\leq m)$, facilmente se ne deduce:

$$m^{m-i}-\binom{m+1}{1}(m-1)^{m-i}+\binom{m+1}{2}(m-2)^{m-i}-\ldots+$$
$$+(-1)^{m-2}\binom{m+1}{m-2}\cdot 2^{m-i}+(-1)^{m-1}\binom{m+1}{m-1}=-(-1)^{2m+1-i}=(-1)^{i}$$

e questa, quando si ponga successivamente $i=0, 1, 2, \ldots, m-1$, mostra come le espressioni chiuse entro le parentesi quadrate del secondo membro della (17) assumano alternativamente i valori $+1$ e -1, ad eccezione dell'ultima, la quale, in virtù dell'altra relazione:

$$1-\binom{m+1}{1}+\binom{m+1}{2}-\ldots+(-1)^{m-2}\binom{m+1}{m-2}+(-1)^{m-1}\binom{m+1}{m-1}+$$
$$+(-1)^{m}\binom{m+1}{m}+(-1)^{m+1}\binom{m+1}{m+1}=0,$$

si riduce a questa:

$$-(-1)^{m}\binom{m+1}{m}-(-1)^{m+1}\binom{m+1}{m+1}=(-1)^{m+1}(m+1)+(-1)^{m+2},$$

e per conseguenza l'ultimo termine della stessa (17) acquista il valore:

$$(-1)^{m}\alpha_{m}[(-1)^{m+1}(m+1)+(-1)^{m+2}]=$$
$$=(-1)^{2m+1}\alpha_{m}(m+1)+(-1)^{2m+2}\alpha_{m}=-(m+1)\alpha_{m}+\alpha_{m}.$$

Con ciò la (17) diventa:

$$m!X=l^{m}+\alpha_{1}l^{m-1}+\alpha_{2}l^{m-2}+\ldots+\alpha_{m-1}l+\alpha_{m}-(m+1)\alpha_{m}$$

e poichè è:

$$\alpha_{m}=n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)$$

si ha ancora:

$$X=\frac{l^{m}+\alpha_{1}l^{m-1}+\alpha_{2}l^{m-2}+\ldots+\alpha_{m-1}l+\alpha_{m}}{m!}-(m+1)\binom{n+m-1}{m}$$

da cui infine osservando che si ha:

$$\binom{l+m+n-1}{m}=\frac{[l+(m+n-1)][l+(m+n-2)]\ldots(l+n)}{m!}$$

e ricordando i valori di α_i si deduce:

$$(18) \qquad X = \binom{l+m+n-1}{m} - (m+1)\binom{m+n-1}{m}$$

dove X è dato dalla (16).

§ 3°.

1. — La varietà F_s, considerata nel § 1°, si tagli successivamente con le forme H, H_1, H_2 degli ordini $p+q, p, q$; si ottengono le varietà: $(F_sH), (F_sH_1), (F_sH_2)$, ad $s-1$ dimensioni. Insieme con esse risulta anche la varietà $(F_sH_1H_2)$, ad $s-2$ dimensioni. I generi aritmetici $G(F_sH)$, $G(F_sH_1)$, $G(F_sH_2)$, $G(F_sH_1H_2)$ di queste quattro varietà, essendo ciascuna di esse completa intersezione di forme, si calcolano applicando la formula (4) del § 1°. Così si trovano le espressioni seguenti, nelle quali $\sigma_{h-\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, h-1)$ indica una qualunque delle $\binom{h}{\nu}$ somme formate con $h-\nu$ dei numeri $n_1, n_2, \ldots, n_h$, ed in ciascun termine la somma $\sum$ deve essere estesa a tutti i valori, che può prendere il simbolo $\sigma_{h-\nu}$, che figura nel termine stesso:

$$G(F_sH) = \binom{\sigma_h+(p+q)-1}{r} - \left[\sum\binom{\sigma_{h-1}+(p+q)-1}{r} + \binom{\sigma_h-1}{r}\right] +$$
$$+ \left[\sum\binom{\sigma_{h-2}+(p+q)-1}{r} + \sum\binom{\sigma_{h-1}-1}{r}\right] - \ldots\ldots$$
$$+ (-1)^i\left[\sum\binom{\sigma_{h-i}+(p+q)-1}{r} + \sum\binom{\sigma_{h-i+1}-1}{r}\right] +$$
$$+ (-1)^{i+1}\left[\sum\binom{\sigma_{h-i-1}+(p+q)-1}{r} + \sum\binom{\sigma_{h-i}-1}{r}\right] \ldots\ldots +$$
$$+ (-1)^h\left[\binom{p+q-1}{r} + \sum\binom{\sigma_1-1}{r}\right]$$

$$G(F_sH_1) = \binom{\sigma_h+p-1}{r} - \left[\sum\binom{\sigma_{h-1}+p-1}{r} + \binom{\sigma_{h-1}}{r}\right] +$$
$$+ \left[\sum\binom{\sigma_{h-2}+p-1}{r} + \sum\binom{\sigma_{h-1}-1}{r}\right] - \ldots\ldots$$
$$+ (-1)^i\left[\sum\binom{\sigma_{h-i}+p-1}{r} + \sum\binom{\sigma_{h-i+1}}{r}\right] +$$

$$+(-1)^{i+1}\left[\Sigma\binom{\sigma_{h-i-1}+p-1}{r}+\Sigma\binom{\sigma_{h-i}-1}{r}\right]\ldots\ldots+$$

$$+(-1)^{h}\left[\binom{p-1}{r}+\Sigma\binom{\sigma_1-1}{r}\right]$$

$$G(F_sH_2)=\binom{\sigma_h+q-1}{r}-\left[\Sigma\binom{\sigma_{h-1}+q-1}{r}\right]+\binom{\sigma_h-1}{r}\Big]+$$

$$+\left[\Sigma\binom{\sigma_{h-2}+q-1}{r}+\Sigma\binom{\sigma_{h-1}-1}{r}\right]-\ldots\ldots$$

$$+(-1)^{i}\left[\Sigma\binom{\sigma_{h-i}+q-1}{r}+\Sigma\binom{\sigma_{h-i+1}-1}{r}\right]+$$

$$+(-1)^{i+1}\left[\Sigma\binom{\sigma_{h-i-1}+q-1}{r}+\Sigma\binom{\sigma_{h-i}-1}{r}\right]\ldots\ldots+$$

$$+(-1)^{h}\left[\binom{q-1}{r}+\Sigma\binom{\sigma_1-1}{r}\right]$$

$$G(F_sH_1H_2)=\binom{\sigma_h+p+q-1}{r}-\left[\Sigma\binom{\sigma_{h-1}+p+q-1}{r}+\Sigma\binom{\sigma_h+p-1}{r}+\right.$$

$$\left.+\Sigma\binom{\sigma_h+q-1}{r}\right]+\left[\Sigma\binom{\sigma_{h-2}+p+q-1}{r}+\Sigma\binom{\sigma_{h-1}+p-1}{r}+\right.$$

$$\left.+\Sigma\binom{\sigma_{h-1}+q-1}{r}+\Sigma\binom{\sigma_h-1}{r}\right]-\left[\Sigma\binom{\sigma_{h-3}+p+q-1}{r}+\right.$$

$$\left.+\Sigma\binom{\sigma_{h-2}+p-1}{r}+\Sigma\binom{\sigma_{h-2}+q-1}{r}+\Sigma\binom{\sigma_{h-1}-1}{r}\right]+\ldots\ldots$$

$$+(-1)^{i}\left[\Sigma\binom{\sigma_{h-i}+p+q-1}{r}+\Sigma\binom{\sigma_{h-i+1}+p-1}{r}+\Sigma\binom{\sigma_{h-i+1}+q-1}{r}+\right.$$

$$\left.+\Sigma\binom{\sigma_{h-i+2}-1}{r}\right]+(-1)^{i+1}\left[\Sigma\binom{\sigma_{h-i-1}+p+q-1}{r}+\Sigma\binom{\sigma_{h-i}+p-1}{r}+\right.$$

$$\left.+\Sigma\binom{\sigma_{h-i}+q-1}{r}+\Sigma\binom{\sigma_{h-i+1}-1}{r}\right]+(-1)^{i+2}\left[\Sigma\binom{\sigma_{h-i-2}+p+q-1}{r}+\right.$$

$$\left.+\Sigma\binom{\sigma_{h-i-1}+p-1}{r}+\Sigma\binom{\sigma_{h-i-1}+q-1}{r}+\Sigma\binom{\sigma_{h-i}-1}{r}\right]+\ldots\ldots$$

$$+(-1)^{h}\left[\binom{p+q-1}{r}+\Sigma\binom{\sigma_1+p-1}{r}+\Sigma\binom{\sigma_1+q-1}{r}+\Sigma\binom{\sigma_2-1}{r}\right]+$$

$$+(-1)^{h+1}\left[\binom{p-1}{r}+\binom{q-1}{r}+\Sigma\binom{\sigma_1-1}{r}\right].$$

Dalle eguaglianze precedenti segue immediatamente:

$$G(F_sH)=G(F_sH_1)+G(F_sH_2)+G(F_sH_1H_2).$$

Ora, chiamasi *genere aritmetico* di una varietà, ad $s-1$ dimensioni, *composta* di due varietà, complete intersezioni di F_s con due forme H_1 ed H_2 degli ordini p e q, il numero calcolato in base alla formula (4), applicata ad $h+1$ forme degli ordini $n_1, n_2, \ldots, n_h, p+q$. Se la detta varietà composta si indica simbolicamente con la notazione (F_s, H_1+H_2), si ha dunque per definizione:

$$G(F_s, H_1+H_2) = G(F_s, H)$$

e quindi in virtù della relazione precedente, si ottiene:

$$G(F_s, H_1+H_2) = G(F_sH_1) + G(F_sH_2) + G(F_sH_1H_2)$$

donde segue:

“ Il genere aritmetico di una varietà, ad s—1 dimensioni,
“ composta di due varietà, complete intersezioni di F_s con due
“ forme date, è eguale alla somma dei generi aritmetici delle
“ due componenti, aumentata di quello della varietà intersezione
“ di F_s con le forme medesime „.

2. — Stabilito questo teorema, suppongasi dapprima che F_s sia una superficie. In questo caso (F_sH_1) e (F_sH_2) sono due curve; $(F_sH_1H_2)$ è un gruppo di $n_1n_2 \ldots n_{r-2}pq$ punti, ed inoltre si trova:

$$G(F_sH_1H_2) = n_1n_2 \ldots n_{r-2}pq - 1 = (F_2H_1H_2) - 1$$

e quindi per il genere della curva composta considerata, si ottiene la nota formula:

$$G(F_2 \,.\, H_1+H_2) = G(F_2H_1) + G(F_2H_2) + (F_2H_1H_2) - 1$$

dalla quale si deduce facilmente l'altra più generale:

$$G(F_2 \,.\, H_1 + H_2 + \ldots H_l) = \sum G(F_2H) + \sum (F_2 \,.\, 2H) - (l-1)$$

dove (F_2H) e $(F_2 \,.\, 2H)$ rappresentano rispettivamente le intersezioni di F_2 con una o con due qualsivogliano delle l forme H, e le somme debbono essere estese a tutte le possibili intersezioni analoghe.

In secondo luogo, abbiasi una varietà F_3 a tre dimensioni. Applicando il teorema precedente e tenendo conto della formula

testè dimostrata, si calcolino successivamente i generi aritmetici delle superficie composte, intersezioni di F_s con $H_1 + H_2$, $H_1 + H_2 + H_3$, $H_1 + H_2 + H_3 + H_4, \ldots$ È facile scorgere la legge di formazione dei risultati che così si ottengono, e quindi, facendo uso del metodo di induzione, dimostrare la formula seguente:

$$G(F_3 \,.\, H_1 + H_2 + \ldots + H_l) =$$
$$= \sum G(F_3 \,.\, H) + \sum G(F_3 \,.\, 2H) + \sum (F_3 \,.\, 3H) - \binom{l-1}{2}$$

dove $(F_3 \,.\, H)$, $(F_3 \,.\, 2H)$, $(F_3 \,.\, 3H)$ e le somme $\sum$ hanno significati analoghi ai precedenti.

In modo affatto analogo, cioè applicando di nuovo il teorema fondamentale e tenendo poi conto della formula ora dimostrata, si ottiene:

$$G(F_4 \,.\, H_1 + H_2 + \ldots + H_l) =$$
$$= \sum G(F_4 . H) + \sum G(F_4 2H) + \sum G(F_4 3H) + \sum (F_4 . 4H) - \binom{l-1}{3}.$$

Così proseguendo e facendo sempre uso del metodo di induzione, si perviene al seguente risultato generale:

$$G(F_s . H_1 + H_2 + \ldots + H_l) = \sum_{l,1} G(F_s . H) + \sum_{l,2} G(F_s . 2H) + \ldots \tag{19}$$
$$+ \sum_{l,i} G(F_s . iH) + \ldots + \sum_{l,s-1} G(F_s . (s-1)H) + \sum_{l,s} . (F_s . sH) - \binom{l-1}{s-1}.$$

dove le notazioni adottate sono analoghe alle precedenti, e la somma $\sum\limits_{l,i}$ contiene $\binom{l}{i}$ termini, per $i = 1, 2, \ldots, s$.

3. — Ora si consideri la varietà, ad $s-2$ dimensioni: $(F_s \,.\, H_1 + H_2 + \ldots H_l, K_1 + K_2 + \ldots + K_m)$. Riguardando come fondamentale la varietà $(F_s \,.\, K_1 + H_2 + \ldots + H_m)$ ad $s-1$ dimensioni, ed applicando ad essa la formula (19), si ottiene:

$$G(F_s \,.\, H_1 + H_2 + \ldots H_l, K_1 + K_2 + \ldots + K_m) =$$
$$= \sum_{l,1} G(F_s . K_1 + K_2 + \ldots + K_m . H) + \sum_{l,2} G(F_s . K_1 + K_2 + \ldots + K_m . 2H) + \ldots$$
$$+ \sum_{l,i} G(F_s . K_1 + K_2 + \ldots + K_m . iH) + \ldots + \sum_{l,s-2} G(F_s . K_1 + K_2 + \ldots$$
$$+ K_m . (s-2)H) + \sum_{l,s-1} (F_s . K_1 + K_2 + \ldots + K_m . (s-1)H) - \binom{l-1}{s-2}.$$

Qui in virtù della stessa formula (19), si ha:

$$G(F_s H.K_1 + K_2 + \dots + K_m) = \sum_{m,1} G(F_s HK) + \sum_{m,2} G(F_s H.2K + \dots$$
$$+ \sum_{m,i} G(F_s H.iK) + \dots + \sum_{m,s-1} (F_s H.(s-1)K) - \binom{m-1}{s-2}$$

$$G(F_s.2H.K_1 + K_2 + \dots + K_m) = \sum_{m,1} G(F_s.2H.K) + \dots$$
$$+ \sum_{m,i-1} G(F_s.2H.(i-1)K) + \dots + \sum_{m,s-2} (F_s.2H(s-2)K) - \binom{m-1}{s-3}$$

. . . .

$$G(F_s.iH.K_1 + K_2 + \dots + K_m) =$$
$$\sum_{m,1} G(F_s.iH.K) + \dots + \sum_{m,s-i} (F_s.iH.(s-i)K) - \binom{m-1}{s-i-1}$$

. . . .

$$G(F_s.(s-1)H.K_1 + K_2 + \dots + K_m) =$$
$$\sum_{m,1} (F_s.(s-1)H.K)$$

e quindi si trova:

$$G(F_s . H_1 + H_2 + \dots + H_l, K_1 + K_2 + \dots + K_m) =$$
$$= \sum_{l,1}\sum_{m,1} G(F_s H.K) + [\sum_{l,1}\sum_{m,2} G(F_s H.2K) + \sum_{l,2}\sum_{m,1} G(F_s.2H.K)] + \dots$$
$$+ [\sum_{l,1}\sum_{m,i} G(F_s H.iK) + \sum_{l,2}\sum_{m,i-1} G(F_s.2H.(i-1)K) + \dots + \sum_{l,i}\sum_{m,1} G(F_s.iH.K)] + \dots$$
$$+ [\sum_{l,1}\sum_{m,s-2} G(F_s H.(s-2)K) + \sum_{l,2}\sum_{m,s-3} G(F_s.2H.(s-3)K) + \dots + \sum_{l,s-2}\sum_{m,1} G(F_s(s-2)H.K)] +$$
$$+ [\sum_{l,1}\sum_{m,s-1} (F_s.H.(s-1)K) + \sum_{l,2}\sum_{m,s-2} (F_s.2H.(s-2)K) + \dots + \sum_{l,s-1}\sum_{m,1} (F_s(s-1)H.K)] -$$
$$- \left[\binom{l-1}{s-2} + \binom{l}{1}\binom{m-1}{s-2} + \binom{l}{2}\binom{m-1}{s-3} + \dots + \binom{l}{s-2}\binom{m-1}{1}\right]$$

donde, osservando che per la relazione (14) è:

$$\binom{l}{1}\binom{m-1}{s-2} + \binom{l}{2}\binom{m-1}{s-3} + \dots + \binom{l}{s-2}\binom{m-1}{1} =$$
$$= \binom{l+m-1}{s-1} - \binom{l}{s-1} - \binom{m-1}{s-1} = \binom{l+m-1}{s-1} - \left[\binom{l-1}{s-1} + \binom{m-1}{s-1}\right] - \binom{l-1}{s-2}$$

si deduce la formola seguente:

$$(20)\quad G(F_s\,.\,H_1+H_2+\ldots+H_l,\,K_1+K_2+\ldots+K_m)=$$
$$=\sum_{x_1y_1}G(F_s.x_1H.y_1K)+\sum_{x_2y_2}G(F_s.x_2H.y_2K)+\ldots+\sum_{x_iy_i}G(F_s.x_iH.y_iK)+$$
$$\ldots+\sum_{x_{s-2}y_{s-2}}G(F_s.x_{s-2}H.y_{s-2}K)+\sum_{x_{s-1}y_{s-1}}(F_s.x_{s-1}H.y_{s-1}K)$$
$$-\left\{\binom{l+m-1}{s-1}-\left[\binom{l-1}{s-1}+\binom{m-1}{s-1}\right]\right\}$$

dove $(F_s\,.\,x_iH\,.\,y_iK)$ rappresenta la varietà completa intersezione di F_s con x_i delle l forme H ed y_i delle m forme K, x_i ed y_i essendo due numeri interi positivi, diversi da zero, che verificano l'equazione:

$$x_i+y_i=i+1$$

(nella quale è da porre successivamente $i=1,2,\ldots,s-1$), e la somma $\sum\limits_{x_iy_i}$ deve essere estesa a tutte le soluzioni intere positive dell'equazione precedente, escluse quelle due in ciascuna delle quali figura lo zero, in modo che la somma stessa contiene

$$A_{22,i+1}=\sum\binom{l}{x_i}\binom{m}{y_i}$$

termini (*).

4. — Stabilita così la formula (20), è facile dimostrare, seguendo un procedimento affatto analogo a quello col quale essa è stata dedotta dalla (19), anche la espressione seguente:

$$(21)\quad G(F_s.H_1+H_2+\ldots+H_l,K_1+K_2+\ldots+K_m,L_1+L_2+\ldots+L_n)=$$
$$=\sum_{x_1y_1z_1}G(F_s\,.\,x_1H\,.\,y_1K\,.\,z_1L)+\sum_{x_2y_2z_2}G(F_s\,.\,x_2H\,.\,y_2K\,.\,z_2L)+\ldots$$
$$+\sum_{x_iy_iz_i}G(F_s\,.\,x_iH\,.\,y_iK\,.\,z_iL)+\ldots$$
$$+\sum_{x_{s-3}y_{s-3}z_{s-3}}G(F_s\,.\,x_{s-3}H\,.\,y_{s-3}K\,.\,z_{s-3}L)+\sum_{x_{s-2}y_{s-2}z_{s-2}}(F_sx_{s-2}H\,.\,y_{s-2}K\,.\,z_{s-2}L)$$
$$-\left\{\binom{l+m+n-1}{s-1}-\left[\binom{l+m-1}{s-1}+\binom{l+n-1}{s-1}+\binom{m+n-1}{s-1}\right]+\right.$$
$$\left.+\left[\binom{l-1}{s-1}+\binom{m-1}{s-1}+\binom{n-1}{s-1}\right]\right\}$$

(*) Al simbolo A_{kk} già adoperato nel n° 1 del § 2, è necessario qui e in seguito, aggiungere come terzo indice la somma μ degli indicì di tutti i simboli combinatori, il cui prodotto costituisce un termine della somma rappresentata dallo stesso A_{kk}, e ciò allo scopo di distinguere fra loro le somme che differiscono l'una dall'altra soltanto per il diverso valore di μ.

dove $(F_s . x_i H . y_i K . z_i L)$ ha un significato analogo a $(F_s . x_i H . y_i K)$, e la somma $\sum\limits_{x_i y_i z_i}$ deve essere estesa a tutte le soluzioni intere e positive, escluse quelle formate in parte da zeri, dell'equazione:

$$x_i + y_i + z_i = i + 2$$

$(i = 1, 2, \ldots, s - 2)$, in modo che la somma stessa contiene:

$$A_{33, i+2} = \sum \binom{l}{x_i}\binom{m}{y_i}\binom{n}{z_i}$$

termini.

Dall'esame dei secondi membri delle formule (19), (20) e (21), si scorge facilmente la legge con cui essi sono formati. Quindi, applicando il metodo di induzione, si giunge senza difficoltà al risultato seguente:

" Il genere aritmetico della varietà:

$$(F_s, H_{11} + H_{12} + \ldots + H_{1l_1}, H_{21} + H_{22} + \ldots + H_{2l_2}, \ldots H_{k,1} + H_{k,2} + \ldots + H_{k,l_k})$$

" ad $s - k$ dimensioni $(k < s)$, è dato dalla formula:

$$\begin{aligned}
(22) \qquad & G(F_s, H_{11} + H_{12} + \ldots + H_{1l_1}, H_{21} + H_{22} + \ldots \\
& \qquad + K_{2l_2}, \ldots, H_{k,1} + H_{k,2} + \ldots + H_{k,l_k}) = \\
= & \sum_{y_{11} \ldots y_{1k}} G(F_s y_{11} H_1 y_{12} H_2 \ldots y_{1k} H_k) + \ldots + \sum_{y_{i1}, \ldots y_{ik}} G(F_s . y_{i1} H_1 . y_{i2} H_2 \ldots y_{ik} H_k) + \ldots \\
& + \sum_{y_{s-k,1} \ldots} G(F_s y_{s-k,1} H_1 \, . \, y_{s-k,2} H_2 \ldots y_{s-k,k} H_k) + \\
& + \sum_{y_{s-k+1,1} \ldots} F_s y_{s-k+1,1} H_1 \, . \, y_{s-k+1,2} H_2 \ldots y_{s-k+1,k} H_k) \\
& - \left\{ \binom{l_1 + l_2 + \ldots + l_k - 1}{s-1} - \sum \binom{l_1 + l_2 + \ldots + l_{k-1} - 1}{s-1} + \right. \\
& \left. + \sum \binom{l_1 + l_2 + \ldots + l_{k-2} - 1}{s-1} - \ldots + (-1)^{k-1} \sum \binom{l_1 - 1}{s-1} \right\}
\end{aligned}$$

" dove $(F_s . y_{i,1} H_1 . y_{i\,2} H_2 \ldots y_{ik} H_k)$ rappresenta la varietà completa
" intersezione di F_s con $y_{i,1}$ qualsivogliano delle l_1 forme H_1,
" $y_{i,2}$ qualsivogliano delle l_2 forme $H_2, \ldots, y_{i,k}$ qualsivogliano
" delle l_k forme H_k, essendo $y_{i,1}, y_{i,2}, \ldots, y_{i,k}$, numeri interi, po-
" sitivi e diversi da zero, che verificano l'equazione:

$$y_{i,1} + y_{i,2} + \ldots + y_{i,k} = i + k - 1$$

" dove i deve assumere successivamente i valori $1,2,\ldots,s-(k-1)$,
" e la somma $\sum_{y_{i,1}\ldots y_{i,k}}$ è da estendere a tutte le soluzioni intere e
" positive, escluse quelle costituite parzialmente da zeri, del-
" l'equazione precedente, in modo che la somma stessa contiene:

$$A_{kk,i+k-1}=\sum\binom{l_1}{y_{i,1}}\binom{l_2}{y_{i,2}}\binom{l_k}{y_{i,k}}$$

" termini „.

§ 4°.

Dopo quanto è stato esposto nei due paragrafi precedenti, è facile effettuare sui risultati del § 1° la trasformazione accennata alla fine del paragrafo stesso.

A tale oggetto si consideri in F_s il sistema lineare $|V|$ costituito dalle varietà V, ad $s-1$ dimensioni, intersezioni della stessa F_s con tutte le forme d'ordine l dello spazio S_r. S'indichi con Π_0 il grado di questo sistema, e con Π_i $(i=1,2,\ldots,s-1)$ il genere aritmetico della intersezione di $s-i$ varietà V, il quale è eguale a quello della varietà composta, intersezione di F_s con $s-i$ varietà, ciascuna formata da l spazi S_{r-1}. Quindi il genere stesso può essere calcolato, applicando la formula (22) del paragrafo precedente. Così e facendo poi i successivamente eguale ad $1,2,\ldots,s-1$, si ottengono le eguaglianze seguenti:

(23)

$$\begin{aligned}
\Pi_{s-1}&=C_{11}P_{s-1}+C_{12}P_{s-2}+C_{13}P_{s-3}+\ldots+C_{1,s-i}\ P_i+\ldots+C_{1,s-1}\ P_1+C_{1,s}\ P_0-x_{s-1}\\
\Pi_{s-2}&=C_{22}P_{s-2}+C_{23}P_{s-3}+\ldots+C_{2,s-i}\ P_i+\ldots+C_{2,s-1}\ P_1+C_{2,s}\ P_0-x_{s-2}\\
\Pi_{s-3}&=C_{33}P_{s-3}+\ldots+C_{3,s-i}\ P_i+\ldots+C_{3,s-1}\ P_1+C_{3,s}\ P_0-x_{s-3}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Pi_i&=C_{s-i,s-i}P_i+\ldots+C_{s-i,s-1}P_1+C_{s-i,s}P_0-x_i\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Pi_1&=C_{s-1,s-1}P_1+C_{s-1,s}P_0-x_1\\
\Pi_0&=C_{s,s}\ P_0
\end{aligned}$$

nelle quali $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{s-1}$ hanno i significati già loro attribuiti nel n° 5 del § 1°; i coefficienti $C_{j,s-i}$ e i termini x_i, in virtù delle (15) e (22) sono dati rispettivamente dalle formule:

$$
(24)\quad
\begin{aligned}
C_{s-i,s-i} &= \binom{(s-i)l}{s-i} - \binom{s-i}{1}\binom{(s-i-1)l}{s-i} + \ldots \\
&\quad + (-1)^{s-i-2}\binom{s-i}{s-i-2}\binom{2l}{s-i} + (-1)^{s-i-1}\binom{s-i}{s-i-1}\binom{l}{s-i} \\
C_{s-i-1,s-i} &= \binom{(s-i-1)l}{s-i} + \ldots \\
&\quad + (-1)^{s-i-3}\binom{s-i}{s-i-3}\binom{2l}{s-i} + (-1)^{s-i-2}\binom{s-i}{s-i-2}\binom{l}{s-i} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
C_{2,s-i} &= \binom{2l}{s-i} - \binom{2}{1}\binom{l}{s-i} \\
C_{1,s-i} &= \binom{l}{s-i}
\end{aligned}
$$

e dalle altre:

$$
(25)\quad
\begin{aligned}
x_1 &= \binom{(s-1)l-1}{s-1} - \binom{s-1}{1}\binom{(s-2)l-1}{s-1} + \ldots \\
&\quad + (-1)^{s-3}\binom{s-1}{s-3}\binom{2l-1}{s-1} + (-1)^{s-2}\binom{s-1}{s-2}\binom{l-1}{s-1} \\
x_2 &= \binom{(s-2)l-1}{s-1} - \ldots \\
&\quad + (-1)^{s-4}\binom{s-2}{s-4}\binom{2l-1}{s-1} + (-1)^{s-3}\binom{s-2}{s-3}\binom{l-1}{s-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{s-2} &= \binom{2l-1}{s-1} - \binom{2}{1}\binom{l-1}{s-1} \\
x_{s-1} &= \binom{l-1}{s-1}
\end{aligned}
$$

Ora dalle (23) segue:

$$
(26)\quad
\begin{aligned}
&\Pi_0 - \Pi_1 + \Pi_2 - \ldots + (-1)^i \Pi_i + \ldots \\
&\quad + (-1)^{s-3}\Pi_{s-3} + (-1)^{s-2}\Pi_{s-2} + (-1)^{s-1}\Pi_{s-1} = \\
&= \sum_{i=0}^{i=s-1} (-1)^i \left[C_{s-i,s-i} - C_{s-i-1,s-i} + \ldots + (-1)^{s-i-3} C_{3,s-i} + \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{s-i-2} C_{2,s-i} + (-1)^{s-i-1} C_{1,s-i}\right] P_i + \\
&\quad + \left[x_1 - x_2 + \ldots + (-1)^{s-2} x_{s-3} + (-1)^{s-1} x_{s-2} + (-1)^s x_{s-1}\right].
\end{aligned}
$$

Qui, in virtù delle (24), ricordando la relazione:

$$1+\binom{n}{1}+\binom{n+1}{2}+\dots+\binom{n+k-1}{k}=\binom{n+k}{k},$$

è:

$$C_{s-i,s-i}-C_{s-i-1,s-i}+\dots$$
$$+(-1)^{s-i-3}C_{3,s-i}+(-1)^{s-i-2}C_{2,s-i}+(-1)^{s-i-1}C_{1,s-i}=$$
$$=\binom{(s-i)l}{s-i}-\binom{(s-i)+1}{1}\binom{(s-i-1)l}{s-i}+\binom{s-i+1}{2}\binom{(s-i-2)l}{s-i}-\dots$$
$$+(-1)^{s-i-3}\binom{s-i+1}{s-i-3}\binom{3l}{s-i}+(-1)^{s-i-2}\binom{s-i+1}{s-i-2}\binom{2l}{s-i}+$$
$$+(-1)^{s-i-1}\binom{s-i+1}{s-i-1}\binom{l}{s-i}$$

ossia, trasformando il secondo membro di questa eguaglianza per mezzo della (18), nella quale si ponga $m=s-i$ ed $n=0$:

$$C_{s-i,s-i}-C_{s-i-1,s-i}+\dots+(-1)^{s-i-3}C_{3,s-i}+(-1)^{s-i-2}C_{2,s-i}+$$
$$+(-1)^{s-i-1}C_{1,s-i}=\binom{l+s-i-1}{s-i}.$$

Inoltre, in virtù delle (25), in modo analogo al precedente, si trova:

$$x_1-x_2+\dots+(-1)^{s-2}x_{s-3}+(-1)^{s-1}x_{s-2}+(-1)^{s}x_{s-1}=$$
$$=\binom{(s-1)l-1}{s-1}-\binom{s}{1}\binom{(s-2)l-1}{s-1}+\binom{s}{2}\binom{(s-3)l-1}{s-1}-\dots$$
$$+(-1)^{s-2}\binom{s}{s-4}\binom{3l-1}{s-1}+(-1)^{s-1}\binom{s}{s-3}\binom{2l-1}{s-1}+(-1)^{s}\binom{s}{s-2}\binom{l-1}{s-1}$$

e di qui, applicando di nuovo la relazione (18), nella quale ora si faccia $m=s-1$ ed $n=1$, segue:

$$x_1-x_2+\dots+(-1)^{s-2}x_{s-3}+(-1)^{s-1}x_{s-2}+(-1)^{s}x_{s-1}=\binom{l+s-1}{s-1}-s.$$

In tal modo la (26) diventa:

$$\Pi_0-\Pi_1+\Pi_2-\dots+(-1)^{s-1}\Pi_{s-1}=$$
$$=\binom{l+s-1}{s}P_0-\binom{l+s-2}{s-1}P_1+\binom{l+s-3}{s-2}P_2-\dots$$
$$+(-1)^{s-1}\binom{l}{1}P_{s-1}+\binom{l+s-1}{s-1}-s.$$

In fine dal confronto di questa eguaglianza con la (11), si deduce:

I. " La postulazione, per una forma d'ordine l qualunque, " di una varietà $F_s (s=r-h)$ di uno spazio S_r, priva di parti " multiple, ma del resto avente singolarità qualsivogliano, la " quale sia completa intersezione di h forme degli ordini n_1, " $n_2, \ldots, n_h$, è data dall'espressione:

$$\chi(l,h,r)+\delta=\Pi_0-\Pi_1+\Pi_2-\ldots+(-1)^{s-1}\Pi_{s-1}+(-1)^s P_s+s$$

" dove δ ha il noto significato (§ 1°, n° 1), P_s è il genere aritme- " tico della varietà F_s e $\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{s-1}$ sono i caratteri " del sistema di varietà segato sulla stessa F_s da tutte le forme " d'ordine l dello spazio S_r ".

In particolare pongasi $l=\sum n_1-r-1$; in tal caso tutte le forme d'ordine l dello spazio S_r segano in F_s il *sistema* $|V'-V|$ di cui i caratteri si indicano con $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{s-1}$; e quindi, come nel n° 5 del § 1°, dal teorema precedente, si deduce:

II. " I caratteri $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{s-1}$ del sistema $|V'-V|$ " della varietà F_s sono legati fra loro dalla relazione lineare:

$$\Omega_0-\Omega_1+\Omega_2-\ldots-\Omega_{s-1}+s-1=0$$

" oppure dall'altra:

$$\Omega_0-\Omega_1+\Omega_2-\ldots+\Omega_{s-1}+s-1=2(P_s-1)$$

" dove P_s è il genere aritmetico della varietà F_s, secondochè " la dimensione s di questa è pari o dispari ".

Roma, dicembre 1908.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

CLASSE
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 14 Marzo 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Boselli, Vice-Presidente dell'Accademia, Manno, Direttore della Classe, Carle, Allievo, Renier, Pizzi, Chironi, Ruffini, Stampini e De Sanctis, Segretario. — Scusano la loro assenza i Soci D'Ercole e Sforza.

È approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, 28 febbraio 1909.

Il Presidente crede di interpretare i sentimenti di tutti i Colleghi esprimendo a nome dell'Accademia le più vive condoglianze al Socio Prof. Icilio Guareschi per la morte della figlia sig[a] Maria Guareschi Garelli, avvenuta in Napoli il 9 marzo. Al Presidente si associa con sentite parole il Vice-Presidente Boselli.

Si comunica l'invito a partecipare al secondo Congresso internazionale di archeologia che si terrà al Cairo nel prossimo aprile. La Presidenza provvederà affinchè vi sia rappresentata la nostra Accademia.

Si legge una circolare della Società degli amici delle lettere russe che invita a partecipare alla festa inaugurale del monumento in onore di Nicola Gogol che avrà luogo il 9 maggio prossimo. La Presidenza comunicherà l'adesione dell'Accademia.

È presentato d'Ufficio lo scritto del Socio G. Sforza intitolato: *L'indennità ai Giacobini piemontesi perseguitati e danneggiati (1800-1802),* Torino, Bocca, 1908, da lui offerto in omaggio all'Accademia.

Il Socio Chironi offre, a nome dell'autore, il volume dell'Avv. Carlo Toesca di Castellazzo: *Il prezzo dell'avviamento, il sovrapprezzo delle azioni e l'imposta di ricchezza mobile* (Torino, Bocca, 1909), e ne espone brevemente, con parole d'elogio, il contenuto.

Il Socio Renier presenta per gli *Atti* una nota del Dr. Luigi Foscolo Benedetto, intitolata: *Per la cronologia del "Roman de la Rose"*.

LETTURE

Per la cronologia del "Roman de la Rose".

Nota del Dr. LUIGI FOSCOLO BENEDETTO.

I termini cronologici, entro i quali Jean de Meun compose la sua continuazione del *Roman de la Rose*, non furono sinora determinati in modo soddisfacente; la scarsezza dei dati non concederà forse mai al problema una soluzione sicura. Non si può dire tuttavia che di tutte le questioni secondarie, da cui la questione principale può in qualche misura aver luce, si sia tenuto il debito conto e sia stata fatta quell'indagine attenta che sarebbe stata opportuna; qualche argomento non trascurabile fu trascurato.

Degne del più attento studio per la ricerca nostra sono le relazioni di Jean de Meun e di Brunetto Latini. Già P. Paris (1), dopo aver parlato dello stupendo episodio di Dame Nature, osservò: " allégorie très complexe qui se retrouve avec des changements dans le *Tesoretto* de Brunetto Latini ". Era un accenno vago di cui la critica non si volle dare molto pensiero. Se il *Tesoretto* era stato veramente composto prima del 1266 e se veramente il *Roman de la Rose* era stato continuato, come universalmente credevasi, dopo il 1266, il Latini non poteva essersi valso dell'opera di Jean de Meun. Lo Scherillo (2), l'unico, per quel che io sappia, ch'abbia sottoposto ad un rapido esame la dichiarazione di P. Paris, diceva doversi concludere, ove fosse necessario concludere che l'uno aveva imitato l'altro, che l'imitatore era stato il francese. Mostravasi però contrario all'idea di un rapporto diretto, accogliendo l'ipotesi di una fonte comune: Alano dalle Isole.

---

(1) *Le Roman de la Rose*, in " Hist. Litt. de la France ", t. XXIII, pag. 37.
(2) *Alcuni capitoli della biografia di Dante*, Torino, 1896, pag. 124.

Chi metta i due episodi tra di loro a confronto non può non essere impressionato dalla concordia con cui vi procede il pensiero, dalla somiglianza della forma con cui spesso il pensiero vi è espresso. Entrambi incominciano col confessare, quasi colle stesse parole, di non saper descrivere la natura.

R. de la R. (ed. Michel), 17101-5.

Bien la vous vosisse descrire;
Mès mi sens n'i porroit soffire.
Mi sens! Qu'ai-ge dit? c'est du mains,
Non feroit voir nus sens humains,
Ne par vois vive ne par notes.

Tes., 268-71 (ed. Wiese).

Nè lingua nè scrittura
Non seria soficiente
A dir chompiutamente
Le bellezze, ch'auea.

Cionondimeno entrambi, dopo aver detto di essere impotenti a raffigurarla, non sanno rinunziare a qualche tentativo di descrizione; Jean ne ammira il vermiglio di rosa e la bianchezza di neve; Brunetto si ferma a ricordarne " la bianca fronte „ e le " labbra vermiglie „.

Delimitano il suo campo d'azione, contrappongono la finitezza e la temporaneità delle cose da essa create alla potenza infinita ed eterna di Dio.

R. de la R., 19993-4.

Onques riens ne fis pardurable,
Quanques ge fais est corrumpable.

Tes., 279-82.

E uidi in sua fattura
Che ongne creatura,
Ch'auea chominciamento
Ueni' a finimento.

R. de la R., 20021-3.

Car jà n'iert riens fait par Nature,
Combien qu'ele i mete grant cure,
Qui ne faille en quelque saison.

Tes., 298-300.

Ma tutto mio labore
Quanto che io l'alumi
Chonvien che si consumi.

E di fronte a ciò, in entrambi i poemi, l'onnipotenza divina.

R. de la R., 20004-8.

Tant ai pooir povre et obnuble
Au regart de la grant poissance
Du Dieu qui voit en sa présence
La triple temporalité
Souz un moment d'éternité.

Tes., 301-7.

Esso è omnipotente,
Ma io non so neente,
Se non quanto choncede.
Esso tutto prouede
E è in ongne lato
Essa ciò ch'è passato
E l futuro e l presente.

R. de la R., 20832-8 (è Genius che parla).	*Tes.* 307-14.
C'est li biaus miroers ma dame;	Ma io non son sacciente
Jà ma dame riens ne séust,	Se non di quel che uuole,
Si ce bel miroer n'éust.	Mostrami chome suole,
Cil la governe, cil la rieule,	Quello che uuol ch'io faccia,
Ma dame n'a point d'autre rieule;	E che uol ch'io disfaccia,
Quanqu'ele set, il li aprist	Ond'io son sua ourera
Quant à la chamberière la prist.	Di ciò ch'eso m'impera.

Ordinato che fu il mondo la Natura fu da Dio preposta alle cose.

R. de la R., 17708 e sgg.	*Tes.*, 315-6.
Tant m'enora, tant me tint chière,	Chosì in terra e inn aria
Qu'il m'establi sa chamberière;	M'a fatta sua uicharia.
. . . .	
. . . .	
Por chamberière! certes vaire,	
Por conestable et por vicaire.	

Per dimostrare la libera onnipotenza di Dio, tutti e due i poeti ricordano il fenomeno miracoloso dell'incarnazione e terminano nel medesimo modo:

R. de la R., 20093-4.	*Tes.*, 378-80.
Car por moi ne peut-ce pas estre	Che chontra l'arte mia
Que riens puisse de virge nestre.	Fu l suo ingeneramento
	E lo suo nascimento

Anche nel *Tesoro* Brunetto Latini parla della Natura (1): “ E sopra questa maniera e l'officio della natura, è Dio sovrano “ padre; ché egli è creatore, ed ella è creatura; egli è senza co- “ minciamento ed ella con cominciamento; egli è comandatore, “ ed ella ubbidisce; egli non averà mai fine, ed ella finirà con “ tutto il suo lavoro; egli è del tutto potente, ed ella non ha “ potenza se non quella che Dio le ha data; egli sa tutte le “ cose passate e presenti e quelle che debbono essere, ed ella “ non sa se non quelle ch'egli le mostra; egli ordinò il mondo, “ ed ella eseguisce il suo ordinamento „. Si passa poi anche nel *Tesoro* a parlare di Cristo e di Maria.

---

(1) *Il Tesoro di Br. Latini* volgarizzato da Bono Giamboni, ed. Luigi Gaiter, Bologna, 1878, vol. I, pag. 27-28.

Il Sundby (1) discute l'opinione che sul primo libro del *Trésor* si sia fatta sentire l'influenza dell'*Image du Monde* di Gautier de Metz. Benchè egli non giunga in proposito ad una conclusione sicura e non escluda il caso che i due autori siano ricorsi ad una fonte comune, benchè d'altra parte io non abbia avuta l'opportunità a lui concessa di consultare direttamente l'opera di Gautier, pure mi sembra verisimile l'uso di quest'ultimo da parte di Brunetto Latini. Il modo con cui Gautier espresse la sua concezione della Natura molto non differisce da quello con cui espresse la sua il nostro autore. Gautier disse che la Natura è nelle mani di Dio ciò che è la scure nelle mani del legnaiuolo (2); un' immagine consimile ha il *Tesoro*: " La Natura è a Dio come il martello è al fabbro „ (3).

Taluno può pensare, dopo questo, che la fonte della prima parte del *Trésor* sia stata anche la fonte della parte corrispondente del *Tesoretto*. Io non nego che il Latini quando componeva il suo poema italiano, già potesse conoscere l'*Image du Monde*; ma non si può neanche negare ch'egli allora conoscesse pure altri autori: Boezio, Alano da Lilla, Jean de Meun. Di Boezio è evidente l'influsso nella figurazione della Natura; di Jean de Meun abbiamo mostrate le tracce. Di Alano, in cui lo Scherillo vede la fonte prima dell'episodio italiano, non appaiono visibili i segni; il solo verso 316 " m'a fatto sua uicharia „ cui non manca, come vedemmo, la rispondenza nel *Roman de la Rose*, potrebbe essere richiamato ad una frase del *De Planctu Naturae*: " me igitur tanquam sui vicariam..... destinavit „ (4).

Ora tra le fonti del libro I del *Trésor* dovrà ricordarsi, prima di ogni altra, il *Tesoretto* stesso. Del poema interrotto l'autore conservò sunteggiandole, per la sua trattazione della natura, le parti utili; le sfrondò degli ornamenti poetici allegorici. Per gli ulteriori svolgimenti della materia più non ricorse alle opere che quegli ornamenti gli avevano fornito; è naturale che al *De Consolatione Philosophiae* e al *Roman de la Rose* egli

(1) Sundby, *Della vita e delle opere di B. Latini*, trad. R. Renier, Firenze, 1884, pag. 83 e 99.

(2) Cfr. Le Grand d'Aussy, *Notices et extraits de mss.*, V, 245.

(3) Lib. II, cap. 30.

(4) Migne, CCX, 453 D.

abbia sostituito un lavoro che più somigliava a quello nuovo cui s'era accinto: l'*Image du Monde* (1).

Io credo quindi che per questo nessuno vorrà impugnare la validità delle rispondenze notate. All'opinione che si tratti non di una semplice analogia ma di una vera e propria derivazione ci rende anche meglio disposti la presenza di altri copiosi e non meno evidenti rapporti colla prima parte del romanzo, coll'opera di Guillaume. Qui mi contenterò di qualche rapido accenno (2). Ser Brunetto entra nella casa di Giustizia e vi trova Largheza la quale insegna " chon gran pianezza | Ad un bel chaualero | Chome nel suo mistero | Si dovesse portare „ (vv. 1362-5). Si pensa naturalmente a Largèce, al nobile cavaliere cui si accompagna, e al verziere di Déduit o, per meglio dire, al discorso di Amour ci fanno anche meglio pensare gli ammonimenti che Larghezza fa al suo cavaliere:

Tes., 1413-6.	*R. de la R.*, 2271-4.
Chè dare tostamente È donar doppiamente E dar chome sforzato Perde lo don e l grato.	Car l'en a la chose moult chière Qui est donnée à bele chière; Mès ge ne pris le don un pois Que l'en donne desus son pois.
Tes., 1441-2.	*R. de la R.*, 2121-2.
Non dicer uillania Nè mal motto che ssia.	Jà por nomer vilaine chose Ne doit ta bouche estre desclose.
Tes., 1541-6.	*R. de la R.*, 2151-4.
Essai, ch'io molto lodo, Che ttu a ongne modo Abi di belli arnesi, E priuati e palesi, Sì che n chasa e di fore Si paia l tuo onore.	Mène-toi bel selonc ta rente De robes et de chancemente: Bele robe et biau garnement Amendent les gens durement.

(1) È degno di nota che, nonostante il contrasto tra le intenzioni artistiche del *Tesoretto* e le intenzioni rigidamente scientifiche del *Tesoro*, non interamente è l'elemento allegorico bandito dalla severa opera in prosa; v'ha un passo (*Trésor*, ed. Chabaille, pag. 394-5) in cui l'autore personifica le discordi tendenze del proprio pensiero e ci presenta le due figure di Paors e Seurtez in discussione tra loro. Paors e Seurtez si trovano pure entrambe in lotta tra loro nella continuazione di Jean de Meun. Non si dimentichi che il *Trésor* fu scritto certamente prima del 1269, probabilmente prima del 1266.

(2) Delle relazioni di ordine generale e di altri particolari riscontri do più minuti ragguagli in un mio lavoro di prossima pubblicazione sulla fortuna del *Roman de la Rose* nella nostra letteratura.

Guillaume entra di maggio nel vergier Déduit, Brunetto entra il calendimaggio nel soggiorno di Amore. In entrambi i poemi è padrone del luogo il Piacere; in entrambi i poemi Amore è messo accanto al Piacere con lui strettamente congiunto, ma pur sempre di persona distinto.

La composizione del *Tesoretto* fu posta ragionevolmente dai critici verso il 1262; ed infatti il poema fu scritto dopo la disfatta che nel 1260 subirono i guelfi fiorentini, alla quale si accenna nel principio dell'opera, e prima del *Trésor*, che fu composto assai verisimilmente innanzi al 1266 (1).

Il " terminus ad quem „ nella cronologia del *Roman de la Rose* si andò facendo col progredire della critica sempre più antico. Nessun valido fondamento avevano i fantastici dati cronologici del Thevet (2), del Bouchet (3), del Corrozet (4), per i quali Jean de Meun fu rispettivamente contemporaneo di Carlo V (1364-1380), del papa Giovanni XXII (1316-1334), di Luigi X (1314-1316). Nulla di troppo preciso ci dicevano il Masson (5), il Baillet (6), il Du Verdier (7), affermando che Jean de Meun visse sotto Filippo il Bello (1285-1314). Il Lenglet du Fresnoy (8) fu il primo ad uscire con critica avvedutezza da siffatta indecisione, indicando quale " terminus ad quem „ il 1305, anno della sopressione dell' ordine dei templari, di cui si parla in modo favorevole nel poema. Alla considerazione del Lenglet diede irrefutabile conferma il Quicherat (9) mediante l'edizione d'un documento datato 6 nov. 1305 con cui: " maistre Adam d'Andeli clerc „ — lascia — " à religieus hommes et honestes au prieur et au couvent de l'ordre des Frères Preescheeurs de Paris..... tout le droit..... en la maison ou feu maistre Jehan de

---

(1) Sundby, *Op. cit.*, pag. 36-37.

(2) Cfr. Méon, *Le Roman de la Rose*, I, 56.

(3) *Les annales d'Aquitaine, Faicts et Gestes en sommaire des roys de France et d'Angleterre, Pays de Naples et de Milan*, Poictiers, 1644, 187.

(4) *Antiquit.*, I, 82 b.

(5) *Annalium libri quatuor*, ed. II, Lutetia, 1578.

(6) *Jugemens des savants*, Amsterdam, 1725, IV, 33.

(7) *Biblioth. franç.*, 547.

(8) Cfr. Fr. Michel, *R. de la R.*, I, Pref., xxii.

(9) *Jean de Meun et sa maison à Paris*, in " Bibliothèque de l'Éc. de Chartes „, vol. XLI (1880), pag. 46-52.

Meun souloit demourer „. Ma non fu necessario aspettare la pubblicazione del Quicherat per sostituire al termine del Lenglet un termine men recente. Già P. Paris aveva messe innanzi le due date: il 1285 e il 1282 (1); più tardi ne mise innanzi una terza: il 1284 (2). Il 1285 fu accolto in particolar modo dal Kupka (3): è l'anno della morte di Carlo I d'Angiò, di cui si dice nel romanzo " Qui par divine porveance | Est ores de Sesile rois „. Al 1284, anzichè al 1285, si sarebbe il Kupka sinceramente attenuto se non gli fosse sfuggita l'ultima argomentazione di P. Paris basata sull'ordine con cui sono elencate dal poeta le diverse sue opere nell'epistola con cui dedica a Filippo il Bello la sua versione di Boezio: in quell'elenco il *Roman de la Rose* è citato pel primo, è messo innanzi alla traduzione del *De re militari* di Vegezio, che fu scritta da Jean nel 1284 (4). A P. Paris fu però specialmente caro il 1282, la data della rivoluzione del vespro: dato il carattere del passo, ove si parla della dominazione angioina nell' Italia inferiore, se la grande rivoluzione già fosse stata compiuta, un qualche accenno ad essa non sarebbe mancato; la stessa espressione sopracitata non sarebbe sonata opportuna. G. Paris (5) ed E. Langlois (6) sostennero invece quale " terminus ad quem „ il 1277: il 15 gennaio 1277 Carlo comprò da Maria di Antiochia tutti i diritti al trono di Gerusalemme e dal 15 luglio di quell'anno tutti gli atti uscenti dalla cancelleria reale e sottoscritti dal re portarono accanto al nome del sovrano il titolo di re di Gerusalemme. Questa nuova dignità da Jean de Meun non sarebbe stata taciuta, se il passo fosse posteriore al 1277.

Mentre, quanto al " terminus ad quem „, fu tendenza quasi generale la ricerca di una data sempre più antica, quanto al " terminus a quo „ è visibile la tendenza contraria. Fondamento

---

(1) *Op. cit.*, pag. 24.

(2) *Hist. Litt. de la France*, XXVIII, pag. 391 e sgg.

(3) *Zur Chronologie und Genesis des Roman de la Rose*, von Dr. Paul Kupka, Gardelegen, 1901.

(4) Non sfuggì quest'argomento al Gorra, in Mazzatinti, *Mss. italian delle biblioteche di Francia*, III, 437-8.

(5) *La littérature française au M.-âge*, pag. 164.

(6) *Le Roman de la Rose* in Petit de Julleville, *Hist. de la langue et de la litt. franç.*, II, pag. 127 e sgg.

principale è anche qui l'episodio, cui già accennammo, della conquista angioina in Italia. P. Paris propone il 1266, cominciamento del regno di Carlo; il Langlois sostituisce al 1266 il 1268 e ciò è naturale essendo con Manfredi ricordato anche Corradino suppliziato in quell'anno; recentemente F. M. Warren (1) mostrò come lo spazio cronologico indicato dal Paris e dal Langlois si potesse ancora abbreviare. Insieme con Manfredi e Corradino, Jean de Meun nomina Enrico di Castiglia:

(vv. 7396-8) Henri, frère le roi d'Espaigne,
Plain d'orguel et de traïson,
Fist-il morir en sa prison.

Enrico di Castiglia, caduto nelle mani di Carlo, fu effettivamente condannato alla prigionia perpetua nel castello di S. Maria di Puglia. Ma quando Carlo venne a morte, egli fu, per intercessione del papa Onorio IV, liberato; nel 1294 fece ritorno in Ispagna. La sua morte in carcere è perciò una leggenda e richiedendosi alla sua formazione un certo tempo, il passo in questione non potè essere scritto, secondo il Warren, prima del 1271 circa (2).

Tale essendo la stato attuale della questione può sembrare follia proporre quale " terminus ad quem „ la data approssimativa della composizione del *Tesoretto*, il 1262 circa: il passo riguardante la fine della famiglia sveva si presenta come difficoltà insuperabile. La difficoltà è solo apparente. Il fatto che si trovano a un tempo influssi della continuazione meungiana nel *Tesoretto* e accenni a Manfredi, a Corradino, ad Enrico nella continuazione stessa, ci mostra che devono essere ripetute in un senso nuovo le parole di E. Langlois " ...l'épisode... peut être comme d'autres une addition intercalée par l'auteur dans son poème „ (3). Io non credo cioè che Jean de Meun abbia troppo

---

(1) *On the date and composition of Guillaume de Lorris* " *Roman de la Rose* „, in *Publications of the Modern Language Association of America*, vol. XXIII, n. 2 (1908), pag. 269 e sgg.

(2) È strano che il Warren non conosca il Kupka, il quale (*Op. cit.*, pag. 21) già aveva notato essersi la leggenda sulla morte dell'infante certamente formata " erst geraume Zeit nach seiner Gefangennahme „.

(3) Op. cit., pag. 127).

lungamente tenuta sul cavalletto l'opera sua incompiuta e dopo avervi di tempo in tempo, secondo il capriccio e l'agio, aggiunto questo e quest'altro episodio, abbia alfine reso noto al pubblico il suo poema. Io penso invece ch'egli non abbia mai levate le mani dall'opera già presentata in una prima redazione ai lettori. Vedremo tra breve che il considerare l'episodio della conquista angioina come parte della redazione primitiva va incontro ad una difficoltà abbastanza grave, osserverò frattanto (ed è curioso osservarlo dappoichè parliamo di rapporti tra Jean de Meun e Brunetto) che anche nel *Trésor* la parte relativa alle vittorie di Carlo d'Angiò sugli Svevi non si trova nei più antichi manoscritti. Il Chabaille (1) crede che si tratti di un'addizione fatta dal Latini dopo il suo ritorno a Firenze e il Sundby (2) dice verisimile tale opinione. Si può pensare che l'ardore del suo sentimento guelfo abbia spinto Brunetto reduce in patria a continuare la parte storica della sua enciclopedia fino alla morte dell'odiato Manfredi; quanto a Jean de Meun, si può pensare che ad aggiungere l'accenno tanto discusso sia stato spinto non dall'odio per Manfredi, ma dall'amore e dal cortigianesco ossequio per il rivale di lui “ li bon Karles „ (3).

Un secondo ostacolo ad accogliere quale “ terminus ad quem „ il 1262 sarebbe presentato dalla menzione del conte Roberto di Artois. È Nature che parla (vv. 19630-9):

> Chevaliers as armes hardis,
> Preus en faiz et cortois en dis,
> Si cum fu mi sires Gauvains,
> Qui ne fu pas pareus as vains,
> Et li bon quens d'Artois Robers,

(1) *Trésor*, Introd., pag. XXIII.

(2) *Op. cit.*, pag. 75.

(3) Quanto al tempo in cui Jean de Meun fece questa sua aggiunta possiamo dire soltanto ch'essa fu fatta prima del 1285. Le date 1277 e 1282 non hanno logica base. Nota opportunamente il Kupka (*op. cit.*, pag. 17-18, che anche dopo il 1277 e il 1282, cioè dopo la compera del titolo di re di Gerusalemme e dopo i Vespri siciliani, Jean de Meun poteva chiamare Carlo “ roys de Sézile „. “ Roys de Sizile „ lo chiama infatti ancora nel 1284 nella sua traduzione del “ de re militari „ di Vegezio (*L'art de chevalerie* p. par Ulysse Robert, “ Société des anciens textes „, 1897, pag. 59, lib. II, cap. XVII).

Qui dès lors qu'il issi du bers,
Hanta tous les jors de sa vie
Largèce, honor, chevalerie;
N'onc ne li plot oiseus séjors,
Ains devint hons devant ses jors.

Un Roberto ci fu tra i conti di Artois, secondo del suo nome, che nel 1267 fu fatto cavaliere del re S. Luigi suo zio e dopo una vita piena di nobili imprese fu ucciso a Courtrai in battaglia nel 1302. La giovane età in cui fu fatto " miles „ pare la spiegazione più semplice di quell'oscuro " devenir hons devant ses jors „. Qual concordia maggiore tra la poesia e la storia? Ma c'è un guaio. Chi legga senza preconcetti il passo citato deve ammettere che vi si parla di un Roberto già morto ("Si cum fu mi sires Gauvains...... Et li bon quens d'Artois Robers „ — cfr. pure " Hanta tous les jors de sa vie „). Ora sarebbe ridicolo per più ragioni credere il *Roman de la Rose* posteriore al 1302.

Il padre di Roberto II fu Roberto I, fratello di S. Luigi, che morì nel 1350 nella battaglia di Mansura. Che si trattasse di lui reputarono alcuni critici, tra cui il Croissandeau (1); nè io vedo perchè non si debba accettare tale opinione. La storia ci è più avara di notizie a suo riguardo di quel che sia riguardo al figliuolo; la vita e la fama gli furono meno prodighe dei loro doni; ma nulla ci vieta di credere ch'egli sia stato prode e cortese, fedele in tutta la vita alle virtù cavalleresche, tanto più s'era chiamato di soprannome le Vaillant; si può pensare benissimo che anch'egli, come più tardi il figliuolo, non abbia aspettato di essere maturo d'anni per mostrare la valentìa, il coraggio, la virtù di un uomo.

L'opportunità del primo termine da noi proposto non può essere discussa indipendentemente dal secondo, il " terminus a quo „. Prima però di passare a discorrerne, è necessario mostrare la verità di due fatti: che Jean de Meun si accinse molto giovane alla sua continuazione e giovane la condusse al suo fine.

Che giovane si sia accinto al lavoro è dimostrato non soltanto dall'indole del lavoro stesso più adatto certo ad un gio-

(1) *Le Roman de la Rose*, vol. IV, pag. 397, nota ai vv. 19395 e sgg.

vane che ad un uomo avanzato negli anni, ma anche dalle esplicite dichiarazioni di Jean. Amour dice del continuatore (vv. 11377-81):

> Se ge n'i viens tous empenés
> Por lire-li nostre sentence,
> Si tost cum il istra d'enfance
> Ce vous os jurer et plevir
> Qu'il n'en porroit jamès chevir.

Il Kupka (1) credette di poter ricavare da questi versi due conclusioni: in primo luogo che il poeta iniziò giovanissimo la sua continuazione, secondariamente ch'egli non potè da giovane terminarla. Il Dio, egli commenta, deve prontamente volare al fianco del giovane a dettargli le leggi dell'amore, perchè possa per tempo, da giovane, continuare il poema. Diffatti s'egli non si mette da giovane all'impresa, non riuscirà mai a finirla: l'opera è troppo lunga e non basterà la sua vita. Il Kupka non ha capito nulla del passo che cita. Non si tratta propriamente del romanzo, si tratta della difficoltà del problema che ne è l'argomento. Amour ha posto il problema ai suoi fidi: " Che via s'ha da tenere per debellare la potente nemica Jalousie, abbatterne il formidabil castello, liberare la rosa prigioniera? „. Per rispondere a siffatta domanda è necessaria una particolare maestria nelle cose di amore; non si troverebbero imbarazzati a suggerire il procedimento opportuno Gallo, Catullo e gli altri noti intenditori di materia amorosa; ma essi non sono più e Jean non è nato ancora. Del resto l'argomento è così grave che Jean stesso non ne verrebbe a capo. E il passo citato viene a dire: " Se io non volerò a comunicargli, appena egli sarà uscito d'infanzia, la decisione che ora avremo presa, da sè non riuscirà mai ad immaginarla „. E l'immaginarla, il venire a capo della questione, è indispensabile non per terminare la continuazione, ma per potersi accingere ad essa.

Il passo citato non lascia dubbio quanto alla giovane età del continuatore. Poco dopo lo stesso dio aggiunge ancora (vv. 11404-7):

---

(1) *Op. cit.*, pag. 14-15.

...puis qu'il sera hors d'enfance
Endoctriné de ma science,
Il fléutera nos paroles
Por quarrefours et par escoles.

e le parole che vengono dopo dimostrano che non si tratta di altre poesie d'amore, ma del *Roman de la Rose*. La parola “ enfance „, come la corrispondente parola latina “ pueritia „, ha un significato un po' vago ed incerto. C'è però un passo che c'impedisce di credere che Jean abbia adoperata la parola in un senso troppo lato. Il poeta ci spiega per qual motivo, appena uscito d'infanzia, egli potesse propagar per la Francia tutte le parole del dio, comporre quello che si potrebbe chiamare il vade-mecum degli innamorati. La cosa era molto semplice. Il “ diex d'amors „ s'era chinato sulla sua culla e gli aveva cantate, coprendolo colle sue ali, le sue note d'amore (v. 11400). Capisco che l'espressione è poeticamente esagerata e che qui non si parla veramente dell'infante in fasce; ma la stessa immagine non ci permette di attribuire al giovane che si dice appena uscito da un'infanzia siffattamente descritta una giovinezza avanzata. Egli poteva avere, io credo, circa vent'anni. In quell'età il giovane può dirsi ancora, in linguaggio scherzoso, quasi bambino; tale espressione sarebbe invece ridicola per un trentenne; a mala pena sarebbe scusabile sulle labbra di un uomo arcivecchio (1).

Non mi pare quindi lontana dal vero, benchè la si soglia citandola sottolineare ironicamente, l'opinione del Lenglet du Fresnoy (2), che dice Jean de Meun ventiduenne ed aggiunge scherzando: “ C'est le vrai temps de faire et de pratiquer les romans „. Una men tenera giovinezza gli viene assegnata dagli altri eruditi. Il Méon (3) vede in Jean un giovane dai 25 ai 30 anni; P. Paris (4) crede ch'egli abbia scritto il suo poema “ dans toute la fleur de sa jeunesse „ e più precisamente ch'egli

---

(1) Del ventunenne Ludovico Ariosto il fratello Gabriele diceva nel suo epicedio “ pene puer prima signabas ora iuventa „. Cfr. Giosuè Carducci, *La gioventù di L. Ariosto e la poesia latina in Ferrara*, in *Opere*, vol. XV, pag. 140-141.

(2) Cfr. *Roman de la Rose*, ed. Michel, vol. I, Pref., xxii.

(3) *R. de la R.*, I, Avert., xv.

(4) *Hist. Litt. de la France*, XXVIII, pag. 432.

abbia intrapresa la sua opera verso i trent'anni. G. Paris ed il Langlois non passano a specificazioni numeriche: il primo considera la seconda parte del *Roman de la Rose* come l'opera di uno studente dell'università parigina; il secondo, in generale, come un'opera di gioventù.

Alla giovanilità dell'autore pare si opponga la molta scienza ond'è rimpinzato il poema. Il Méon, pur concedendo al continuatore la giovane età che abbiamo veduta, osserva: " Il est facile de juger que le *Roman de la Rose* n'est point sorti de la plume d'un jeune homme „. Il Thevet ed il Fouchet stentano anch'essi a credere che " le *Roman de la Rose* ai esté buriné par quelque jeune cerveau „. Il Kupka ci vede il prodotto di un pensiero che si è andato a mano a mano in un lungo spazio di tempo arricchendo di nuova coltura. Ma se guardiamo, affidandoci alla dotta guida del Langlois (1), a quali e quanti fonti risalga l'erudizione di cui Jean fa amplissimo sfoggio, dobbiamo concludere che egli attinse da un numero non eccessivamente grande di scrittori e da scrittori tali che la conoscenza di essi in un giovane che aveva passati i vent'anni non era neppure allora cosa da far gridare al miracolo (2).

Resta ora a vedersi se Jean de Meun abbia lavorato a lungo intorno alla sua continuazione. Già mostrammo che il passo su cui il Kupka si basa per assicurare che Jean non compì da giovane l'opera sua non può piegarsi a siffatto significato. Il Kupka si sarebbe piuttosto dovuto fermare sui vv. 11382 e seguenti:

> Et por ce que bien porroit estre
> Que cis Jehans qui est à nestre
> Seroit, espoir, empéeschiés,
> . . . .
> Pri-ge Lucina la déesse
> D'enfantement, qu'el doint qu'il nesse
> Sans mal et sans encombrement
> Si qu'il puist vivre longement.

(1) *Origines et Sources du Roman de la Rose*, nella " Bibl. des éc. franç. d'Athènes et de Rome „, fasc. 58°.

(2) Al miracolo si potrà gridare invece, quando si veda Alain de Lille, il poeta tanto saccheggiato da Jean de Meun, usato da un poeta di dieci anni, Charles d'Orléans, nel *Livre contre tout péché* (Cfr. A. Thomas, *Les premiers vers de Charles d'Orléans*, in *Rom.*, XXII, 128-33).

Ma qui non è difficile a scoprirsi la piacevole esagerazione del poeta che per vieppiù esaltare l'importanza e accrescere la solennità del poema si dichiara predisposto dal Dio, foggiato apposta dalla natura per il compimento dell'opera. È evidente un'allusione a Guillaume. Non bisognava che l'increscioso caso di Guillaume si ripetesse. Questi era nato con qualche " mal ", con qualche " encombrement " ed era morto precocemente lasciando l'opera incompiuta; Jean doveva essere invece di resistenza, di longevità maggiore, chè il poema non doveva essere interrotto per la seconda volta. Non c'è nessuna allusione alla lunghezza dell'opera. Guillaume de Machaut, traendo ispirazione da Jean de Meun, si vantò anch'egli di essere stato formato a parte dalla natura, perchè formasse a sua volta piacenti detti di Amore, e dicendo ciò non si riferiva alla lunghezza di nessun poema (1).

Ma c'è un fatto che non ci permette di credere che Jean abbia terminato in tarda età il suo lavoro ed è che nella tarda età egli lo considerava come una vana opera giovanile. Dice nel Testament (2):

> J'ai fait en ma jonesce mainz diz par vanité
> Ou maintes gens se sont plusours fois delité.
> Or m'en doinst Dieu un faire par vraie charité
> Pour amender les autres qui poi m'ont profité.

Si volle dedurre da questi versi che altre poesie furono scritte da Jean, oltre al *R. de la R.*, che non sono a noi pervenute, almeno sotto il nome del loro autore (3). La cosa mi sembra improbabile. Perchè efficace contrasto in questi versi ci sia, è necessario che alla carità edificante del poema senile sia contrapposta la mondana giocondità del libro giovanile: il *R. de la R.*; non le poesiole sparse che Jean non menziona e che nessuno conosce, ma l'opera che Jean menziona per prima nell'elenco che egli stesso ci lasciò delle opere sue.

Non deve sgomentarci l'espressione " mainz diz ". La pa-

---

(1) *Les œuvres de Guillaume de Machaut*, Paris-Reims, 1849, ed. Tarbé, pag. 1 e sgg.

(2) *Le Roman de la Rose*, Amsterdam, 1735, tome III, pag. 1, vv. 5-8.

(3) Langlois (in Petit de Julleville), pag. 130.

rola " dit ", oltre che abbracciare col suo significato più comune in tutta la sua integrità un componimento poetico, sia esso di brevi proporzioni come il " Dit de la rose " edito dal Bartsch, o di estensione notabile come il " Dit de la Panthère d'amors " edito dal Todd, può anche talora riferirsi, anzichè al tutto, alle sue singole parti. " Plaist vous oïr bons dis et biaus | qui sont d'autorité nouviaus? ". Così comincia il *Roman des Sept Sages* (1). Nè molto importa la vicinanza di " mainz diz " e di " dit " nel quatrain citato; essa riappare in un passo di un poeta ritornato recentemente alla luce: Gui de Mori (2).

Si ai mout grant piece pensé,
Tant qu'il m'est venu en pensé
Ke en nul sens je ne peuisse,
Com bien ke m'entente i meïsse,
Nul si biel dit d'Amours trouver
Com cil fist cui sens esprover
Poons par les dis de la Rose.

Jean de Meun potè in quattro o cinque anni dare al pubblico in una prima redazione il romanzo compiuto. Il metro che egli adoperava era di una facilità incomparabile e non appare ch'egli sia stato troppo schifiltoso nella ricerca delle rime. L'edificio ideale del poema è un edificio che si erige ridendo; non è di quelli che sorgano a fatica nel pensiero e a fatica prendano forma nell'arte; la mente dell'allegro scolare non ne fu certo eccessivamente estenuata. La dottrina vi è senz'avarizia profusa ed è questa una delle ragioni per sostenere la possibilità di una composizione relativamente veloce. Far l'erudito equivale sempre presso Jean a tradurre, a seguire molto davvicino un determinato modello; l'opera sua si riduce allora a stemprare nei facili versi una materia non sua e per fare ciò la trentina d'anni che gli concede il Kupka è veramente un po' troppo.

Premesse queste considerazioni risulta evidente che non possiamo basarci per fissare il " terminus a quo " sull'episodio relativo alla disfatta degli Svevi. La data che se ne deve de-

---

(1) Cfr. P. Voelker in *Zeitschrift f. r. Philologie*, X (1886), pag. 506-510.

(2) E. Langlois, *Gui de Mori et le Roman de la Rose*, in *Biblioth. de l'éc. des chartes*, LXVIII, 1907, pag. 260.

durre è almeno il 1271. (Il Warren è incline a scrivere il 1274). Ora se verso quegli anni Jean de Meun è appena " hors d'enfance „, come potrà trovarsi nel Testament, composto una ventina d'anni più tardi, poco dopo il 1291, la stanchezza lamentosa d'una vecchiezza avanzata? In quei monotoni " quatrains monorimes „ la stanchezza è evidente. " Dev'essere scusato, egli dice, chi avendo avuto un cuor giovine nella giovinezza, ha da Dio la grazia di essere vecchio nella vecchiezza „. Non è una parentesi, una sentenza espressa in generale; al verso che segue " J'ai fait en ma jonesce mainz diz par vanité „ non si può negare tutta la personalità del rimpianto. E origine realistica, personale ha probabilmente il ritratto del vecchio fastidioso, infermiccio, negletto. Certo è impossibile precisare gli anni dell'autore del Testament; ma noi considereremo come più probabili quelle opinioni che ci permettono di vedere in chi tratteggiava l'età senile con così foschi colori e credeva opportuno chiamare l'opera sua Testament, un uomo che già aveva toccato almeno la sessantina. Ci conviene pertanto, lasciato da parte l'episodio tante volte citato, fermare la nostra attenzione sugli elementi reali ond'è intessuto l'episodio di Faux-Semblans. Non è senza interesse notare che l'unica data di cui si fa menzione e con una certa solennità nel poema, è il 1255. Si parla del famoso Evangile Pardurable. La minuziosità, l'ardore, il sacro spavento con cui Jean ne discorre ci provano con sicurezza che egli era presente ai torbidi onde il suo apparire fu accompagnato, che scrisse a poca distanza da essi (1). Se altro non ci fosse, sarebbero già assai significative le parole sue rispetto al libro, pericolo tuttavia terribile (v. 12744). " Bien est digne d'estre bruslé „. Sono parole che non possono essere lontane dalla condanna con cui Alessandro IV colpì il vangelo, sia che esse rappresentino l'opinione pubblica che a quella condanna prelude, sia che suonino approvazione alla condanna eseguita.

---

(1) Già P. Paris (*Hist. Litt.*, XXIII, 31) scrisse: " Le curieux discours " de Faux-Semblans doit avoir été composé dans le temps des plus vives " querelles entre les ordres mendiants et l'Université de Paris, tant le " poète prend avec ardeur le parti du célèbre champion de l'Université: " Guillaume de Saint-Amour „. Io non so come chi scriveva queste parole potesse ugualmente collocare la nascita di Jean de Meung verso il 1230 (*Hist. Litt.*, XXVIII, 432). Cfr. G. Paris, loc. cit.

Ma c'è di più. Il poeta dice (vv. 12779-80): “ or ne sai qu' il en avendra | Ne quel chief cis livres tiendra „, segno che la polemica non era chiusa e si vedevano nuovi contrasti imminenti. Guillaume de Saint-Amour aveva già pubblicato il suo trattato “ De periculis novissimorum temporum „, che Jean intercala nel suo romanzo; era già stato bandito. Nell'entusiasmo di cui Jean si anima ricordandone la bontà e l'ingiusto esilio, dichiarandosi pronto ad imitarne l'audacia eroica, si sente sicuramente, oltre che il contemporaneo, lo scolaro. Il passo del poema riguardante Guillaume de Saint-Amour fu scritto certo nel 1257, non molti mesi dopo gli avvenimenti. È probabile nel 1256, forse nel 1255, Jean si sia accinto all'impresa (1). Non starò a ripetere le cose dette poc'anzi, per mostrare come queste date loro convengano molto bene. Solo osserverò quanta maggiore naturalezza ne ricavi la citazione di Roberto I. Allora, pochi anni dopo la morte, poteva esserne ancora vivo il ricordo; e il parlarne in termini lusinghieri, più che una lode indiretta a Luigi IX, poteva costituire una rivendicazione generosa dell'onore del povero conte, su cui il disastro della settima crociata aveva certo gettato una sfavorevole luce.

Ci occupammo finora di Jean de Meung. Intorno a Guillaume de Lorris abbiamo unica testimonianza le parole che il continuatore mette in bocca ad Amour (vv. 11352-5):

> Car quant Guillaumes cessera,
> Jehans le continuera
> Après sa mort, que ge ne mente,
> Ans trespassés plus de quarente.

Questa preziosa informazione, della cui validità non abbiamo motivo di dubitare, rende più che agevole quando si conosca la cronologia di Jean, la determinazione di quella di Guillaume. Guillaume avrebbe, secondo noi, cessata l'opera sua verso il 1212.

---

(1) Il Kupka (*Op. cit.*) risale fino al 1854. È possibile. Non è necessario che il lavoro di Jean intorno al poema abbia durato proprio fino al 1262. L'opera nel 1260 poteva già essere terminata. Avremo così uno spazio di sei anni, maggiore di quello che concede colla sua cronologia il Warren, o in ogni caso uguale.

L'Accademico Segretario: Gaetano De Sanctis.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 21 Marzo 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Naccari, Direttore della Classe, Segre, Peano, Jadanza, Guidi, Fileti, Parona, Grassi, Somigliana, Fusari e Camerano Segretario.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente. — Il Socio Salvadori scusa la sua assenza.

Il Presidente propone che al collega Guareschi la Classe invii le sue condoglianze per la grave recente sventura che lo ha colpito colla morte di una sua figlia, la signora Garelli. La Classe approva.

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° *Radiolites liratus (Conr.) e Apricardia Nötlingi (Blanck.) nel Cretaceo superiore della Siria*, del Socio Parona;

2° Prof. A. Campetti, *Esperienze sulla dispersione dell'elettricità atmosferica*, dal Socio Naccari;

Il Socio Segre, a nome anche del Socio D'Ovidio, legge la relazione intorno al lavoro del Dr. Comessatti, intitolato: *Sulle curve doppie di genere qualunque e particolarmente sulle curve ellittiche doppie*. La relazione favorevole è approvata alla unanimità e pure alla unanimità con votazione segreta la Classe

approva la stampa del lavoro del Dr. Comessatti nei volumi accademici.

Il Socio Fusari presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche il lavoro del Dott. A. Bovero, intitolato: *Annotazioni sull'anatomia del palato duro*. II. *Ossificazioni autonome e suture accessorie dei processi dei mascellari*. III. *Partecipazione del vomere alla costituzione dello scheletro nel palato dei mammiferi*. IV. *Forami vascolari abnormi della volta del palato. Osservazioni e ricerche.*

Viene affidata la memoria ai Soci Fusari e Camerano perchè ne riferiscano alla Classe.

LETTURE

Radiolites liratus (Conr.) e Apricardia Nötlingi (Blanck.) nel Cretaceo superiore della Siria.

Nota del Socio C. F. PARONA.

(Con una Tavola).

Il Museo Geologico di Torino si arricchì recentemente di una bella collezione di fossili, provenienti dal Cretaceo superiore dei dintorni di Abeih nella regione montuosa compresa fra la valle del Kadi (Damur) e la costa, a sud di Beirut e ad occidente del Libano. Le faune cretacee di questa regione sono già ben note per successivi lavori pubblicati a partire dal 1852, ed i fossili da me ricevuti, pochi eccettuati, appartengono a forme conosciute; nella maggior parte spettano alla ricca e bella fauna delle arenarie a *Trigonia* (*Tr. syriaca* O. Fraas) attribuita al Cenomaniano, ed in minor numero ai livelli superiori e più recenti con *Orbitolina* (*Orbit. bulgarica* Desh. secondo Prever), con *Nerinella Shicki* (O. Fraas), con *Nerinea cochleaeformis* Conr. (Gazelle Mountain), riferibile quest'ultimo al Turoniano. Qualche autore distingue nel livello con *Ner. cochleaeformis* due zone; una inferiore a *Hippurites* (*Radiolites*) *liratus* Conr., ed una superiore a *Pileolus Oliphanti* Nötl.: se non che la collezione a me pervenuta riunisce forme delle due zone, con identici caratteri di fossilizzazione e d'aspetto; anzi certi esemlari del *Pil. Oliphanti* si trovano aderenti alle valve del *Rad. liratus*. Tutti i fossili sono più o meno perfettamente silicizzati con accentramenti e druse di cristallini di quarzo e sono compresi o coperti da argilla ocracea, rosso-scura o giallastra. I fossili riconosciuti, appartenenti al livello con *Nerin. cochleaeformis*, spettano alle seguenti specie:

Triploporella Fraasi Steinm.
Phyllocoenia (?) sp. (Blanck).
Biradiolites f. (gr. del *B. lumbricalis* d'Orb.).
Neridomus acuminata Whitfield (J. Böhm).
Natica (*Amauropsis*) *Abeihensis* Hamlin.
Tylostoma Birdanum Hamlin.
Endiaplocus libanensis (Hamlin) (?).
Nerinea uniplicata Blanck.
Nerinea cochleaeformis Conr. var. *pauxilla* Haml.
Terebraliopsis Rusteni (O. Fraas).
Cerithium intercalatum Joh. Böhm.
Pileolus Oliphanti Nötl.

Sono inoltre rappresentate altre due forme finora incompletamente conosciute, delle quali intendo appunto occuparmi in questa nota, perchè gli esemplari a mia disposizione sono abbastanza numerosi e ben conservati, così da permettere qualche osservazione anche riguardo ai caratteri interni. Si tratta del radiolitide figurato e descritto da Conrad come *Hippurites liratus* e della chamacea descritta da Blanckenhorn come *Diceras Nötlingi*, che si devono rispettivamente riferire il primo al gen. *Radiolites* e l'altro al gen. *Apricardia*.

Radiolites liratus (Conr.).

Tav., fig. 1-6.

1852. *Hippurites liratus*, J. A. Conrad, *Descript. of the Foss. of Syria* (in: W. F. Lynch, Off. Rep. of the Un. St. Exped. to explore the Dead Sea and the River Jordan). Baltimore, pag. 234, tav. 7, fig. 47, 48.

1890. *Sphaerulites Sauvagesi* (d'H. F.), M. Blanckenhorn, *Beitr. zur Geol. Syriens*: Die Entwickelung des Kreidesystem im Mittel- und Nord-Syriens, Cassel, pag. 86 (syn. excl. part.).

1900. *Sphaerulites liratus* (Conr.), J. Böhm, *Ueb. cretac. Gastrop. vom Libanon und vom Karmel*, Zeitschr. d. Deutsch. geol. Gesellsch., 52 Bd., pag. 219.

Conchiglia allungata e stretta, diritta o poco incurvata nello stato adulto, più o meno allargata nello stato giovanile. Valva inferiore conico-allungata, appuntita inferiormente, con guscio poco spesso ed ornato da coste longitudinali ben sviluppate,

più regolari, uniformemente spaziate sul lato cardinale, più prominenti, più acute ed irregolari nel resto, ed interrotte nel loro decorso, ad intervalli più o meno irregolari, dall'espandersi in festoni delle lamine, per cui la valva assume l'aspetto di un insieme di imbuti sovrapposti, caratteristico per molti radioliti (fig. 2, 3). La costa che delimita anteriormente il seno anteriore *E* è molto sporgente e sottile e per essa ne viene, che la sezione della valva appare subtriangolare (fig. 3, c): il seno anteriore *E* è assai largo, piatto, percorso da due costicine longitudinali e da rare pieghe trasversali, alquanto retroflesse, in continuità dei festoni. Esso è separato, mediante una costa suddivisa in due, dal seno posteriore *S*, che è assai più stretto e poco o punto distinto. L'apertura della valva è subtriangolare, con margine sottile o a pieghe radiali, e prominente sulla valva superiore, che vi si adatta profondamente incassata. L'interno visibile soltanto in qualche esemplare, presenta la piega legamentare poco sviluppata ed interposta a due fossette aperte verso l'interno, cioè incompletamente delimitate da due sporgenze della parete, con forma di pilastri scanalati, a lato dei quali restano indistinte le impressioni muscolari, in contrasto colle sviluppatissime lamine miofore, a forma di cuscinetto, della valva superiore. Per questi caratteri interni, come anche per l'ornamentazione esterna, risultano manifesti i rapporti di parentela e di discendenza dal gen. *Praeradiolites*.

La valva superiore è cordiforme nella parte laminare esterna, che è sottile, piana o leggermente convessa presso la poco manifesta piega legamentare, oppure, più di rado, è marcatamente concava. In qualche caso (fig. 4) è piegata bruscamente ad angolo verso l'alto nella zona marginale, assumendo le forme di un vaso a fondo piatto. L'apparato cardinale (fig. 5, 6) è robusto, ben distinto dalla valva per l' interposizione di una rientranza a forma di collo alto e stretto, ai lati della piega legamentare *L* sottile, formata da due lamine combaciate, che più sotto si discostano, formando la fossetta legamentare, attigua alla base del dente posteriore *D*. I due denti sono sottili e percorsi da una profonda scanalatura, più esile e più breve il posteriore *D*, più lungo circa di un terzo l'anteriore *D'*. La lamina miofora posteriore *m p* è separata per ampio intervallo dal dente corrispondente, è assai sporgente sopra la sottile base di attacco,

quasi lunga quanto larga, appiattita all'interno, rigonfia all'esterno e segnata da rughe al margine assottigliato: la lamina miofora anteriore *m a*, del pari prominente, è più avvicinata e meglio collegata alla valva ed al dente corrispondente ed assai più larga.

L'unica figura pubblicata finora di questa forma è quella citata del CONRAD, che rappresenta un esemplare di valva inferiore dal lato dei seni e riproduce abbastanza esattamente i caratteri esterni della specie. La numerosa serie di esemplari, da me esaminata, ne presenta uno solo che riunisce in posto le due valve: gli altri sono esemplari di valve isolate di dimensioni diverse, varianti, per la valva inferiore, da 10 a 200 mm. di lunghezza.

Apricardia Nötlingi (Blanck.).

Tav. fig. 7, 8.

1890. *Diceras Nötlingi*, BLANCKENHORN, Op. cit., pag. 85.

Conchiglia piccola, inequivalve, liscia, subsferica. Valva sinistra più rigonfia, con apice prominente, incurvato, a tendenza spirale da sinistra a destra, col fianco anteriore largamente, fortemente schiacciato e incavato in corrispondenza della superficie di attacco (fig. 7 *a*), e nel resto regolarmente arrotondato. La valva destra ha l'apice ottuso, meno incurvato ed una carena evidente, ma poco acuta, che decorre dall'apice al margine palleale, che la divide in due parti ineguali, maggiore quella anteriore. Commessura della valva sinuosa nella regione cardinale, regolare nel resto.

L'unico esemplare libero di valva sinistra è mal conservato e non permette di rilevare i caratteri della cerniera. Sono invece parecchi gli esemplari liberi e ben conservati, due specialmente, della valva destra. Essa presenta il dente posteriore *D* (fig. 8) assai robusto, largo, assottigliato al margine della valva, verso il quale s'incurva; una piccola, ma ben demarcata, fossetta *n* lo separa dal piccolissimo quasi biforcato dente anteriore. L' impressione muscolare anteriore *m a* è larga e lunga,

ma assai poco pronunciata, mentre quella posteriore *m p* è portata da una piccola lamina alta e sottile, di forma e sviluppo caratteristico, nettamente separata dall'apparato cardinale e prolungantesi nella cavità umbonale. Scanalatura e fossetta legamentare *L* ben evidenti.

Blanckenhorn ha già ricordato per confronto l'*Apricardia Pironai* Boehm., la quale è infatti assai simile alla *A. Nötlingi*, differendone essenzialmente soltanto per la sua statura notevolmente minore, perchè più inequivalve, presentando proporzionalmente più grande la valva inferiore; ma se si considerano i caratteri interni della valva destra, le differenze sono quasi insignificanti.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. 1-6. *Radiolites liratus* (Conr.) (fig. 4, valva superiore con apparato cardinale spezzato).

Fig. 7, 8. *Apricardia Nötlingi* (Blanck.).

Esperienze sulla dispersione dell'elettricità atmosferica.

Nota del Prof. ADOLFO CAMPETTI.

1° Le esperienze relative agli elementi determinanti le condizioni elettriche dell'atmosfera, vale a dire la ionizzazione, la conducibilità elettrica e il campo elettrico in prossimità del suolo od anche a qualche distanza da esso, si sono moltiplicate in questi ultimi anni, specie dopo le ricerche di Exner e dopo che Elster e Geitel (1), Ebert (2) ed altri introdussero e adoperarono per le misure apparecchi semplici e facilmente trasportabili. Tuttavia i risultati di indole generale a cui le numerose esperienze hanno condotto sono finora assai limitati, poichè, come accade spesso nelle osservazioni meteorologiche, i fattori locali od accidentali nascondono ben di frequente le variazioni regolari.

Se per la misura della conducibilità elettrica dell'aria ci si riferisce alle esperienze di dispersione secondo il metodo e adoperando l'apparecchio di Elster e Geitel e se si ammette la validità della legge di Coulomb: $Q = Q_0 e^{-\alpha t}$ relativa alla dispersione di una carica Q da un conduttore di capacità costante, si ricava subito: $V = V_0 e^{-\alpha t}$, essendo V_0 il potenziale iniziale e V il potenziale al tempo t del conduttore considerato ed α un coefficiente che prende il nome di coefficiente di dispersione che è quindi dato da:

$$\alpha = \frac{1}{t} \log \frac{V_0}{V}.$$

Quando però si tenga conto delle perdite di carica nell'interno dell'elettroscopio il coefficiente di dispersione può essere rappresentato da:

$$e = \frac{1}{t} \left\{ \log \frac{V_0}{V} - n \log \frac{V_0'}{V'} \right\} \tag{1}$$

(1) Elster e Geitel, " Phys. Zeit. ", 1899, etc.
(2) Ebert, " Phys. Zeit. ", 1901.

ove V_0' e V' si riferiscono alla dispersione nell'elettroscopio durante il tempo t ed n è una costante dell'istrumento che si può facilmente determinare.

Quando però si adoperi, in luogo del comune elettroscopio degli apparecchi di Elster e Geitel, il tipo usato nell'apparecchio di Gerdien, in cui cioè l'isolante (ambra) è sottratto all'azione del campo elettrico mediante un involucro metallico quasi chiuso posto in comunicazione colle pareti esterne dell'elettroscopio e quindi col suolo (secondo fu indicato da Schering [1]) e qualora si abbia cura di tenere costantemente secca l'aria nell'interno dello strumento mediante un pezzetto di sodio, il secondo termine della (1) porta in generale una correzione inferiore agli errori di lettura e si può quindi prendere come misura del coefficiente di dispersione l'espressione

$$e = \frac{1}{t} \log \frac{V_0}{V}. \tag{2}$$

Ordinariamente, per comodità di scrittura, si prende per *coefficiente di dispersione* il valore di $a = 100e$; e poichè tale coefficiente ha in generale un valore diverso secondo che il corpo disperdente è carico positivamente o negativamente, si useranno i due simboli a_+ ed a_- e il rapporto dei due coefficienti di dispersione si indicherà con q: si porrà cioè $q = \frac{a_-}{a_+}$. I logaritmi che figurano nelle (1) e (3) sono logaritmi naturali: si può tuttavia per comodità fare il calcolo coi logaritmi a base dieci, e con ciò restano a_- e a_+ moltiplicati per un fattore costante. Propriamente Ebert ha trovato che, adoperando il cilindro di protezione nell'apparecchio di Elster e Geitel, la legge di Coulomb non è più esattamente verificata: tuttavia si può ancora definire in via approssimativa il coefficiente di dispersione mediante la (2), purchè si supponga che il potenziale iniziale del cilindro di dispersione sia il medesimo in tutte le esperienze.

Spesso in luogo del rapporto $q = \frac{a_-}{a_+}$ dei due coefficienti di dispersione si considera il rapporto $Q = \frac{I_+}{I_-}$ delle ionizzazioni

[1] SCHERING, " Phys. Zeit. „, 1904.

positive e negative, vale a dire delle quantità di elettricità positiva e negativa presente sugli ioni contenuti in un dato volume di aria; il rapporto Q non è però in generale uguale a q per causa della diversa mobilità degli ioni positivi e negativi e per la presenza dei cosidetti grossi ioni, i quali hanno poca influenza nella dispersione.

Quanto alla determinazione del potenziale atmosferico si adopera per lo più il collettore a getto di acqua, posto ad altezza fissa sul suolo e collegato ad un elettroscopio di cui la custodia esterna è in comunicazione colla terra.

I risultati più sicuri riguardo alle relazioni tra il coefficiente di dispersione e le condizioni atmosferiche sono i seguenti: *a*) La dispersione è tanto maggiore quanto maggiore è la chiarezza dell'aria, vale a dire, quanto minore è il contenuto di nebbie o polveri nell'atmosfera del luogo di osservazione. *b*) In generale col crescere dell' umidità relativa diminuiscono entrambi i coefficienti di dispersione: quanto al rapporto q niente si può asserire di preciso, dipendendo la variazione di q dalle cause che producono l'aumento di umidità relativa. *c*) Generalmente la dispersione cresce col crescere della temperatura (e quindi spesso anche col crescere dell' umidità assoluta). *d*) Per quanto riguarda la relazione tra la dispersione e la caduta di potenziale, quando si considerino le medie delle osservazioni fatte per un periodo di tempo molto lungo, si trova che col crescere della caduta di potenziale diminuiscono tanto a_+ quanto a_-, ma a_+ più rapidamente di a_-, di guisa che q cresce col crescere della caduta di potenziale.

Ad ogni modo però le varie serie di osservazioni eseguite in località ed epoche diverse conducono spesso a risultati contraddittori; e per conseguenza lo studio della dispersione atmosferica in località opportunamente scelte presenta sempre qualche interesse.

2° Le esperienze riferite in questa nota sono state eseguite lungo l'alta valle del Ticino ad altitudine di circa 1000 metri sul mare presso la borgata di Varenzo a mezza strada circa tra Rodi e Ambrì; non già però sul fondo della valle, ma sul fianco della montagna in un prato spoglio di alberi e a qualche distanza dall'abitato, dove in nessuna occasione poteva giungere il fumo proveniente dai camini delle abitazioni, ecc.

La valle essendo assai stretta e a fianchi molto ripidi da ambe le parti e senza terrazze laterali, le superficie equipotenziali del campo terrestre al disopra della valle devono essere molto ravvicinate in vicinanza delle creste delle catene laterali e molto distanti invece verso il fondo della vallata; o in altre parole nella località scelta per le osservazioni la caduta di potenziale atmosferico deve essere di regola assai piccola (come risultò effettivamente dalle esperienze) e solo eccezionalmente potranno verificarsi cadute di potenziale più elevate dovute a cariche elettriche trasportate dai venti, ecc.

Si può dire dunque che *le esperienze di dispersione eseguite hanno questo di particolare che si riferiscono ad una regione in cui il campo terrestre ha valori assai bassi e spesso prossimi a zero.*

Per la forma assai stretta della valle il vento, qualunque ne fosse la direzione in alto, veniva incanalato in basso presso a poco nella direzione dell'asse della vallata, cioè da S-E a N-O, dimodochè non si ebbe mai vento di N-E o di S-O.

Le esperienze di dispersione furono eseguite con un apparecchio del tipo di Elster e Geitel con cilindro protettore, usando però l'elettroscopio dell'apparato di Gerdien, riparando il tutto dai raggi diretti del sole e dalla pioggia. L'inconveniente principale dell'apparecchio di Elster e Geitel sta nel fatto che esso dà indicazioni dipendenti dalla velocità del vento, anzi secondo il Simpson [1] le sue indicazioni sarebbero proporzionali al prodotto della velocità del vento e del numero di ioni presenti nell'atmosfera; tuttavia, poichè l'applicazione di queste relazioni empiriche lascia sempre luogo a molti dubbi, sarebbe sempre preferibile l'adoperare apparecchi di altra forma, per es., ad aspirazione. Ma poichè nel nostro caso sarebbe riuscito assai incomodo il trasportare e mettere a posto tale apparecchio nella località scelta per le osservazioni, si preferì di ricorrere alla semplice disposizione di Elster e Geitel e ridurre mediante apposito ostacolo la velocità del vento in vicinanza dell'apparecchio a circa 100 metri al minuto; in questo modo si operò (in prima approssimazione) con velocità del vento costante, per l'apparecchio, in pressochè tutte le esperienze, poichè solo rarissimamente la velocità del vento risultò inferiore note-

(1) Simpson, " Phil. Trans. of London ", 1905.

volmente a questo valore; essa veniva determinata mediante un anemometro tarato.

Per la caduta di potenziale atmosferico si usò un collettore a getto di acqua a 4 metri di altezza sul suolo; durante le forti pioggie però l'isolamento non era sufficiente per una buona misura e, non avendo a disposizione altro apparecchio, si dovette in tali casi rinunziare a questa determinazione.

Le osservazioni furono eseguite per un periodo di circa due mesi, dal 26 luglio al 24 settembre (con alcune interruzioni dovute a necessarie assenze) e due volte al giorno cioè alle 10 e alle 17; si esclusero le osservazioni nelle prime ore del mattino e nelle ultime della sera, poichè in prossimità del tramonto e del levar del sole le perturbazioni locali hanno influenza preponderante (specie in un'alta valle alpina) e d'altra parte una osservazione fatta, ad esempio, alle 7 del mattino o della sera è in condizioni troppo diverse rispetto al corso del sole dal luglio alla fine di settembre. Contemporaneamente al coefficiente di dispersione si determinò la pressione, la temperatura, la direzione e la velocità del vento esternamente all'apparecchio, e lo stato igrometrico.

Quanto alla caduta di potenziale, molto spesso essa, ammontando a pochi Volt per metro, cambiava di segno durante l'esperienza a seconda dei colpi di vento, il quale, come si sa, non soffia quasi mai regolarmente nelle vallate alpine: in questo caso non se ne tenne conto nel riferire i resultati. Molte altre volte la caduta di potenziale atmosferico risultò o addirittura nulla o inferiore ad un Volt per metro, in modo che non se ne poteva avere una misura esatta coll'elettroscopio adoperato; in tal caso si considerò essere tale caduta di potenziale (indicata con π nelle tabelle) uguale a zero: gli altri valori trovati sono riferiti nell'ultima colonna col segno positivo o negativo secondochè il potenziale del collettore era superiore od inferiore al potenziale del suolo.

Prima di fare qualsiasi considerazione relativamente ai resultati delle esperienze eseguite è opportuno riferire per disteso i risultati stessi, come è fatto nelle annesse tabelle; in esse non è riferita la pressione barometrica, poichè non fu possibile riconoscere alcuna relazione tra le variazioni di pressione e i coefficienti di dispersione.

Data	Ora	t	S. igr.	Dir. ven.	Veloc.	a_+	a_-	q	Osservazioni
Luglio 26	10	20,4	0,494	N-O	185	0,68	1,49	2,21	Cielo nebbioso
„ „	17	20,9	0,430	O-NO	255	0,40	1,14	2,85	$^1/_2$ coperto
„ 27	10	21,3	0,464	N-O	85	0,39	1,54	3,94	$^1/_2$ coperto
„ „	17	21,5	0,638	O-NO	220	1,59	1,86	1,17	sereno
„ 28	10	21,2	0,640	S-SE	200	0,97	1,40	1,44	quasi sereno $\pi = + 5,7$
„ „	17	22,0	0,604	S-SE	216	0,64	1,21	1,73	$^1/_2$ coperto
„ 29	10	16,1	0,774	S-SE	30	0,44	1,19	2,70	coperto, pioggia
„ „	17	17,2	0,700	O-NO	126	0,51	0,73	1,43	coperto
„ 30	10	19,3	0,636	S-SE	92	0,37	0,76	2,05	quasi sereno $\pi = + 6,3$
„ „	17	20,1	0,585	S	182	0,87	1,15	1,33	parte coperto
Agosto 2	10	19,8	0,561	S-SE	145	0,74	1,05	1,42	sereno $\pi = + 3,2$
„ „	17	20,3	0,546	O-NO	213	1,47	1,90	1,29	sereno
„ 3	10	18,8	0,532	S-E	186	1,37	1,53	1,12	sereno $\pi = + 3,2$
„ „	17	19,4	0,539	S-E	140	1,33	1,51	1,13	sereno
„ 4	10	19,4	0,463	O-NO	190	1,82	1,89	1,04	sereno $\pi = + 5,2$
„ „	17	21,1	0,372	O-NO	230	1,78	1,59	0,89	sereno, qualche nube
„ 5	10	17,4	0,664	S-E	187	0,68	0,73	1,07	pioggia, qualche tuono
„ „	17	15,6	0,650	S-SE	185	0,73	1,26	1,72	coperto, nubi basse $\pi = - 54$
„ 6	10	14,0	0,850	S-SE	150	1,23	0,73	0,59	coperto, pioggia dalle 20 del 5
„ „	17	13,4	0,920	S-SE	170	0,71	0,47	0,66	coperto, pioggia
„ 7	10	15,6	0,751	O-NO	96	0,54	1,50	2,78	coperto $\pi = 0$
„ „	17	15,4	0,708	N-O	270	1,73	1,70	0,98	$^1/_2$ coperto
„ 8	10	16,3	0,650	N-NO	342	1,62	1,55	0,96	coperto $\pi = 0$
„ „	17	16,6	0,668	N-O	269	1,98	1,91	0,96	$^1/_2$ coperto
„ 10	10	17,6	0,555	S-E	145	0,58	0,86	1,48	sereno $\pi = + 8,7$

Data	Ora	t	S. igr.	Dir. ven.	Veloc.	a_+	a_-	q	Osservazioni
Agosto 10	17	19,6	0,612	S-SE	127	0,84	1,32	1,57	Cielo sereno $\pi = + 9,6$
„ 11	10	18,5	0,601	S-E	90	0,83	1,30	1,57	sereno $\pi = + 8,7$
„ „	17	21,0	0,405	N-O	214	0,84	1,51	1,79	sereno, qualche nube
„ 17	10	16,6	0,435	N-O	123	0,97	1,14	1,17	sereno (ultima pioggia il 15)
„ „	17	17,1	0,380	S-E	187	0,94	0,83	0,89	sereno, qualche nube $\pi = + 3,7$
„ 18	10	16,9	0,503	S-SE	188	0,90	1,07	1,19	sereno, qualche nube $\pi = + 8,7$
„ „	17	17,3	0,633	S-SE	237	1,20	2,46	2,05	sereno, qualche nube $\pi = + 8,6$
„ 19	10	15,3	0,614	E-SE	166	1,21	1,47	1,21	coperto $\pi = - 4,6$
„ „	17	16,3	0,675	E-SE	180	1,32	1,59	1,20	sereno, qualche nube
„ 20	10	17,6	0,647	S-SE	90	1,76	1,62	0,92	quasi coperto $\pi = + 8,7$
„ „	17	19,2	0,604	S-SE	205	1,54	1,65	1,07	sereno, qualche nube
„ 21	10	18,2	0,695	S-SE	206	1,42	1,71	1,20	sereno, qualche nube $\pi = + 3,8$
„ „	17	19,3	0,720	S-SE	227	2,21	2,18	0,99	coperto, pioggia ore 18
„ 22	10	15,5	0,855	S-SE	130	0,96	1,14	1,18	coperto, pioggia
„ „	17	15,5	0,865	S-SE	90	0,45	0,36	0,80	coperto, pioggia dal mattino
„ 27	10	20,4	0,325	S-SE	205	1,31	1,53	1,17	sereno (ultima pioggia il 22)
„ „	17	20,1	0,522	S-SE	241	1,36	1,67	1,23	$^1/_3$ coperto $\pi = + 4,2$
„ 28	10	19,2	0,665	S-SE	213	1,17	1,31	1,12	quasi coperto $\pi = + 8,4$
„ „	17	19,6	0,700	S-SE	225	1,20	1,49	1,24	„ „
„ 29	10	19,2	0,725	S-E	190	0,44	0,77	1,75	comincia pioggia $\pi = + 31$
„ „	17	17,6	0,858	S-SE	139	0,46	0,25	0,54	pioggia violenta con tuoni
„ 30	10	12,5	0,940	N-NO	205	2,86	1,68	0,59	pioggia violenta
„ „	17	13,4	0,794	S-O	140	1,13	0,64	0,57	pioggia
„ 31	10	15,3	0,301	O-NO	415	2,02	2,07	1,02	sereno $\pi = + 8,7$
„ „	17	16,0	0,573	N-NO	70	0,79	0,86	1,09	sereno

Data		Ora	t	S. igr.	Dir. ven.	Veloc.	a_+	a_-	q	Osservazioni
Sett.	1	10	11,8	0,683	E-SE	35	0,31	0,43	1,40	Cielo coperto $\pi_s = + 29$
"	"	17	14,3	0,588	E-SE	40	0,41	0,43	1,05	coperto
"	2	10	14,4	0,401	N-NO	320	1,84	1,38	0,75	sereno, qualche nube $\pi = + 52$
"	"	17	16,3	0,410	N-NO	254	1,72	1,29	0,80	sereno
"	3	10	14,1	0,426	N-NO	161	2,39	2,08	0,87	sereno, qualche nube $\pi = - 71$
"	"	17	17,3	0,387	N-NO	198	1,26	1,66	1,40	sereno
"	4	10	16,1	0,448	S-SE	210	1,20	1,45	1,28	sereno $\pi = - 37$
"	"	17	16,9	0,503	S-SE	123	0,47	0,98	2,08	$^1/_2$ coperto, pioggia nella notte
"	5	10	17,9	0,530	N-NO	208	1,71	1,80	1,05	sereno, qualche nube $\pi = - 23$
"	"	17	17,1	0,425	N-NO	180	0,79	1,68	2,12	sereno, qualche nube
"	6	10	14,8	0,350	S-SE	190	1,24	1,57	1,27	sereno $\pi = 0$
"	"	17	16,5	0,546	S-SE	140	1,02	1,43	1,41	sereno
"	7	10	15,4	0,619	S-SE	147	0,81	1,18	1,45	sereno $\pi = + 23$
"	"	17	17,5	0,542	E-SE	138	0,56	1,08	1,93	sereno
"	8	10	17,1	0,538	E-SE	149	0,77	1,46	1,89	sereno $\pi = + 2$
"	"	17	17,3	0,590	E-SE	155	0,63	1,19	1,89	sereno
"	9	10	17,5	0,554	E-SE	212	1,62	1,81	1,11	sereno $\pi = 0$
"	"	17	18,0	0,657	E-SE	135	0,69	1,29	1,87	$^1/_3$ coperto
"	10	10	18,1	0,624	S-SE	248	0,83	0,96	1,15	coperto $\pi = + 3$
"	"	17	15,1	0,840	S-SE	210	0,66	0,56	0,85	pioggia dalle 16
"	11	10	10,0	0,940	N-O	80	0,91	0,82	0,90	pioggia
"	"	17	7,2	0,898	N-NO	250	1,91	0,31	0,16	pioggia
"	12	10	9,2	0,420	N-O	270	1,86	1,72	0,93	sereno $\pi = - 2$
"	"	17	10,5	0,395	N-O	260	1,14	1,23	1,08	$^1/_3$ coperto
"	13	10	10,6	0,275	N-O	261	1,01	1,17	1,16	$^1/_3$ coperto

Data	Ora	t	S. igr.	Dir. ven.	Veloc.	a_+	a_-	q	Osservazioni
Sett. 13	17	11,2	0,298	N-O	285	0,90	0,95	1,06	Cielo $^1/_3$ coperto
„ 14	10	12,8	0,162	S-E	200	0,47	0,66	1,62	sereno $\pi = -28$
„ „	17	11,0	0,196	S-E	190	0,59	0,81	1,37	sereno
„ 15	10	13,6	0,403	S-E	248	0,91	1,08	1,19	sereno $\pi = -19$
„ „	17	14,0	0,448	S-E	206	1,00	0,97	0,97	sereno, qualche nube
„ 16	10	13,3	0,677	N-O	149	2,08	1,25	0,60	quasi sereno (pioggia nella notte)
„ „	17	18,5	0,488	N-O	107	1,81	1,54	0,85	sereno $\pi = -14$
„ 17	10	18,4	0,428	O-SO	203	2,21	2,50	1,13	sereno (rapido aumento di temperatura)
„ „	17	16,3	0,524	O	219	1,47	1,83	1,24	quasi sereno $\pi = -21$
„ 18	10	20,0	0,405	S-E	118	0,69	0,82	1,18	sereno $\pi = 0$
„ „	17	18,0	0,531	S-E	89	0,67	0,81	1,22	sereno
„ 19	10	13,3	0,670	S-E	135	0,58	0,80	1,38	coperto (pioggia leggera al mattino) $\pi = -37$
„ „	17	15,4	0,677	S-E	140	0,71	0,97	1,36	coperto
„ 20	10	13,4	0,726	E-SE	156	0,69	1,20	1,74	$^2/_3$ coperto, nubi basse $\pi = 0$
„ „	17	14,3	0,699	E-SE	148	0,73	0,84	1,15	coperto
„ 21	10	11,0	0,926	S-E	167	0,68	0,65	0,95	coperto, pioggia, nubi basse
„ „	17	11,6	0,915	S-E	155	0,58	0,65	1,12	„ „ „
„ 22	10	10,2	0,896	S-E	142	0,50	0,43	0,86	pioggia violenta
„ „	17	10,7	0,914	S-E	140	0,53	0,65	1,24	pioggia leggera
„ 23	10	11,8	0,946	S-E	90	0,49	0,84	1,72	coperto, senza pioggia $\pi = -19$
„ „	17	12,7	0,852	S-E	105	0,43	0,77	1,79	coperto
„ 24	10	10,6	0,878	S-E	131	0,38	0,59	1,55	pioggia
„ „	17	11,5	0,915	S-E	120	0,42	0,52	1,24	pioggia

3° Per quanto le osservazioni eseguite in un periodo di tempo relativamente così breve non permettano di trarre quelle conclusioni che meglio si possono ricavare dalle medie di lunghissime serie di esperienze, è tuttavia possibile enunciare qualche risultato di indole generale e cioè:

a) Con cielo sereno e spesso anche con tempo coperto, purchè senza pioggia, si ha $q > 1$ vale a dire $a_- > a_+$ il che indica che gli ioni positivi prevalgono nell'atmosfera del luogo di osservazione sugli ioni negativi; qualche volta con tempo coperto, ma senza pioggia (7 ed 8 agosto, 17 agosto, 20 agosto, 2, 3 settembre) q risulta minore, ma solo per poco, all'unità; se però si tien conto del fatto che la mobilità degli ioni negativi è superiore a quella dei positivi si può concludere che *nei giorni senza pioggia la concentrazione degli ioni positivi è spesso superiore, non mai inferiore a quella degli ioni negativi.*

Un tale andamento così regolare, assai più regolare di ciò che si verifichi ordinariamente in altre località di osservazione, si spiega assai facilmente quando si pensi che, per causa del vento che sempre soffia nella valle e per il fatto che la porzione della vallata ove si trovava la stazione di osservazione è chiusa da S-E e N-O da alte catene montuose, l'aria che occupa in un dato istante le parti più basse proviene sempre dalle vette che ha abbandonato da tempo relativamente assai breve; ora poichè in vicinanza delle vette il campo elettrico ha valori molto elevati e quivi si accumulano per conseguenza in grande quantità gli ioni positivi, le masse d'aria trasportate verso il basso della valle si presentano ancora in queste condizioni.

Date queste circostanze locali, si capisce facilmente come i valori di a_+ e a_- variino in modo assai irregolare, nè sia quindi facile di scoprire una relazione tra i coefficienti di dispersione e gli altri fattori meteorologici (temperatura, stato igrometrico, umidità assoluta, ecc.), giacchè la concentrazione degli ioni positivi e negativi nel luogo di osservazione è determinata specialmente dalle condizioni atmosferiche in prossimità delle vette da cui il vento discende. Ora è assai comune in montagna che, anche con tempo quasi sereno, abbiano luogo sulle vette formazioni di nebbie o piccole precipitazioni (pioggia o neve) e le perturbazioni nello stato elettrico dell'atmosfera quivi prodotte

in conseguenza si risentono poi, per causa del trasporto delle masse d'aria, verso il basso della valle.

b) Nei giorni piovosi l'andamento della dispersione non è molto regolare; tuttavia si può dire che (tolto il caso di alcune pioggie brevi e di carattere locale) tanto a_- quanto a_+ diminuiscono con tempo piovoso: per lo più q risulta minore e talvolta notevolmente minore di uno, cioè il coefficiente di dispersione è più forte per la elettricità positiva che per la negativa, per quanto ciò non sia senza eccezione.

Probabilmente si deve qui tener conto dell'influenza di due fattori e cioè della pioggia per sè e dell'umidità relativa assai elevata dell'atmosfera che perciò si produce. Durante le pioggie, sia per effetto analogo a quello osservato da Elster e Geitel in vicinanza delle cascate, sia anche per trasporto di cariche elettriche in senso verticale, il coefficiente di dispersione aumenta per cariche positive, vale a dire si ha eccesso nell'aria di ioni negativi ([1]); invece un aumento di umidità relativa (al disopra di 0,80) diminuisce specialmente la concentrazione degli ioni negativi, come risulta dalla maggior parte delle osservazioni sin qui eseguite; quando però, come nella località nostra di osservazione, i valori molto alti dell'umidità relativa si hanno solo in giorni piovosi, l'influenza diretta della pioggia prevale il più spesso e perciò, come nelle esperienze di Mazelle ([2]) in Trieste, si ha nella maggior parte dei casi diminuzione più rapida di a_- che di a_+.

c) Una relazione tra la velocità o la direzione del vento ed i coefficienti di dispersione non appare dalle esperienze qui riferite: si può solo dire che valori elevati dei coefficienti di dispersione si hanno più di frequente con forti velocità anzichè con piccole velocità del vento.

d) È pure degno di nota il fatto *che non esiste alcuna relazione tra i coefficienti di dispersione o il loro rapporto* q *e la grandezza e il segno della caduta di potenziale atmosferico*, il che è stato riscontrato anche in altre località di osservazione (Vedi, ad es., Pochettino, l. c.).

([1]) Pochettino, " Rendiconti Lincei „, 1901.
([2]) Mazelle, " Wiener Berichte „, 1905.

Veramente secondo alcune serie di osservazioni come quelle di Gockel in Friburgo (1), di Conrad in Sonnblick (2), di Zölss in Kremsmünster (3) ecc., apparirebbe, come già abbiamo detto in principio che, *quando si tenga conto delle medie annuali*, la dispersione diminuisce col crescere della caduta di potenziale non solo, ma a_- diminuisce meno di a_+, di guisa che $q = \frac{a_-}{a_+}$ cresce col crescere della caduta di potenziale; ma è da osservare che tali relazioni non possono stabilirsi colle determinazioni eseguite in un periodo di tempo assai limitato e che inoltre nella località cui le osservazioni della presente nota si riferiscono si avevano (nell'epoca da luglio a settembre) generalmente cadute di potenziale assai piccole e quindi anche piccole variazioni nel valore di tale caduta.

È pure notevole il fatto che assai di frequente si ebbe a fare con cadute di potenziale negative, malgrado che le esperienze di dispersione indicassero una maggior concentrazione degli ioni positivi; tale segno della caduta di potenziale può essere determinato da masse d'aria con forti cariche negative presenti a qualche distanza dal suolo. Tuttavia è sempre bene insistere nel fatto che le esperienze di dispersione possono servire come misura solo della concentrazione degli ioni di grande mobilità, mentre una gran parte dell'elettricità positiva o negativa presente nell'aria (e specialmente di quest'ultima, perchè gli ioni negativi sono i primi a funzionare da nuclei di condensazione) si può trovare nelle condizioni di ioni di grande massa, i quali poco influiscono sui valori del coefficiente di dispersione.

Con caratteri analoghi a quelli posti in luce nelle osservazioni *a*), *b*), *c*), *d*) si presenteranno probabilmente molto spesso i fenomeni di elettricità atmosferica in un gran numero di valli alpine.

4° Come conclusione credo utile di osservare che, per quanto le numerose esperienze che vanno ripetendosi su questo argomento forniscano sempre qualche dato interessante relativa-

(1) " Phys. Zeit. „, 1903.
(2) " Wiener Berichte „, 1905.
(3) " Phys. Zeit. „, 1904.

mente al problema delle condizioni elettriche dell' atmosfera, sarebbe tuttavia desiderabile che, affine di scoprire e precisare tutte le relazioni esistenti tra i fenomeni elettrici e meteorici, in luogo di moltiplicare le osservazioni, si concentrasse il lavoro in pochi osservatorî che dovrebbero possibilmente soddisfare alle condizioni seguenti: 1° Essere situati a notevole distanza da qualunque catena montuosa e preferibilmente sopra qualche collina isolata in mezzo ad una vasta pianura affine di ridurre al minimo le perturbazioni locali. 2° Essere provvisti di strumenti a registrazione continua per la misura della caduta di potenziale; per il quale scopo si hanno già modelli assai perfezionati. 3° Eseguire contemporaneamente, e quindi con due coppie di apparecchi identici, le misure della dispersione e dell'ionizzazione positiva o negativa ; e procurare di costruire anche per queste misure degli apparecchi a registrazione, in modo che le determinazioni possano essere estese anche alle ore della notte.

Le esperienze poi in località speciali, vale a dire in profonde vallate o su vette assai elevate, in luoghi cioè dove alcuni dei fattori meteorologici subiscono le variazioni più brusche e d'altra parte il campo elettrico della terra ha in media i valori più bassi e più elevati rispettivamente, come pure le osservazioni a grande altezza nell'atmosfera mediante i palloni, potranno sempre fornire utili indicazioni, specialmente per lo studio e l'esame delle cause delle perturbazioni accidentali.

Torino. Marzo 1909.
Istituto di Fisica della R. Università.

Relazione intorno alla Memoria del D[r] A. Comessatti: *Sulle curve doppie di genere qualunque, e particolarmente sulle curve ellittiche doppie.*

Fra le classi speciali di curve algebriche di genere p, C_p, dopo le curve iperellittiche, che son quelle contenenti un'*involuzione* (di 2° grado) *razionale*, si presentano naturalmente quelle che posseggono un'*involuzione di genere qualunque* π. Sono le C_p che si posson riferire, con corrispondenza (2, 1), a curve di genere π: o, come si dice, le C_π *doppie.*

Se l'irrazionalità definita dall'ente di genere π si rappresenta con un'equazione tra due variabili

$$f(xy) = 0,$$

le coordinate di una tale C_p saranno funzioni razionali di x, y e di un radicale quadratico

$$\sqrt{R(xy)},$$

R indicando un certo polinomio.

La Memoria del D[r] Comessatti è dedicata a queste classi di curve; e specialmente si trattiene su quelle con $\pi = 1$ (curve ellittiche doppie).

Vi è risolta la questione di caratterizzare birazionalmente le singole curve di una classe: cioè determinare le condizioni perchè due curve corrispondenti agli stessi valori di p e π si possan trasformare birazionalmente l'una nell'altra. La risposta ha un aspetto diverso, secondo che si prende di mira una rappresentazione con polinomi $f(xy)$, $R(xy)$, quale è stata dianzi accennata; oppure si considera, nel senso della geometria delle trasformazioni birazionali, l'ente di genere p, colla sua involuzione di genere π, e convenienti serie lineari.

Fra gli altri problemi che vi son trattati ci limitiamo a rilevare le proprietà relative alle curve che contengono più involuzioni ellittiche, e in particolare la determinazione delle condizioni affinchè una curva contenga due involuzioni ellittiche permutabili.

Solo aggiungiamo che tutto il tema viene opportunamente illuminato sotto vari aspetti, geometrici ed analitici; e concludiamo che il lavoro ci pare pienamente degno di essere pubblicato fra le Memorie accademiche.

E. D'Ovidio

C. Segre, *relatore*.

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 28 Marzo 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti i Soci: Manno, Direttore della Classe, Graf, Allievo, Ruffini, Stampini, Brondi, Sforza e De Sanctis Segretario. — Scusa l'assenza il Socio D'Ercole.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente, 14 marzo 1909.

Il Presidente comunica una lettera del Socio Guareschi in cui ringrazia i colleghi per l'attestazione d'affetto fattagli nella luttuosa circostanza della morte della sua figlia signora Maria Guareschi Garelli.

Sono presentati i seguenti scritti offerti in omaggio dagli Autori, Soci corrispondenti dell'Accademia:

M. R. de Berlanga, *Malaca* (Barcelona, Vives, 1905-1908);

F. Porena, *Lo stretto di Messina e i suoi terremoti.* Conferenza (Roma, 1909).

G. Gatti, *Lamina di bronzo con iscrizione riferibile alla guerra dei socii italici* (estratto dal " Bull. Archeol. comunale ", Roma, Loescher, 1909).

Il Socio De Sanctis prende la parola a proposito del documento pubblicato dal Gatti e ne esamina brevemente il contenuto, cercando soprattutto di chiarire in qual senso vi sia richiamata la *lex Iulia de civitate.*

Il Socio Manno, Direttore della Classe, offre a nome della R. Deputazione sovra gli studi di storia patria per le antiche provincie e la Lombardia, il vol. II della *Biblioteca di storia italiana recente* (Torino, Bocca, 1909) dando un cenno delle memorie che vi sono raccolte.

Il Socio De Sanctis presenta per gli *Atti* una nota del prof. Angelo Taccone, intitolata: *A proposito di un luogo dell'Issipile euripidea recentemente scoperta.*

Il Socio Ruffini presenta una memoria del prof. Giuseppe Prato su *L'evoluzione agricola nel secolo XVIII e le cause economiche dei moti del 1792-98 in Piemonte.* Il Presidente delega i Soci Manno e Ruffini a riferirne in una prossima adunanza.

Il Socio Sforza presenta una sua memoria concernente *L'amministrazione generale del Piemonte e Carlo Botta (1799).* La Classe con pienezza di voti segreti ne delibera la inserzione nelle *Memorie* accademiche.

LETTURE

A proposito di un luogo dell' ' Issipile ' euripidea recentemente scoperta
(Oxyrh. Pap. *VI nr. 852 fr. I col. I vv. 1-3*).
Conseguenze per la critica del testo d' Euripide.

Nota del Prof. ANGELO TACCONE.

Il primo, assai considerevole, frammento della nuova tragedia euripidea che dalla generosa terra d'Egitto ci venne da ultimo donata, incomincia con la seconda parte del prologo, la parte cioè dialogica, la quale, com' è noto, tien dietro spesse volte nel teatro d'Euripide ad una ῥῆσις iniziale compiendo ora l'ufficio di aggiungere notizie intorno all'antefatto ora semplicemente quello di caratterizzare alcuno dei principali personaggi che prenderanno parte all'azione. La ῥῆσις iniziale è stata pronunziata, secondo l'avviso degli editori, dall'eroina della tragedia, Issipile (chè l' ipotesi pur da essi, ma con molta esitazione, avanzata, che fosse uno dei figli, Euneo o Toante, a presentarsi per primo, non sembra avere nemmeno per loro troppe seduzioni): io credo invece sia necessario attribuirla ad una divinità (la quale non fu tuttavia Dioniso, come già pensavano il Welcker (1), il Hartung (2), il Ribbeck (3)); ma di questo, che per il momento non importa, darò minuziosa dimostrazione

(1) *Die griechischen Tragödien mit Rücksicht auf den epischen Cyclus geordnet* von F. G. W. Zweite Abtheilung (Bonn 1839) p. 556.

(2) *Euripides restitutus* II (Hamburgi 1844) pp. 431-2.

(3) *Die römische Tragödie im Zeitalter der Republik* (Leipzig 1875) p. 161, discorrendo della *Nemea* enniana.

in altro lavoro. Adempiuto adunque, a parer degli editori, l'ufficio di prologo, Issipile rientra nella reggia di Licurgo, che occupa assai probabilmente lo sfondo della scena, col proposito, sembra, di prendervi il bimbo Ofelte, figlio di Licurgo e di Eurìdice, del quale ella è nutrice: giungono frattanto Euneo e Toante, e dopo un breve dialogo (1) da cui si apprende chi essi siano e per qual ragione si trovino così lontani dalla patria (cfr. Stat. *Theb.* V v. 715 *causa viae genetrix*: vedasi anche la seconda ὑπόθεσις delle *Nemee* pindariche, p. 9 Abel ʽ ἐν ἐκείνῳ δὲ τῷ καιρῷ κατὰ ζήτησιν οἱ παῖδες ταύτης — scil. Ὑψιπύλης — Θόας καὶ Εὔνεως παρέβαλον ἐν Νεμέᾳ ʼ), bussano alla porta del palazzo per chiedervi, come si ricava dai frammentarî vv. 7 sgg., ospitalità: esce Issipile tenendo in braccio il fanciullo piangente cui essa tenta rallegrare promettendogli ἀθύρματα, e si svolge tosto il primo dialogo tra la madre e i figli che ancora s'ignorano a vicenda.

I primi versi superstiti donde si possa ricavare un qualche senso sono appunto quelli in cui Issipile promette ad Ofelte i balocchi (2-3): dalle sette lettere leggibili nel verso precedente nulla si può ricostrurre. Chè l'inserire qui il secondo verso del fr. 764 Nauck² γραπτούς ⟨τ᾽ ἐν αἰετ⟩οῖσι πρόσβλεψον τύπους basandosi soltanto su ciò, che le prime tre lettere superstiti del verso costituiscono precisamente il gruppo γρα, sembra troppo ardito agli editori stessi cui n'è venuta la tentazione: infatti le ultime lettere del verso del papiro, ε̣οις, non s'accordano punto con τύπους. Ma v'ha di più: altri motivi impediscono siffatta integrazione. Fino a dopo il v. 6 non esiste nè sul margine sinistro, ben conservato, del papiro nè nel primo tratto degli spazî interlineari, ove suol essere la παράγραφος, traccia alcuna o di lettere o di segno con cui si accenni ad un cambiamento d'interlocutore: il v. 1 era dunque detto come i susseguenti fino al settimo, pe' quali la cosa è evidente dal contesto, da Issipile. E non pare che la mia argomentazione possa venire infirmata dall'osservar che spesso i cambiamenti

---

(1) Così gli edd.; invece del dialogo avrebbe potuto però trovarsi qui anche una semplice breve parlata di uno dei due giovani, potendo darsi il caso che l'altro fosse un κωφὸν πρόσωπον, com'è di Pilade nel prologo dell'*Elettra* euripidea.

di personaggi non sono indicati nei papiri: il papiro nostro è in ciò abbastanza scrupoloso: e poi si aggiunge che dalle parole d'Issipile ai vv. 4 sgg. risulta chiaro che il dialogo di lei co' figli proprio soltanto in quel punto ha inizio. Talchè non solamente variazione di personaggio, ma altresì variazione di scena avrebbe avuto luogo dopo il v. 1 qualora lo avesse pronunziato altri che Issipile, e precisamente, secondo quanto s'argomentò poc'anzi, uno de' due figli: la mancanza di ogni segno nel papiro sarebbe in tal caso una vera anomalia, una enormità che avrebbe bisogno di prova. Il v. 1 adunque, fino ad evidente prova in contrario, fu detto da Issipile. Ma allora, posto pure per un istante che il copista abbia potuto in fine di esso verso scrivere per isbaglio τύ]ποις invece di τύπους (1) — altra congettura che per la sua arrischiatezza gli editori mettono innanzi assai a malincuore —, vediamo, che avrebbe voluto dire Issipile? Forse, per calmare il bimbo piangente, l'avrebbe incitato ad osservare i γραπτοὶ τύποι del frontone della reggia? La cosa sarebbe grottesca: eppure altro senso nel passo così adattato non credo si potrebbe logicamente scoprire. Io credo di poter designare come assai più probabile un'altra collocazione del fr. 764 Nauck²: io son cioè d'avviso ch'esso abbia fatto parte della breve parlata che all'arrivo de' due fratelli dinanzi al palazzo di Licurgo uno dei due dovè tenere, tra la ῥῆσις iniziale e il dialogo con Issipile (2). Secondo ogni verisimiglianza era stata appunto la magnificenza precipuamente addimostrata dai γραπτοὶ τύποι del frontone della reggia che aveva indotto i giovani a chiedere all'ὄλβιος abitatore di essa ospitale accoglienza. E mi rafforza nell'opinione mia il parallelismo che — nelle linee generali soltanto, badiamo bene — verrebbe così a stabilirsi tra la seconda scena del nostro prologo e la seconda di quello della *Ifigenia Taurica*, con la tecnica della quale tragedia quella dell'*Issipile* offre (e lo mostreremo partitamente altrove) parecchie notevoli rassomiglianze. In particolare po-

---

(1) L'ε, quarta lettera dalla fine nel v. 1, è, a dichiarazione degli editori, molto incerta.

(2) Vedo del resto con piacere che un'ipotesi molto somigliante a questa è formulata pure dagli edd. a p. 82.

trebbe raccostarsi il momento — non il concetto, chè sarebbe volersi spingere oltre il debito e il lecito — ritratto da entrambi i versi del fr. 764 ἰδού, πρὸς αἰθέρ' ἐξαμίλλησαι κόρας | γραπτούς τ' κτλ. con quello che ci presentano in *Iph. Taur.* 113-4 le parole di Pilade ad Oreste ὅρα δέ γ' εἴσω τριγλύφων ὅποι κενὸν | δέμας καθεῖναι.

Tornando ora a' vv. 2-3, gran cosa per vero non si trae neppure dal v. 2, che gli edd. leggono — lo riproduco esattamente serbando inalterato anche il numero dei puntini compresi tra le parentesi quadre, i quali stanno a indicare il numero approssimativo delle lettere andate perdute: il punto sottoposto ad una lettera significa, com'è noto, che la lettura n'è incerta — ἡξε[.......]σπ[.......]θυρμα[.]α. Inutile arzigogolare, sopra così scarse fondamenta, intorno ai primi due terzi del verso: la redintegrazione invece che gli edd. danno dell'ultima dipodia si può ritener sicura, posto quanto segue con lezione in parte restituita, ma ad ogni modo certa, al v. 3 ἃ σῶν [ὀ]δυρμῶν ἐκγαλη[νιεῖ φ]ρένας. Issipile adunque promette al fanciullo balocchi che varranno a rasserenarlo, a por fine a' suoi lamenti. Se è ragionevole credere assodata la lezione di tutto il tratto da ἀθύρματα a φρένας, non il minimo dubbio può poi cadere sopra il σῶν, chiaramente leggibile col suo bravo accento. Eppure il Wilamowitz-Möllendorff vorrebbe cangiarlo in σάς, e gli edd., stimando qui ad ogni costo necessaria un'alterazione, dividono le loro simpatie tra il σάς del Wil. e un meno radicale τῶν che viene proposto da loro. Ma gli egregi filologi han preso ombra — sia detto senza la più piccola idea di venir meno a quell'ossequio di cui essi per tante benemerenze verso i nostri studî sono ben degni e che io per primo mi vanto di tributar loro incondizionato — han dunque preso ombra senza sufficiente motivo. E questi han tolto del tutto al v. 3 un'idea, l'idea possessiva, rendendo l'espressione duramente indeterminata: quegli si è limitato a sopprimere una enallage dei casi per la quale Euripide mostra viva compiacenza, come appare evidentemente da parecchi luoghi ch'io son venuto raccogliendo. Nel *Jone* al v. 1337 la Pitia indicando al giovane figlio di Apollo e di Creusa la cestella contenente gli σπάργανα i quali serviranno al riconoscimento di lui, gli rivolge queste parole: ὁρᾷς τόδ' ἄγγος χερὸς ὑπ' ἀγκάλαις ἐμαῖς; Ci aspetteremmo ἐμῆς, non è vero? Eppure la tradizione

manoscritta, come risulta dall'apparato critico di Prinz-Wecklein, non mostra qui la minima incertezza. Nell'*Oreste*, v. 988, alla gara di Pelope, splendidamente fornito del noto equipaggio da Posidone, con Enomao Elettra allude con l'espressione τὸ πτανὸν μὲν δίωγμα πώλων (per ragioni metriche τὸ πτανόν venne corretto dal Porson in ποτανόν). Orbene anche in questo luogo chi non vede che sarebbe assai più naturale e chiaro τὸ πτανῶν (ποτανῶν)? E tuttavia pur qui la tradizione manoscritta, più ricca e migliore d'assai che per il *Jone* in quanto l'*Oreste* ci giunse in entrambe le famiglie di codici euripidei, è assolutamente concorde. Nell'*Ecuba*, vv. 1067 sgg., Polimestore che la vedova di Priamo ha con l'aiuto di molte compagne di sventura accecato ed orbato dei figli in pena dell'assassinio di Polidoro, così implora pregando Helios: εἴθε μοι ὀμμάτων αἱματόεν βλέφαρον | ἀκέσσαιο τυφλὸν ἀκέσσαι', Ἅλιε, | φέγγος ἀπαλλάξας. Certo sarebbe più logico τυφλῶν, e in buona prosa nessuno si sognerebbe di voler dire cieche le palpebre piuttosto che gli occhi, ma i diritti del linguaggio poetico sono suffragati per fortuna anche nell'*Ecuba* dal pieno consentimento di entrambe le famiglie di codici. E vengo ad un passo importantissimo per la mia indagine, perchè la sussistenza dell'enallage del caso vi è provata da un argomento più perentorio ancora che non sia quello dell'unanime accordo delle fonti scritte, voglio dire dal metro. Si tratta del v. 30 delle *Fenicie*. Giocasta, che viene esponendo il prologo, accenna colà al rinvenimento di Edipo bambino da parte di ἱπποβουκόλοι di Polibo che lo consegnarono alla consorte del loro signore; e questa, soggiunge l'infelice eroina tebana, τὸν ἐμὸν ὠδίνων πόνον | μαστοῖς ὑφεῖτο καὶ πόσιν πείθει τεκεῖν. Qui è più chiaro della luce del sole che a rigor di logica ci si aspetterebbe o τὸν ἐμῶν ὠδ. π. oppure τῶν ἐμῶν κτλ. E infatti uno dei codici della seconda famiglia, *G* di Prinz-Wecklein (= Laur. 172 saec. XIV), reca τὸν ἐμῶν, mentre la prima famiglia consente nella lezione τῶν ἐμῶν. Ma anche nella tradizione manoscritta non manca la lezion vera: la conservò il capostipite della famiglia seconda, *L* (= Laur. 32, 2 saec. XIV). E che sia assolutamente da leggere τὸν ἐμὸν lo dimostra appunto, come affermavo or ora, il metro. Infatti il v. 30 intero suona così: ἔθηκαν. ἡ δὲ τὸν ἐμὸν ὠδ. π. Il primo piede del secondo μέτρον, come ognuno scorge, presenta la forma del tri-

braco. Or se si leggesse τὸν ἐμῶν, risulterebbe sbagliato il quarto piede in quanto, com'è noto, nelle sedi pari del trimetro giambico il giambo puro non può sostituirsi con lo spondeo irrazionale: se si preferisse poi τῶν ἐμῶν, crescerebbe una sillaba al quinto piede (1).

Mi sembra adunque provato ormai che una enallage di caso quale ci mostra il v. 3 della *Issipile* non debb'essere affatto motivo per sospettare la bontà della tradizione manoscritta. Io credo anzi che venendo questo nuovo sicurissimo esempio di siffatta enallage a confortar l'esistenza di quella predilezione che io affermavo trovarsi in Euripide per questa costruzione particolare, ci dobbiamo sentire autorizzati, e quasi direi costretti, a preferire, colà dove la tradizione manoscritta è oscillante tra la frase plasmata a stretto rigor di logica e quella che presenta l'enallage di caso, la seconda forma. Quindi non soltanto non saran più da prendere d'ora innanzi in considerazione alcuna emendamenti come ὁρᾷς τόδ' ἄγγους κύτος del Jacobs (ἄγγους πλέκος Musgrave) o χερὸς ὑπαγκάλισμ' ἐμῆς dell'Elmsley al v. 1337 del *Jone*; ma in luoghi come *Phoen.* 695, ove i codici oscillano tra la lezione καίτοι ποδῶν σῶν μόχθον ἐκλύει παρών preferita tanto da Prinz-Wecklein quanto dal Nauck e l'altra κ. π. σὸν μόχθον κτλ., sarà da presceglìere la seconda. E non dovrà punto ostacolare questa preferenza l'esser la lezione σόν stata tramandata dal solo codice *G* della seconda famiglia: già vedemmo come nel caso capitalissimo di *Phoen.* 30 la lezione genuina ci sia giunta pel tramite del solo *L.* Del pari in *Phoen.* 1635, dove i codd. d'entrambe le famiglie s'accordano nel leggere σὺ δ' ἐκλιποῦσα τριπτύχους θρήνους νεκρῶν (τύπους invece di θρήνους ha *E* — cioè Paris. 2712 saec. XII-XIII —, ma ciò per ora non

(1) M'avvedo ora, mentre sto correggendo le bozze di questo lavoretto, di un altro magnifico esempio di enallage dei casi fornito dal v. 1 di quel frammento dell'*Issipile* stessa conservatoci da Giovanni Lido *De mensibus* IV 7 p. 72 Wünsch su cui richiamò pel primo l'attenzione il Wilamowitz-Möllendorff a p. 83 del vol. VI dei papiri d'Ossirinco: ὦ θνητὰ παραφρονήματ' ἀνθρώπων, μάτην | οἵ φασιν κτλ. Anche in questo caso il metro rende certa la lezione θνητά ed impossibile l'altra θνητῶν che si richiederebbe a rigor di logica. È noto infatti come lo pseudo-dattilo nelle sedi pari del trimetro giambico non sia tollerato, in greco, neppure dai comici.

c'importa), non sarà da credere tanto alla leggera col Nauck che la nota γρ. τριπτύχων νεκρῶν γόους soprascritta in *A* (= Marc. 471 saec. XII) e scritta in margine in *a* (= Paris. 2713 saec. XII-XIII Prinz-Weckl., ma della seconda metà del sec. X a parer di G. Vitelli ' Studi Ital. di Filol. Cl. ' 1901 p. 298) per la semplice ragione che sopprime l'enallage riproduca una tradizione più autorevole di quella dell'archetipo di *a* ed *A*.

L'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 4 Aprile 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. GIUSEPPE PEANO

SOCIO ANZIANO

Sono presenti i Soci: Jadanza, Foà, Guidi, Parona, Somigliana, Fusari e Camerano, Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Presidente legge una lettera del Socio Guareschi che ringrazia delle condoglianze inviategli dalla Classe.

Il Socio Guidi presenta in omaggio un suo volume, intitolato: *Lezioni sulla scienza delle costruzioni;* Parte II: *Teoria della elasticità e resistenza dei materiali*, 5ª edizione.

Il Socio Camerano presenta per l'inserzione negli *Atti*, la nota dei Professori P. Giacosa e S. Dezzani, *Studi sulla secrezione stomacale.*

LETTURE

Studi sulla secrezione stomacale.

Nota di P. GIACOSA Professore e S. DEZANI Assistente (1).

La funzione stomacale consiste essenzialmente nel secernere il succo gastrico e nel portarlo a contatto colle sostanze alimentari ingerite, in modo che le modifichi agli scopi della alimentazione. Lo studio del succo gastrico, dalle esperienze di Spallanzani fin a quelle di Pawlow, si fece raccogliendo con sistemi diversi questo secreto a misura che veniva eliminato dalla mucosa: i recenti progressi della tecnica operatoria resero possibile il raccogliere quantità grandi di succo gastrico puro, esente da sostanze estranee sopratutto alimentari; i lavori dell'Istituto di Medicina sperimentale di Pietroburgo (Pawlow, Nencki, Sieber, Schoumow-Simanowsky) hanno fatto conoscere molti particolari sulla composizione del succo, sulle sue proprietà, sul modo di secrezione in relazione agli stimoli ed alle condizioni psichiche: il complesso di queste indagini costituiscono la maggiore avanzata nelle nostre cognizioni su questo argomento. Ma con tutto ciò molti quesiti rimangono ancora insoluti, altri si sono formulati in seguito ai risultati di queste indagini stesse, i quali tutti attendono la loro soluzione. Un altro metodo di studio della funzione stomacale si fonda sull'osservazione fatta la prima volta da Eberle (*Physiologie der Verdauung*, Würsburg, 1834), che l'estratto cloridrico della mucosa stomacale possiede le proprietà fondamentali del succo gastrico. Questo metodo nei successivi suoi perfezionamenti condusse alla preparazione non solo dei succhi gastrici artificiali, ma anche ad isolare i fermenti digerenti come nel metodo precedente.

Noi abbiamo pensato di poter portare qualche utile contributo a questo capitolo ricorrendo ad un altro processo, con-

(1) La parte analitica di questo lavoro venne tutta eseguita dal Dott. Dezani.

sistente nell'adottare il torchio di Buchner per estrarre dalla mucosa il contenuto cellulare; benchè il succo così ottenuto non possa ritenersi identico al succo gastrico sia naturale che artificiale, tuttavia esso si avvicina molto a questo secreto, perchè contiene i materiali delle ghiandole stomacali che formano la quasi totalità dello spessore della mucosa. Una sezione microscopica della mucosa stomacale infatti ci mostra che essa è quasi esclusivamente composta di fitte ghiandole l'una accanto all'altra; la *muscularis mucosae*, i vasi sanguigni, il connettivo formano un elemento secondario e scarso, ed in ogni caso il loro succo non contiene elementi specifici della natura di quelli del secreto delle ghiandole.

Abbiamo preso degli stomaci di maiale ottenuti nella misura di tempo più breve possibile dopo la morte, non superiore a 4-5 ore, ed essendo il nostro lavoro stato fatto nei mesi freddi, dal novembre al febbraio, possiamo ritenere che i processi putrefattivi non potessero ancora essersi iniziati. Gli stomaci ci giungevano interi, sì che all'aprirli vi si rinvenivano sempre i residui dell'ultimo pasto, e non si manifestava mai alcun sito di putrido, nè nidore di idrogeno solforato. Vuotato il sacco, lo si lavava sotto un getto d'acqua non troppo forte, strofinando leggermente la mucosa colle dita, in modo da metterla completamente a nudo. In seguito si dissecava con un bisturi la mucosa dallo strato muscolare sottoposto; e dopo averla finemente triturata la s'impastava con sabbia silicea purissima, accuratamente lavata con HCl e con acqua, in modo che il filtrato non lasciava per evaporazione alcun residuo. Il magma si trattava poi colle opportune precauzioni alla pressa di Buchner. Il succo colava lentamente, di guisa che per estrarre tutto quanto poteva ottenersi da una torchiatura s'impiegava di regola una mezza giornata.

L'operazione si faceva in un'ambiente freddo: il succo non manifestava odore di sorta: esso appariva un liquido denso torbidiccio, filante, di colore variabile dal biancastro al rossastro, secondo lo stato di congestione delle mucose da cui era estratto.

Prendendo 200 gr. come peso di una mucosa di stomaco di maiale (media dedotta da circa 50 mucose) da ogni mucosa si ottenevano circa 50 cm³ di succo.

Noi abbiamo sempre, in questa serie di esperienze, prese le mucose intiere dall'apertura cardiaca alla pilorica.

Il succo centrifugato non dà alcun precipitato; filtrarlo alla pompa è difficilissimo, perchè la mucina di cui è ricco lo impedisce. Pochi cm^3 si ottengono in parecchie ore, i quali poi filtrano facilmente.

Il succo ha reazione appena acida: scaldato si intorbida per formare poi un coagulo abbondante. Esso dà le reazioni del biureto e quella col liquido del Millon; precipita coll'alcool, coll'acido acetico sia solo che col ferrocianuro potassico, coi cloruri mercurico, ferrico, coll'acetato di piombo ed in genere coi reattivi precipitanti gli albuminoidi.

Una questione importante è quella che si riferisce all'acidità del succo: come dicemmo, questa acidità è debole; la ricerca dell'acido cloridrico libero fatta col reattivo di Güntzburg raramente dà risultato positivo: col reattivo di Boas non si ottenne mai nulla. Si constatò invece la presenza di fosfati e di cloruri: le reazioni per il ferro e l'acido solfocianico (1) furono negative. Abbiamo voluto dosare l'acidità col solito metodo volumetrico, impiegando soda $\frac{N}{10}$ su 10 cm^3 di succo. La media di parecchie esperienze diede 0,073 $^0/_0$ di acidità espressa in HCl. Qui appare subito una sostanziale differenza dai succhi gastrici naturali. Infatti le analisi di Schoumow (2), di Nenki e Sieber (3) dànno come acidità del succo cifre comprese fra 0,45-0,60 $^0/_0$. Ci siamo domandato se la diminuita acidità non fosse per caso da attribuirsi ad eventuali processi putrefattivi iniziatisi, i quali avessero dato luogo alla formazione di prodotti basici. Benchè a priori l'ipotesi ci paresse poco plausibile nelle condizioni in cui noi operavamo, e che, come si disse sopra, erano tali da non potere supporre che fosse avvenuto alcun che di questo genere, stabilimmo anzitutto di ricercare nel succo la eventuale presenza di NH_3, la quale avrebbe potuto formarsi in un processo putrefattivo. Abbiamo trattato 25 cm^3 di succo con latte di magnesia in eccesso e distillato: l'acido ossalico $\frac{N}{10}$ in

(1) Nencki, " Berichte der deutsch. chem. Ges. ", XXII, p. 1318.
(2) " Arch. f. exper. Path. und Pharmakol. ", XXXIII, p. 336.
(3) " Zeitschr. f. physiol. Chem. ", XXXII, p. 291.

cui si raccolse il distillato non mostrò di aver diminuito il suo titolo.

Ma per assicurarci meglio su una questione di tanta importanza abbiamo esaminato gli stomaci di animali uccisi in nostra presenza. Aperto il ventricolo dell'animale dissanguato, il contenuto stomacale, consistente in residui di origine vegetale, venne gettato su un panno: il liquido che ne colava si filtrò poi per carta e su 10 cm³ di esso venne eseguito il saggio per l'acidità: questa era uguale a 0,121 % calcolata in HCl.

La mucosa venne alla sua volta lavorata nel modo detto sopra quanto più rapidamente ci fu possibile: l'acidità del succo ottenuto in queste condizioni era = 0,038 %. Una seconda esperienza fatta con stomaci di maiali uccisi a digiuno ha dato per il contenuto stomacale (costituito in questo caso da poche diecine di cm³ di un liquido colorato in giallo dalla bile) un'acidità = 0,043 % e per il succo ottenuto per pressione un'acidità = 0,054 %. La ricerca dell'HCl libero in quest'ultimo riuscì negativa. Questi risultati adunque confermano i dati precedenti e corroborano quanto verremo dicendo su questo argomento.

La secrezione acida e quella pepsinica sono state dai fisiologi per lo più considerate separatamente, non solo avuto riguardo alla natura loro, ma anche all'origine. L'antica ipotesi di Heidenheim, il quale metteva la sede della secrezione cloridrica nelle ghiandole parietali, o, come il Rollet le chiamò — delomorfe — (in opposizione alle cellule principali — adelomorfe —) è ancora accettata da molti fisiologi, ed una differenza sostanziale fra questi due elementi venne ancora messa in mostra più evidentemente dal Golgi, il quale trovò un reticolo, verosimilmente canalicolare, che avvolgendo e compenetrando le cellule parietali veniva a far capo ad un canale centrale collettore, decorrente verticalmente nel tubo glandolare. Questa disposizione sembra accennare ad un secreto liquido, mentre invece le particolari apparenze delle cellule principali, nei vari stadi precedenti e seguenti la digestione, indicherebbero una secrezione granulare la quale si mescolerebbe al secreto. È presumibilmente questa la sostanza che si precipitava a freddo dal succo gastrico nelle esperienze della Schoumow (1) e quella che

(1) Loc. cit.

si separava dopo la dialisi del succo gastrico in quelle di Nencki e Sieber (1) e di Pekelharing (2).

Nei succhi gastrici ottenuti direttamente, i due elementi, l'acido cioè ed il fermento, sono presenti e secondo Pawlow la loro proporzione reciproca sarebbe costante; il che non è tuttavia ammesso da tutti gli sperimentatori. Se questa costanza può osservarsi nella funzione normale di animali sviluppati e sani, non è altrettanto vero per altre condizioni: così nel gatto e nel coniglio, nei primi giorni della nascita si ha soltanto secrezione dell'HCl, mentre quella della pepsina appare qualche settimana più tardi. L'atropina abbassa l'acidità del succo senza alterare la secrezione della pepsina; l'alcool per contro eccita la secrezione di un succo più ricco di HCl, più povero di fermento. La patologia poi ha separato le due funzioni e descritto una categoria di casi in cui esiste solo o la secrezione acida o la pepsinica. Anche alcuni casi di pirrosi possono additarsi come esempio di una indipendenza delle due funzioni.

Le nostre esperienze dimostrano che la preparazione del fermento ha luogo continuamente, di guisa che esso si trovi accumulato nelle cellule delle ghiandole in attesa di quegli stimoli che ne determineranno la fuoruscita. Non così per l'acido cloridrico, la cui presenza come materiale di riserva sarebbe anche difficile a conciliarsi colle nostre cognizioni sulla chimica dei tessuti. L'acido cloridrico è dunque messo in libertà nell'atto stesso in cui la pepsina preesistente viene liberata dalle cellule per costituire succo. Se esista una relazione diretta fra questa fuoruscita dei granuli di pepsina e la formazione di acido cloridrico, la quale spiegherebbe la proporzione costante di HCl trovata da Pawlow, o se i due fenomeni siano concomitanti ma indipendenti, è cosa che per ora non si può decidere. Nelle nostre esperienze abbiamo trovato un'acidità la quale, calcolata in HCl, corrisponderebbe a circa $\frac{1}{10}$ di quella del succo normale; ma nulla ci autorizza a credere che realmente si tratti di HCl libero, che anzi le reazioni da noi fatte lo escluderebbero nella maggioranza dei casi; per cui noi riteniamo che si tratti di

(1) Loc. cit.
(2) " Zeitschr. f. physiol. Chem. „, XXII, 234 e XXXV, 8.

quell'acidità che costituisce il primo stadio accertato dell'infrollire delle carni o che è dovuta ai fosfati acidi.

La densità del succo filtrato, determinata col picnometro, è alla temp. di $15^\circ = 1,025$. Svaporato a bagno maria esso lascia un residuo rossastro, facilmente polverizzabile, il quale non si ridiscioglie se non parzialmente nell'acqua, a cui imparte reazione leggermente acida. Abbiamo accennato al colore del residuo perchè questo lo distingue dai residui che si ottengono dai succhi gastrici naturali. Nencki e Sieber (1) osservarono l'annerire del residuo per il solo fatto dell'evaporazione nel vuoto a 35°-40°, annerire dovuto alla presenza dell'HCl. Il comportamento diverso da noi osservato conferma l'assenza di questo composto.

Questo residuo esaurito con un trattamento di 10 ore con alcool assoluto in apparecchio Soxhlet, gli cede una sostanza che alla evaporazione dell'alcool appare cerea, giallastra, di aspetto lecitinico, e contiene fosforo. Un dosaggio fatto, distruggendo il residuo alcoolico proveniente da gr. 4,169 di residuo del succo seccato a peso costante, precipitando con molibdato ammonico ed in seguito colla miscela magnesiaca, diede gr. 0,008 di $Mg_2P_2O_7$, pari a 0,053 % di fosforo nel residuo. A questa determinazione ponderale, risultato di una sola analisi, non si attribuisce da noi maggior valore di quello che essa possa avere: importante è il reperto qualitativo per dimostrare la presenza di composti lecitinici.

Nel succo filtrato abbiamo dosato i fosfati minerali diluendo 10 cm^3 di succo con acqua distillata, filtrando e trattando il filtrato limpido direttamente colla miscela magnesiaca. Ottenemmo così gr. 0,0176 di $Mg_2P_2O_7$, pari a 0,0489 di fosforo per cento di succo. È probabile che sia questo fosforo allo stato di fosfato acido a determinare la reazione del succo.

Rimaneva il dosaggio del fosforo totale, il quale venne eseguito sul residuo dell'evaporazione di 10 cm^3 di succo, bruciato colla miscela ossidante: dopo precipitazione con molibdato ammonico ed in seguito colla miscela magnesiaca si ottennero gr. 0,035 di $Mg_2P_2O_7 = 0,0973$ % di fosforo.

Nello stesso residuo dopo distrutta la sostanza organica compare evidente la reazione del ferro, che, come dicemmo,

(1) Loc. cit.

prima non si aveva. La quantità di Fe è anzi abbastanza rilevante e tale da potersi ottenere un precipitato coll'ammoniaca. Per il dosaggio del Fe siamo partiti da gr. 3,769 di residuo secco, che vennero distrutti colla miscela ossidante: la massa sciolta in HCl fu dapprima trattata con molibdato ammonico per allontanare l'acido fosforico. Al filtrato si aggiunse ammoniaca in lieve eccesso: il precipitato, raccolto su filtro e ben lavato, venne ridisciolto in HCl e riprecipitato, ripetendo ancora una terza volta l'operazione per allontanare ogni traccia di calcio; dopo di che il precipitato venne raccolto, seccato e pesato. Si ottennero così gr. 0,0168 di Fe_2O_3, corrispondenti a gr. 0,0228 $^0/_0$ di Fe nel succo ed a gr. 0,310 $^0/_0$ nel residuo (1).

Per la determinazione delle ceneri una porzione di residuo si carbonizza in muffola; il carbone si lava ripetutamente con acqua bollente, si secca e si incenerisce completamente; nella stessa capsula si evaporano le acque di lavaggio del carbone e si secca poi il tutto a peso costante. Da gr. 0,8366 di residuo si ottennero così gr. 0,1400 di ceneri, pari a 1,23 $^0/_0$ del succo.

Oltre ai componenti già citati, abbiamo nelle ceneri constatato la presenza di calcio, di magnesio e di cloro, che però non potemmo dosare.

La seguente tabella riassume i risultati di queste analisi:

	$^0/_0$ di succo	$^0/_0$ di residuo
Acidità	0,073	—
Residuo	7,360	—
Ceneri	1,230	—
Ferro	0,0228	0,310
Fosforo totale	0,0973	1,32
„ minerale	0,0489	—
„ organico (per diff.)	0,0484	—
di cui fosforo sol. in alcool	0,0040	0,053

(1) Avremmo voluto anche noi applicare in questo dosaggio il metodo di Knorre, così come aveva fatto il Nencki (loc. cit.), ma non ci fu possibile trovare il reattivo necessario.

Il succo estratto per pressione dalla mucosa si comporta come una soluzione di sostanze albuminoidi; esso soggiace facilmente ai processi putrefattivi, come è naturale, trattandosi di un processo di preparazione che non era stato accompagnato da speciali cautele destinate a mantenere l'asepsis. Conservato in tubi d'assaggio in laboratorio, in capo ad alcuni giorni è putrido. Questo facciamo notare in relazione a quanto avremo or ora da dire rispetto alla sua attività digerente.

Abbiamo esaminato il nostro succo in relazione alle proprietà fondamentali del succo gastrico normale, le quali, come è noto, sono tre: 1° azione peptonizzante o digerente l'albumina; 2° azione coagulante sul latte; 3° azione plasteinica di Danilewski.

1° Il metodo da noi seguito in queste e nelle altre esperienze per la determinazione del potere digerente è quello di Mett, che, sebbene sia stato assai discusso per rispetto al suo valore reale, è tuttavia quello che offre dati comparativi più sicuri.

I metodi che si trovano nelle farmacopee e quelli proposti della caseina (1) o della ricina (2) non servivano al nostro scopo. Per il metodo di Mett ci servivamo di tubetti accuratamente scelti, adottando le cautele necessarie, escludendo sopratutto quelli che presentassero bolle d'aria nell'albumina coagulata. I tubetti erano immersi verticalmente nel liquido digerente in modo che la digestione si effettuava solo per un capo. La temperatura era di 38°, la durata per tutti gli esperimenti di ore 9 $^1/_2$ e la quantità di liquido usata per il saggio un centim. cubico.

Appena estratto, il succo non ha potere digerente. Questo fatto lo abbiamo riconosciuto in tutti i succhi, sieno filtrati o no. Abbiamo allora aggiunta la quantità di HCl necessaria a dare la proporzione del 0,25 $^0/_0$: anche in queste condizioni il succo era inattivo. La digestione invece si otteneva diluendo questo succo con acqua, avendo cura che l'HCl fosse sempre presente in modo da rappresentare il 0,25 $^0/_0$ del liquido totale. A misura che la diluizione progredisce il potere dige-

---

(1) Vohlard, " München. mediz. Wochenschr. „, 1903, 49, p. 2129. — Gross, " Arch. f. exper. pathol. und pharmakol. „.

(2) Jacoby, " Biochem. Zeitschr. „, 1906, I, p. 53.

rente si va manifestando e raggiunge il suo massimo alla diluizione di 1 : 15 ad 1 : 20 per poi diminuire successivamente per ulteriori diluizioni. La seguente tabella, tratta dalle numerose esperienze da noi fatte su questo argomento, dà i particolari del decorso della reazione.

Succo cm^3	Acqua + HCl cm^3	Lunghezza della colonna d'albumina disciolta mm.
1	1	1,0
1	4	2,0
1	9	3,2
1	14	4,5
1	19	4,5
1	29	3,5
1	39	3,5
1	49	3,1
1	74	3,0
1	99	2,7

2° Il succo fresco aggiunto nelle proporzioni di 2-3 goccie a 20-25 cm^3 di latte e mantenuto a 38° produce in pochi minuti un abbondante e denso coagulo.

3° Una soluzione di peptone Witte (preparata secondo Lawrow (1)) al 27 % in HCl 0,50 % con 4-5 goccie di succo e tenuta in termostato a 38°, si è completamente gelatinizzata dopo 6 ore, tanto che si potè capovolgere il tubo d'assaggio, in cui s'era fatta l'esperienza, senza che alcuna goccia di liquido colasse lungo le pareti.

Dopo una settimana il succo conservato in laboratorio è già manifestamente putrefatto: il potere digerente tuttavia si conserva ancora:

1 cm^3 di succo + 9 cm^3 di acqua e HCl digerivano mm. 3,1
1 cm^3 „ + 19 „ „ „ „ „ 4,0

Dopo quindici giorni abbiamo eseguito su una porzione dello stesso succo putrefatto la ricerca dell'indolo e dello scatolo con

(1) " Zeitschr. f. physiol. Chem. „, 36, p. 278.

esito positivo: il succo tuttavia digeriva, coagulava il latte e dava plasteina:

1 cm^3	di	succo	+ 9	cm^3	di acqua	e HCl	digerivano	mm.	2,5
1	„	„	+ 19	„	„	„	„	„	1,9

E dopo 22 giorni si ebbero ancora questi risultati:

1 cm^3	di	succo	+ 9	cm^3	di acqua	e HCl	digerivano	mm.	0,6
1	„	„	+ 19	„	„	„	„	„	0,5

Se al succo fresco si aggiunge alcool assoluto si ottiene un precipitato voluminoso bianco. Raccolto su filtro, lavato con poco alcool e seccato nel vuoto si trasforma in una massa cornea, facilmente riducibile in una polvere di colore giallo-rossastro, la quale contiene il fermento. In questa operazione conviene agire rapidamente per non vedere diminuire e talora annullarsi l'attività del preparato. La polvere in questione non si scioglie se non parzialmente nell'acqua a 37°, impartendole leggiera reazione acida: aggiungendo HCl la soluzione si fa più rapida e più completa: il filtrato possiede tutti i poteri del succo originario.

Il succo che cola dal torchio contiene una grande quantità di mucina che lo rende viscido e filante, e che è opportuno eliminare. L'aggiunta di acido acetico diluito fa coagulare questa mucina, che si separa in una massa vischiosa e biancastra. Aggiungendo un ugual volume di glicerina e dibattendo lungamente fino ad avere un tutto omogeneo, riesce possibile filtrare liberandosi così dal precipitato di mucina. La mucina trascina però con sè meccanicamente un poco del fermento, poichè ridisciolta in acqua questa soluzione possiede un debole potere digerente. La soluzione glicerica per contro si dimostra attivissima. Essa viene neutralizzata con soda $\frac{N}{10}$, e fornisce allora un preparato che può essere conservato attivo per lungo tempo. Anche la soluzione glicerica così ottenuta non esplica le sue proprietà se non è opportunamente diluita, come dimostra la seguente tabella:

Soluz. glicerica cm^3	Acqua + HCl cm^3	Albumina disciolta mm.
1	1	1,0
1	4	2,1
1	9	3,2
1	14	4,0
1	19	3,8
1	29	3,0
1	39	2,5
1	49	1,4
1	74	1,2
1	99	1,2

Dopo 1 mese dalla sua preparazione si ha:

1	9	3,0
1	19	3,5

E dopo due mesi:

1	9	2,8
1	19	3,2

L'estratto glicerico ha invece dopo questo tempo perduto completamente il potere coagulante sul latte.

Per ottenere il fermento attivo dal succo liberato dalla mucina ci siamo indotti alla precipitazione con alcool allo scopo anche di verificare se con questo sistema si giunge a prodotti simili a quelli ottenuti dagli autori o dializzando il succo o centrifugandolo dopo averlo raffreddato. L'aggiunta di alcool assoluto produce nella soluzione glicerica un precipitato voluminoso bianchissimo, il quale si può centrifugare, raccogliere su filtro, lavare con poco alcool e seccare poi sul vuoto. Si ottiene così una massa bianca riducibile in polvere candida. Essa è poco solubile nell'acqua, ma si scioglie completamente nell'acqua contenente 0,25 %, di HCl alla temp. di 37°. La sua soluzione è affatto limpida; scaldata, essa coagula; precipita per aggiunta

di alcool, di ac. tannico e dei sali dei metalli pesanti. In soluzione all' 1 % il potere digerente secondo Mett è di mm. 5,8, quattro volte cioè superiore ai migliori preparati dal commercio: questa soluzione dà pure plasteina e neutralizzata accaglia potentemente il latte. Dopo due mesi dalla data della preparazione il suo potere digerente è ancora uguale a mm. 5,0.

La polvere aggiunta direttamente all'acqua ossigenata produce un forte sviluppo di ossigeno. Le ceneri (che rappresentano l'1,95 %) sono affatto bianche: esse dànno la reazione del P, del Fe, di solfati e di cloruri. Le analisi di questo preparato, condotte coi metodi già citati, hanno dato i seguenti risultati:

gr. 1,859 di sostanza seccata a peso costante hanno dato:

				gr. 0,0488 di $Mg_2P_2O_7$	= 0,729 di P %	
„	„	id.	id.	id. „ 0,0120 di Fe_2O_3	= 0,45 % di Fe	
„	0,7436	id.	id.	id. „ 0,0483 di $BaSO_4$	= 0,88 % di S	
„	0,979	id.	id.	id. „ 0,0054 di AgCl	= 0,138 % di Cl.	

Il cloro venne dosato secondo Carius.

Abbiamo anche voluto esaminare il fosforo dell'estratto alcoolico di questo preparato. Questo estratto aveva lo stesso aspetto lecitinico di quello ottenuto dal residuo del succo fresco. Dal residuo alcoolico ottenuto esaurendo per 10 ore gr. 4,5678 di precipitato si ottennero gr. 0,0048 di pirofosfato di magnesio corrispondenti a 0,029 % di P ed al 3,97 % del P totale.

Se paragoniamo le cifre ottenute da questo precipitato, il quale sostanzialmente corrisponde al residuo secco del succo fresco, dedotta la mucina, i sali sciolti e quelle porzioni di albumina coagulabili dall'ac. acetico o non precipitabili dall'alcool, si vedrà che l'accordo è sufficiente a far ritenere che questo precipitato rappresenti la parte più importante del succo fresco. È da notarsi rispetto al fosforo lecitinico che qui abbiamo trovato in quantità sensibilmente minore di quello del residuo secco primitivo, che una parte di esso, come constatarono Nencki e Sieber (1), è solubile in acqua.

Senza volere in alcun modo affermare che il precipitato da noi esaminato costituisca un individuo chimico (chè anzi, come

(1) Loc. cit.

si vedrà, noi abbiamo potuto isolarne la parte attiva di composizione differente), tuttavia è notevole il fatto che esso ha una composizione abbastanza costante. Infatti i dosaggi di N col metodo di Kieldahl, da noi fatti non allo scopo di avere una cifra esattissima, che solo l'analisi elementare poteva darci, ma bensì per avere un dato sulla costanza della composizione in precipitati diversi, ci diedero cifre singolarmente concordanti, cioè:

da gr.	0,1716	di sostanza si ebbero	gr.	0,0203	di N	= 11,82 %
„ „	0,1460	„ „	„	0,01722	„	= 11,78 „
„ „	0,3400	„ „	„	0,03962	„	= 11,65 „

In un solo caso trovammo il 12,19 % di N.

Queste cifre differiscono notevolmente da quelle ottenute nelle analisi di Nencki e di Pekelharing, in cui si hanno valori fra 14 e 15 % di N. Evidentemente il succo da noi estratto contiene elementi che nella loro proporzione devono differire da quelli della secrezione gastrica. Ne fa prova il residuo fisso ed il suo contenuto in fosforo entrambi assai più elevati. Di questo fosforo una parte (quasi la metà) è trascinata dal muco e lo dimostra il contenuto in fosforo del precipitato alcoolico che si riduce a 0,729 %. Tuttavia, non avendo noi determinato il fosforo che rimane nel precipitato alcoolico, non possiamo attribuire al precipitato mucinico tutto il *deficit* in fosforo. In ogni caso abbiamo verificato che si può riuscire, come già appariva dalle ricerche degli autori russi e fu poi confermato dal Pekelharing (1), ad ottenere per successive depurazioni preparati che, tenendo conto della loro azione fermentativa, possiamo senz'altro chiamare col nome di pepsina, senza con ciò affermare che rappresentino l'enzima puro, preparati il cui contenuto in fosforo va via via diminuendo fino a diventare zero, senza che con ciò scemi il potere digerente. Il Pekelharing, che nelle sue indagini partiva da estratti cloridrici di stomaci di maiale, non potè giungere a ottenere pepsina priva di fosforo, e solo quando gli fu dato avere un cane operato alla Pawlow, che gli forniva del succo gastrico integro, riuscì a questo intento.

---

(1) " Zeitschr. f. physiol. Chem. ", XXXV, p. 8.

Noi invece dai nostri succhi ottenuti per pressione abbiamo ottenuta la pepsina esente da fosforo.

Noi abbiamo proceduto nel seguente modo: il precipitato alcoolico ottenuto dalla soluzione glicerica venne ridisciolto in HCl 0,25 %; la soluzione limpida venne precipitata con soluzione satura di solfato ammonico; ed il precipitato raccolto su filtro, lavato e ridisciolto in HCl 0,25 % si sottopose alla dialisi durante tre giorni alla temperatura di 0°, rinnovando sovente l'acqua.

Nel tubo dializzatore compare allora un tenue precipitato biancastro aderente alle pareti della carta-pergamena. Lo si raccoglie su filtro, si lava a lungo con acqua fino a scomparsa della reazione dell'HCl e dell'H_2SO_4 nel filtrato e poi con poco alcool, ed infine si secca sul vuoto. Il filtrato contiene tuttavia del fermento perchè esso è capace di digerire l'albumina.

Con questo processo sono inevitabili delle grandi perdite (così da grammi 2,0 di precipitato alcoolico ottenemmo soltanto gr. 0,45 di prodotto). La sostanza ottenuta è biancastra: solubile in acqua acidula: questa soluzione dà tuttavia la reazione del biureto e risponde ai saggi delle sostanze albuminoidi: in soluzione all'1 % il suo potere digerente è uguale a mm. 5,8, come quello del precipitato da cui si era partiti. La ricerca del fosforo operata su questo preparato distrutto colla miscela ossidante diede risultato completamente negativo: positive invece riuscirono le reazioni del Cl, del Fe e dello S.

Dal Laboratorio di Materia Medica e Jatrochimica
dell'Università — Torino.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 18 Aprile 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Boselli, Vice-presidente, Manno, Direttore della Classe, Rossi, Carle, Renier, Pizzi, Chironi, Ruffini, Stampini, Sforza e De Sanctis, Segretario. — Scusa l'assenza il Socio D'Ercole.

Viene approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, 28 marzo 1909.

Sono presentati d'ufficio i seguenti scritti offerti in omaggio dagli autori:

1° dal Socio Guareschi: *In memoria di Maria Guareschi in Garelli nel XXX giorno dalla sua morte - La famiglia* (Torino, Unione tipogr., 1909);

2° dal Socio corrispondente Giuseppe Biadego: *Verona* (Bergamo, Istituto italiano di arti grafiche, 1909);

3° dal Socio corrispondente prof. Giuseppe Brini: *La proprietà del lavoro*, estr. dai Rendiconti della R. Accademia dell'Istituto di Bologna, Classe di scienze morali, ecc., 1908-09 (Bologna, 1909);

4° dallo stesso: *Sul fr. 16 Dig. XII, 4*, id. (Bologna, 1908);

5° dal Socio corrispondente prof. Vittorio Polacco: *Di alcune deviazioni dal diritto comune conseguite al terremoto ca-*

labro-siculo. Memoria letta il 28 febbraio 1907 alla R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova (Padova, Randi, 1909);

6° dallo stesso: *Le cabale del mondo legale.* Discorso letto al R. Istituto Veneto il 24 maggio 1908 (Venezia, Ferrari, 1908).

7° dal prof. Martino Schanz dell'Università di Würzburg, *Geschichte der römischen Litteratur*, vol. I, p. 2ª, 3ª edizione (München, Beck, 1909).

Quest'ultima opera è dedicata dall'autore alla nostra Accademia delle scienze.

Il Socio Pizzi presenta il vol. 1° del *Dictionnaire persan-français*, par le baron Jean Jacque Pierre Desmaisons, publié par ses neveux (Rome, typ. polyglotte, 1908) e rileva l'importanza del lavoro del Desmaisons di cui egli accudì la stampa per incarico dei nepoti Prof. Carlo Reymond e sig.ª Susanna Reymond Desmaisons.

Il Socio Rossi presenta per gli *Atti* una nota del prof. Giovanni Battista Gerini, intitolata: *Due medici pedagogisti. Maurizio Bufalini e Lorenzo Martini.*

Il Socio Ruffini, legge anche a nome del Socio Manno, la relazione sulla Memoria del Prof. Giuseppe Prato: *L'evoluzione agricola nel secolo XVIII e le cause economiche dei moti del 1792-98 in Piemonte.* Approvata la relazione con voto unanime, l'Accademia delibera con pienezza di voti segreti la stampa del lavoro del Prato nelle *Memorie.*

Per le *Memorie* presenta il Socio De Sanctis un lavoro del Prof. Angelo Taccone, intitolato: *Contributi alla ricostruzione della Issipile euripidea.* Il Presidente delega i Soci Stampini e De Sanctis a riferirne in una prossima adunanza.

LETTURE

Due medici pedagogisti.

Maurizio Bufalini (1) *e Lorenzo Martini.*

Nota del Prof. G. B. GERINI.

Oggidì raramente ti avviene d'incontrarti in uno scrittore di cose naturali, che non si riveli tosto seguace del più gretto e dissolvente materialismo, vuoi perchè non potendo la mente dell'uomo tutte abbracciare le discipline costituenti una grande unità, ogni scienziato non vede che la disciplina a cui s'è dedicato (2), vuoi perchè una aperta professione di materialismo, è riguardata come titolo imprescindibile di rinomanza scientifica. Or bene nel corso de' nostri studi, ci abbattemmo in tre medici valentissimi a' loro tempi, N. Olivari, L. Martini e M. Bufalini. E poichè del primo dissi altrove, piacemi qui parlare degli altri due che quasi contemporaneamente, in Piemonte l'uno, in Toscana l'altro, mostrarono di tenere nel debito conto l'educazione dello spirito.

*
* *

M. Bufalini, nato di famiglia fiorentina in Cesena, il 4 giugno del 1787, da Maddalena Zambelli e dal dottore Jacopo, fu me-

(1) Cfr. M. Bufalini: *Ricordi sulla vita e sulle opere proprie*, pubblicati dall'avv. F. Mariotti, Firenze, succ. Le Monnier, 1875; A. Conti: *M. Bufalini* in *Dizionario illustrato di Pedagogia*; F. Cavalli: “ Memorie del R. Istituto Veneto „, t. XXI (*La scienza politica in Italia*); G. Capponi: *Discorso sopra Maurizio Bufalini*; C. Guasti: *Commemorazione di Maurizio Bufalini* in *Rapporti e elogi accademici di C. G.*, p^e^ 1^a^, Prato, succ. Vestri, 1896, p. 174 e sgg.

(2) Giustamente scrisse G. A. Rayneri (*Della unità delle scienze*, 1856): “ Ove ciascuno non attenda modestamente alla coltura della propria disciplina e non serbi il rispetto che si meritano le altre, allora sorgono i dissidii e le lotte, i cui effetti non si restringono nei privati gabinetti degli scienziati, ma si dilatano e diventano sventure sociali „.

dico insigne e scrittore assai pregiato, del quale si può con tutta ragione affermare avere seguito e continuato l'indirizzo scientifico galileiano. Nel giugno del 1809 ottenne la laurea presso l'Ateneo bolognese, a cui erasi ascritto nel 1805, dopo che aveva iniziato gli studi di medicina, nel biennio precedente, a Rimini, sotto la scorta d'un valente maestro. Tolta una breve permanenza a Pavia ed a Milano (1809), ritornò in patria. Per tacere delle varie vicende di sua vita fino al 1835, diremo che in quest'anno medesimo, il granduca Leopoldo gli conferì la cattedra di clinica medica nelle scuole di Santa Maria Nuova in Firenze, ove insegnò senza interruzione per 40 anni (1). Morì il 31 maggio 1875.

Idee filosofiche e pedagogiche.

Limitandoci ad un breve cenno della sua dottrina educatrice, lo desumeremo dal volumetto: *Discorsi politico-morali, alcuni già editi, altri pubblicati ora per la prima volta*, Firenze, F. Le Monnier, 1851, e da qualche altro opuscolo, di cui a suo luogo.

Per quanto anatomico e fisiologo, il Bufalini non usurpa il campo della psicologia, ch'egli ammette quale disciplina distinta della fisiologia, benchè quella da questa attinga molti lumi. Nè solo si chiarisce perfettamente convinto dell'esistenza di Dio e della spiritualità dell'anima umana, ma trae le prove di questi due supremi principii della filosofia spiritualistica, dalle stesse discipline naturali. Così nel *frammento tratto dal Breve avviso intorno alle proprie opere*, stampato a Bologna nel 1827, *Sulle prove dell'esistenza di Dio e della spiritualità dell'anima desunte dalle scienze fisiche,* scrive: “ O il movimento ha per sua essenziale proprietà, il sentire, il volere e il pensare, o non può assumerla giammai: perchè noi sappiamo bene che può variare d'intensità e di direzione, ma questi sono meri accidenti, che non possono compartirgli nuove proprietà „. E siccome il moto dei nervi va senza dubbio scompagnato dal sentire, dal volere e dal pensare, ne consegue, che se queste funzioni non sono sempre congiunte coll'azione nervosa, non sono nemmeno soltanto un movimento della materia, “ ma richieggono per propria assoluta

(1) Fu membro di varie Accademie, e socio corrispondente (classe di scienze fisiche e naturali) di quella di Torino dal 5 luglio 1840.

cagione un principio diverso dalla stessa materia „. E poco prima aveva detto: “ Quanto più gli uffici del sistema nervoso nelle funzioni del pensiero si scuoprono spartiti per varie sue provincie, tanto più ancora si conosce, che le azioni degli organi nervosi si allontanano da quella unità, che sentiamo nel pensiero „: e poichè “ l'unità del pensiero esige unità di potenza, e invece le ricordate osservazioni manifestano molte potenze diversamente collocate nelle diverse parti del sistema nervoso „, bisogna forzatamente “ inferire che esse non sono l'agente del pensiero „ (1). Certo, scrive altrove (*Intorno alla generazione dei sentimenti, considerati rispetto all'educazione morale degli uomini*), alle mentali funzioni dello spirito ne arrecano pure ministero le azioni cerebrali, necessarie non meno alla memoria che alla procreazione e perseveranza de' sentimenti. Che se la mente libera per forza della propria volontà, “ può liberamente trasportare l'attenzione a checchessia, e suscitare così or l'uno or l'altro desiderio o sentimento „, è pure evidente, che “ in ogni atto del pensiero si tramescola mai sempre l'esercizio delle nervee facoltà „. Il Bufalini non impugna affatto la scienza delle verità universali e degli assiomi, non potendosi certamente dubitare “ che la mente concepisca certe verità a priori, evidenti per sè, necessarie, apodittiche, le quali possono aiutarci „ (*Prolegomeni alla Patologia*).

* * *

L'educazione non si può convenientemente condurre senza molti riguardi alle fisiche qualità degli alunni. E siccome il primo e più essenziale scopo della medesima consiste nell'avvalorare sempre la fonte dei piaceri interiori dello spirito e nell'inaridire, quanto più sia possibile, quella dei piaceri sensuali, fa d'uopo perciò che tutto sia proporzionato all'età, non po-

(1) Avverte nel frammento: *Intorno alla generazione dei sentimenti*, che oltre ai motivi tutti di ragione, i quali spingono l'uomo alla contemplazione d'un Essere Creatore e alla dolce convinzione d'una vita immortale del suo spirito, gli stessi suoi naturali sentimenti lo trasportano in fine in queste nobilissime persuasioni ed affezioni, che poi diventano per lui l'impulso più valevole a bene operare, ed una inesauribile fonte di felicità, come quella che si attiene ad una speranza non mai cessabile, e speranza d'un bene senza misura.

tendosi il fanciullo richiamare a pensieri ed affetti che ancora non comprende. Ora considerando, che l'educazione consiste solo nell'arte d'imprimere nell'anima le buone abitudini, consegue che la stessa " deve esordire dalle fasce, essendo che le primissime abitudini riescono le più efficaci „. Tuttavia voglionsi schivare i modi troppo imperiosi, perchè possono questi costringere agevolmente i fanciulli a molta moderazione e compostezza di atti esteriori, mentre l'anima s'abitua e s'accende ognor più ne' desideri tutto affatto contrari. Occorre quindi per tempissimo adoperarsi, perchè si svolgano, si fortifichino e si rendano perpetuamente tenaci i buoni sentimenti interni: come del pari necessita rafforzare la riflessione, affinchè l'attenzione sia più vigile e sollecita nel ricercare quelli interiori moventi, che abbiano potere maggiore degli stessi moti de' sensi. Ammette l'A. che la coltura dello spirito moderi la naturale impetuosità dell'indole e sottragga maggiormente l'uomo dalla schiavitù delle sensazioni e dei sentimenti presenti. Ad educare però gli uomini non basta ammaestrarli nel vero: ma bisogna che l'amore dello stesso sia rinfrancato eziandio dagli altri sentimenti e che quasi connaturato con questi, non abbia più a temere gli assalti de' sensi e de' moti istintivi. Spetta quindi all'educatore l'obbligo di studiare diligentemente gli umani sentimenti, da' quali soltanto riceve forma ed essere tutta la vita morale. Gli è per ciò, che per questa parte la fisiologia appresta un utilissimo soccorso alla psicologia ed entrambe mirabilmente rischiarano la scienza dell'educazione. Occorre inoltre il predominio di certi affetti dell'anima, i quali imperino costanti alle nostre operazioni: e fra questi sentimenti vuolsi coltivare colla maggior cura quello della religione (1), l'amore del vero, del giusto e dell'onesto, nonchè i sentimenti della reciproca benevolenza, che porranno una barriera alle immoderanze egoistiche de' sentimenti di possesso. Necessita inoltre avere riguardo al desiderio della stima e della lode altrui, ma sempre colla prudenza di

---

(1) Nella monografia: *Intorno alle cagioni del perfezionamento civile dei popoli*, letta nella I. e R. Accademia dei Georgofili, 4 giugno 1837, scriveva: " D'onde assai chiara rifulge l'importanza salutevole della santità del sentimento religioso, che entro la stessa coscienza in ogni situazione della vita veglia a guardia continua della rettitudine delle umane operazioni „.

schivare gli eccessi in cui si può facilmente cadere. Così l'emulazione, va governata in modo che non trascenda in viziosa passione (1). Pel Bufalini l'esempio è lo stimolo eccitatore dei sentimenti più vero ed in esso quindi fondasi la ragione precipua dell'educazione umana. Avvisa egli inoltre, che l'iterato esercizio de' sentimenti induce l'abito: che l'abito si può ancora stabilire nelle funzioni del pensiero e che così educansi gli uomini o alla prevalenza della fantasia o a quella dei sani giudizi: che si fa costante nella vita di ciascheduno il modo di ragionare, benchè rimangano mutabili sempre le convinzioni; che l'educazione segue in ragione degli abituati sentimenti e dell'abituato modo di ragionare: essendochè quanto nella natura nostra non è suscettivo d'abitudine, non può formare oggetto di educazione. Avverte il Bufalini che a bene educare gli uomini, occorrono l'obbedienza volenterosa e la forza dell'autorità: che si ottiene l'una e l'altra se il comando è con segni d'amore, conforme a giustizia e circondato dalla fiducia: che tutto il ministero della educazione è un cambio vero d'affetti e un ufficio di fede; per ciò la madre è la migliore educatrice del mondo (2) (*Intorno alla generazione, ecc.*).

Degno di nota è pure lo scritto: *Della benevolenza, dell'emulazione e della religione considerate come principii della morale educazione dei fanciulli* (1840). — La natura, scrive l'A., ha nel cuore umano infuso il sentimento della reciproca benevolenza, il quale sopra tutto si nutre e si avvalora nella società di famiglia: dalla quale, come da sua sorgente, scaturiscono i sentimenti d'umanità e di comune beneficenza, che per tutta l'umana comunanza diffondono le più soavi e consolanti dolcezze della

---

(1) Il Bufalini esaminando l'opinione del Filangeri, il quale stima vituperevole, che alla virtù si prometta alcun premio, quando gli pare che debbasi l'uomo appagare della sola approvazione della coscienza e della lode altrui, avverte che se di questo principio possono essere presi ed infiammati i più alti spiriti, tanta astrattezza di soddisfazione non può similmente toccare la mente della comunità degli uomini.

(2) Opina l'A., che la minima parte dell'educazione cui ricevono i fanciulli, è quella che ha luogo tra le mura domestiche e nelle scuole, essendo che " il più s'insinua nei loro animi per tutto ciò che continuamente veggono fare e ascoltano dire dalla comunità degli uomini in mezzo ai quali pur vivono ".

vita stringendo insieme gli uomini coi vincoli di fratellanza e di amore i quali raffrenano la turbolenza delle ree passioni. Ora gli uomini, quand'escono dalla famiglia, veggonsi gettati in mezzo ad un'arena, in cui gareggiano per conseguimento di premio. Di qui discende che le accomunate educazioni, benchè procurino assai importanti vantaggi, accrescendo mirabilmente l'operosità degli uomini, avvezzandoli a meglio conoscere le proprie forze e le altrui, e facendoli infine più prudenti, più circospetti, più tolleranti, più accorti negli atti tutti della vita, possono riuscire pericolose. Perciò fa d'uopo dirigere l'emulazione, così che ecciti l'operosità degli uomini, senza che valga a spegnere nei medesimi i sentimenti della reciproca benevolenza, anzi li avvalori. E poichè l'educazione è riposta " nell'accendere, alimentare e rendere permanenti quei sentimenti che debbono dar moto e regola alla vita dell'uomo: e questi si generano quando se ne vede l'esempio e per la forza potentissima dell'imitazione sentesi preso dalla voglia di atti consimili ", così avviene, che per l'esempio e per l'abitudine si connaturino coll'uomo certi sentimenti, i quali in lui formano quindi una viva forza interiore, sempre presente e sempre pronta a sorgere attuosa, la quale non gli consente di agire diversamente da' suoi inviti medesimi (1). A proposito degli asili infantili, pensa il Bufalini, che in essi si ha un vantaggio sopra tutte le altre maniere di educazione in comune, perchè vi si serbano più che in ogni altra, attuosi ad un tempo, l'amore vicendevole e l'emulazione, ritornando la sera i bambini in mezzo alla famiglia, dove trovano l'alimento alle loro tenere affezioni, tanto più caro quanto più interrotto.

Sulla influenza educatrice della popolare istruzione (" Atti della R. I. Acc. de' Georgofili ", t. XXVIII, 1850). Il Bufalini in questo discorso chiarisce come possa riuscire educatrice anco la popolare istruzione, e fino a quale punto e con quali cure e cautele valga a così grande intento. Educare gli uomini, egli scrive, significa assicurarli nell'abito del ben fare: nel quale saranno certamente assicurati, quando nell'interno dell'anima, una forza costante ed invincibile, comandi alle umane operazioni.

(1) L'esempio e le consuetudini tutte della vita sono le vere potenze educatrici degli uomini (*Sulla influenza educatrice della popolare istruzione*).

La quale forza risulta dalla potenza dell'amore del vero, rinfrancato dal sentimento della reciproca benevolenza, dal desiderio della stima e dell'amore degli uomini, dall'autorità della legge e dal timore santo di Dio. Ora il governo deve sapere bene ordinare e stabilire nell'umana società tutte le consuetudini meglio acconce a fare dovunque risplendere gli esempi della virtù, sicchè le popolazioni nudrite da questi, crescano eziandio abituate ad onorarli ed a seguirli. In tale modo la vera, efficace educazione degli uomini è onninamente assicurata. Che se l'ufficio dell' istruzione può coadiuvare una sì grande opera, non sarebbe atto a compierla da sè solo, ed a coadiuvarla è necessario che adempia ad alcune condizioni e scansi alcuni pericoli.

L'istruzione, insegnando il vero, rende gli uomini più assennati e prudenti: ma non basta ancora a trarre l'uomo ad amare il sacrifizio proprio pel solo desiderio di giovare al suo simile. La salutevole potenza educativa dell'istruzione, cessa necessariamente d'esistere e d'operare ogni qualvolta la stessa non è immanchevole luce di verità. Or bene, a renderla veramente educativa, non basta porgere ai giovanetti un alimento tutto puro di virtù e verità, ma occorre eziandio, che i medesimi riportino dalle scuole l'arte di raggiungere poscia da sè la verità in mezzo alle troppo facili illusioni della ragione. L'istruzione deve armare l'uomo contro la forza dell'immaginativa e la seduzione degli affetti, che contrariano ognora il retto cammino della ragione.

E poichè le verità dell'ordine fisico, come sovente più semplici e più atte alla prova dell'osservazione e dell'esperimento, meglio si confanno alla comune intelligenza degli uomini, così importa assai, che la popolare istruzione si contenga molto nell'ordine delle fisiche verità; il che la renderà " più severamente logica e positiva, nonchè meglio acconcia ad educare l'umana intelligenza nell'arte di bene investigare e conoscere il vero ".

L'istruzione morale poi vuolsi conformare ai dogmi della religione ed alla natura degli essenziali sentimenti dell'uomo, così che sia piuttosto un alimento di questi, che coltura dell'intelletto. Ma gli ammaestramenti, oltre che affettuosi, devono riuscire autorevoli affinchè ottengano tutta la stima di chi li riceve. Che se gli atti della benevolenza possono rendere quelli agevolmente grati, egli è solo colla bontà dell'ingegno, col va-

lore della dottrina e colla santità de' costumi, che veramente si possono essi innalzare a tanta forza d'autorità da imprimerli indelebili nell'animo degli allievi. Onde deriva, che nessun governo può credere d'educare le popolazioni " quando non sappia procacciarsi da esse la più ferma ed universale fiducia „.

La popolare istruzione deve adattarsi ai bisogni ed alla capacità di chi è destinato a riceverla ed essere principalmente tecnica, come quella appunto, la quale versando intorno ad argomenti fisici, appartenenti alla sua più particolare e continua sperienza„ " vale altresì di più a meglio disporre il suo intelletto alla più sana arte del ragionare „.

L'A., dopo di avere notato, che siffatta istruzione è pure atta a suscitare e promuovere i buoni sentimenti, alza la voce, contro quella pestifera maniera d'insegnamento, che degrada la umana natura e colle frivolezze la rende incapace de' beni migliori della vita: nonchè contro l'arte la quale ritrae i suoi soggetti dai fatti della vita più comune, e tutto studiosamente raccoglie quanto quivi di più sozzo, di più abbietto, di più turpe e di più nefando può rinvenire. Per ciò secondo il Bufalini, l'istruzione popolare va ordinata in modo che distolga gli uomini bramosi di sapere dal dissetarsi a così sordide fonti. Di qui consegue, che de' sentimenti voglionsi quei soli esercitare, i quali innalzano l'anima alla grandezza della virtù e lasciano intatto il naturale abborrimento del vizio. Conclude il Bufalini col raccomandare ai Governi, agli educatori ed ai parenti di non riporre l'educazione delle crescenti generazioni nella semplice istruzione, sì bene di avvalorarne l'effetto con tutte le possibili consuetudini, atte a sviluppare e nutrire i buoni sentimenti, tra cui precipuo, senza dubbio, e necessario quello della vera religione. E poichè appartiene ai Governi l'ordinare l'istruzione pubblica come conviene che veramente sia, spetta agli educatori ed alla famiglia di presceglierla quale la giusta ragione delle cose la dimostra più vera, opportuna ed appropriata alle diverse condizioni degli alunni.

Nelle brevi considerazioni: *Sulla coltura delle scienze e sulle guarentigie dovute alla società per l'esercizio delle arti scientifiche* (" I. R. Acc. de' Georgofili „, t. XXII, 1844), il B. scrive che l'opera della istruzione, convenientemente diretta e sostenuta, non è compita se non quando alla medesima segue la sollecitudine

dell'ammaestramento, che ciascuno deve procurarsi da sè, ed a cui niuno è più bastevolmente sospinto " se la sola coscienza glielo impone, veruna utilità non glielo richiede, e spesso anzi manifesti nocimenti glielo contrariano „.

Notevole è pure dal nostro punto di vista, il discorso: *Sull'educazione considerata in relazione alle consuetudini sociali* (" Atti de' Georgofili „, 1859). Uniformità ed immutabilità di principii, sono i due fondamenti essenziali dell'educazione: la quale consiste in modo esclusivo nell'abitudine della volontà e de' movimenti invariabili di questa, non già nelle diversissime e punto durabili convinzioni della mente. Ora l'esempio che ci trae all'imitazione, nonchè i precetti impartiti con giusta autorità (1), e ricevuti con fiduciosa obbedienza, sono le due grandi forze le quali fanno piegare a sè la volontà degli uomini e la sottraggono all'impero mutabile e vario delle opinioni. L'educazione deve inoltre molto adoperarsi per promuovere nella mente le consuetudini del retto ragionare, perchè un'educazione logica va riguardata come sommamente necessaria a risecare o almeno a diminuire la fonte di tanti errori: per ciò occorre assuefare la ragione alla giustezza dell'investigare e del giudicare. All'educazione della mente poi conviene che cooperi quella del cuore: senza di cui si allevano uomini più inclinati ai mali della corruzione, che ai beni della giusta ed onorevole convivenza sociale. Pure ammettendo, che s'invochi con molto maggiore diligenza ad ingentilire gli animi l'istruzione, egli teme che in mezzo alle molteplici materie, in cui si tengono occupati gli intelletti infantili ed alle maniere diverse di ginnastica, nelle quali si addestrano, resti troppo poca parte alla coltura del senso e degli affetti, volendosi i fanciulli esercitare a sentire viva la commozione degli esempi e delle virtù. Si duole il Nostro, che alla formazione del senno non provvedano abbastanza nè la prima educazione, nè quella delle scuole superiori e che le costumanze presenti non lascino sperare una buona influenza educativa. Perciò vorrebbe, che s'infrenasse il male delle letture

(1) L'Autore rimanda al discorso: *Sull'autorità considerata come forza morale, necessaria all'ordine ed alla felicità dell'umano consorzio*, in " Atti dell'Ateneo italiano „.

eccitatrici di nefande passioni e di corruttela: e si provvedesse meglio al bisogno degli intelletti da una parte ed a quello degli affetti dall'altra (1).

Dalle cose fin qui dette possiamo concludere con A. Conti (art. cit.), il quale a dire il vero, si occupò del Bufalini, quasi esclusivamente rispetto al metodo scientifico da lui seguito, che il nostro scrittore " mira sempre alla formazione morale dell'uomo, cioè all'educazione, pur quando mira all'istruzione scientifica: che l'istruzione non educatrice reputa coltello a due tagli, a servizio degli uomini o a perdizione, tanto più grave quanto più lo sappia usare chi lo maneggia ". Nè qui so astenermi dal riferire il giudizio che del Bufalini ci lascia G. Capponi (*Sull'educazione*, frammento, 55), il quale dopo di aver notato che " togliere alla correzione l'affetto, è un togliere ad essa ogni forza morale: egli è un privarla di quella virtù simpatica in cui risiede la potenza educatrice ", soggiunge: " Lo che a me sembra avere mostrato un uomo che le scienze morali invidiano alle fisiche e che sulla educazione scrisse poche parole, ma di gran peso ". Il Capponi — scrive il Tabarrini nel vol.: *Gino Capponi*, *i suoi tempi*, *i suoi studi*, *i suoi amici*, Firenze, Barbera, 1879, c. 9, a proposito del breve discorso dal gentiluomo fiorentino diretto a Filippo Mariotti, che allora stava pubblicando i *Ricordi* del Bufalini — aveva avuto col Bufalini lunga consuetudine, ed oltre al pregiarne l'alto valore scientifico, ammirava quella sua filosofia socratica, diretta non solo a spiegare i fenomeni della natura e le leggi dell'intelletto umano, ma ancora ad avviare al bene le volontà non corrotte dai sofismi. Queste belle qualità, che il Bufalini ebbe comuni col Puccinotti, diedero alla scuola medica toscana un indirizzo morale, che la rese feconda non solo di buoni medici, ma di cittadini spechiati.

---

(1) Intendimento più o meno pedagogico hanno i seguenti lavori del B.: *Sull'insegnamento pubblico specialmente medico e chirurgico in relazione colla civile libertà* (" Sperimentale ", 1860); *Sugli impedimenti al sapere e sui modi di evitarli*, Firenze, 1860; *Intorno a una proposta di legge sull'istruzione superiore*, " Rivista italiana " di Torino, 1861; *Di un fondamento essenziale di legge per la più completa ed economica istruzione superiore*. Firenze, tip. delle Murate, 1863.

Lorenzo Martini (1).

In Cambiano, grosso borgo del Piemonte, il 19 settembre del 1785 nacque Lorenzo Martini, il quale, appresi in patria i primi elementi della lingua italiana e latina, studiò la filosofia nella vicina Chieri. Vinto un posto al Collegio delle Provincie, s'inscrisse dapprima alla facoltà di matematica da cui passò a quella di medicina. Mentre fungeva da ripetitore nel predetto collegio, sostenne un esame, in virtù del quale ottenne il titolo di professore di filosofia, e questo senza punto interrompere gli studi delle discipline salutari. Riordinatosi col ritorno della casa Sabauda (1815) l'Ateneo, il Martini pel primo conseguì l'aggregazione al Collegio di Medicina. Nel 1820 venne chiamato a reggere la cattedra di fisiologia, a cui rinunziò per l'insegnamento della medicina legale. Avendo quindi sposata la figlia dell'illustre chimico *Giobert* (2), ne dovette poco di poi piangere la morte.

Fornito d'ingegno perspicace e di memoria tenacissima, spese la vita, non troppo lunga a vero dire, negli studi, letterarii e scientifici. Discepolo del sommo latinista *Carlo Boucheron* (*Della coltura dell'ingegno*, p. 31), come del celebre matematico *C. I. Giulio* (*Dell'educazione*, n. 46) (3), dopo di essere stato eletto nel 1832 consigliere del Protomedicato, quindi conservatore e poi direttore del vaccino in Piemonte, fu nominato infine rettore dell'Ateneo. Fece parte della R. Accademia delle Scienze di Torino (dicembre 1838), e d'altre società scientifiche. Amato dai discepoli e dai colleghi, che ne pregiavano l'indole schietta e l'eccellenza dell'ingegno, morì improvvisamente il 3 aprile

---

(1) Cfr. G. B. Corniani: *I secoli della lett. ital.*, vol. VIII, Unione tip. ed. Un breve cenno intorno al Martini leggesi nell'opera di Antonino Parato: *La Scuola pedagogica nazionale*, sez. 5, c. 5; *Nuova Enciclopedia popolare*, t. VIII; P. Larousse, *Grand dictionnaire*, t. X.

(2) A lui è dedicato l'opuscolo: *Della coltura dell'ingegno*, 1821, con queste parole: “ Salve — o inclito Giobert — Questo pegno di sincero ossequio — di un tuo amantissimo discepolo — Con benigna fronte accogli — Vivi lunghi anni — Alla gloria — del nome subalpino „.

(3) Fu pure amico di Luigi Ornato, col quale, ritornato da Parigi quasi cieco verso il 1841, s'intratteneva pressochè giornalmente di letteratura e di metafisica (A. Parato, op. e l. c.).

del 1844, avendo lasciato tutto l'avere all'Università, perchè si instituissero in perpetuo due borse di studio nel Collegio delle Provincie, a favore di due giovani, nativi di Cambiano i quali studiassero medicina o belle lettere. Per attendere più liberamente a' suoi prediletti studi, non esercitò la medicina pratica: così che non solo potè apprendere la lingua greca (1), la latina, la francese, l'inglese e la tedesca, ma ancora scrivere un numero straordinario d'opere tanto di medicina, quanto di filosofia.

Opere filosofiche e letterarie. — Per tacere delle opere mediche e degli *Emilii*, de' quali dirò fra poco, scrisse: *Pantea o regalo alle Spose: Gli Allori del bel sesso*: *Della sapienza dei Greci* (1836) in latino, ma fatto volgare dal Melazzi. Nel 1824 tradusse le *Poesie* di Alberto Haller in prosa, e nel 1832 compose i *Discorsi filadelfici* ossia *Fasti dell' ingegno umano.* Tra il 1838 ed il 1842 pubblicò in Milano la *Storia della filosofia* (8 volumi). Dettò pure dei *Commenti su Dante*, e morendo, lasciava in corso di stampa a Capolago, una traduzione de' *Dialoghi* di Platone e non pochi manoscritti.

Qualche anno dopo la morte (1850), si eresse nell'Ateneo, alla memoria di lui, un'erma marmorea, colla seguente inscrizione latina di T. Vallauri: Laurentio Martini | Domo . Cambiano | Doctori . decuriali . medicinae . tradendae | Viro sui iudicii | A populari . iactatione . remoto | Qui . parta . iam . nominis . celebritate | inopina . morte . prereptus . est | III Non . Aprilis . An. MDCCCXXXXIIII . VIII . viri . athenaeo . moderando . An. MDCCCL | PP.

Le idee pedagogiche.

Menzioneremo ora gli opuscoli pedagogici e morali del Martini. Nel 1820 fece di pubblica ragione *Aemilius seu de tuenda*

(1) Ci fa sapere il Martini (*Della coltura dell'ingegno*, 1821) che l'abate di Caluso, cui dice fornito d'immensa erudizione, fu il primo ad inspirare tra noi l'amore di questa lingua, e che sulle traccie di lui camminarono il Peyron ed il Boucheron. Ecco le parole d'elogio sul Caluso: " Scrisse in idioma ebraico, caldeo, siriaco, arabo, copto, fenicio, greco, latino, italiano, francese, non senza eleganza. Coltivò le matematiche: descrisse l'orbita di Urano: promosse lo studio della natura: fu versato nella storia: agli studi gravi gli ameni associando, emulando gli ottimi oratori e poeti, seppe alle sue filosofiche speculazioni conciliare maravigliosa bellezza „ (op. cit., p. 28).

valetudine, tradotto quindi in italiano, col testo a fronte, dal prof. Cristoforo Baggiolini, col titolo: *Emilio sul modo di conservare la salute*, Torino, 1821 (presso Pietro Marietti, libraio e negoziante di stampe in via Po, n. 48). L'edizione tradotta riproduce una lettera del conte Prospero Balbo all'autore. Nello stesso anno (1820) pubblicò: *De cultu ingenii*, voltato in volgare dall'autore medesimo (*Della coltura dell'ingegno*, Torino 1821, presso P. Marietti).

Nel 1822 videro la luce il terzo, il quarto, il quinto, il sesto, il settimo e l'ottavo *Emilio*, ossia: *Del maritaggio; Del sopportare le avversità; Della moderazione nelle prosperità; Dell'educazione; Degli amici e dei nemici; Del governo della famiglia* (Torino, P. Marietti). I quali *Emilii* con altri nuovi, ripubblicò in due grossi volumi, in latino. Il primo (1823) contiene: *De felicitate*; *De humani corporis structura; De vita; De actis mentis; De affectibus animi; De tuenda valetudine; De cultu ingenii; De affectibus animi moderandis.* Il secondo (1825) comprende: *De officiis; De adversis fortiter ferendis; De Amicis; De ducenda uxore; De inimicis; De liberis instituendis; De gerenda familia* (1).

Emilio sul modo di conservare la salute.

Muovendo dal fatto, che assai acconcia alla sanità riesce una moderata temperatura, esamina il Martini le proprietà e gli effetti dell'aria nella economia animale, ed avvisa che per difendersi contro il freddo, il migliore rimedio consiste nell'esercitare il corpo col moto. L'argomento lo trae pure a dire delle vesti, di cui studia il colore, la forma, la qualità e la nettezza: nè tralascia di parlare de' bagni e degli alimenti, concludendo che vuolsi tenere conto della stagione, del temperamento, dell'età.

Necessità degli esercizi. — Gli esercizi debbono avere luogo là, ove l'aria sia pura e la temperatura mite. Facili e brevi siano poi le movenze de' bambini, mentre ai fanciulli convengono giuochi frequenti, ma non moti forti. Che se ai giovani s'addice un più faticoso esercizio, ai vecchi è necessario un movimento temperato. I movimenti tornano vantaggiosi fintan-

(1) Vi sono aggiunte le vite di Haller, Bertrandi, Franck, Villani, Davila, Bentivoglio, Filangieri.

tochè non istanchino, ma piuttosto ci spronino a maggiore gagliardia. Discorrendo degli esercizi in particolare, trova il Martini conveniente per tutti il passeggio, particolarmente all'aria aperta, riserbando pei più vigorosi la corsa, e mostra di apprezzare la danza, in cui tutto il corpo graziosamente si scuote; nè dissuade dalla scherma. Ai quali esercizi aggiungeva il giuoco della palla, la caccia, l'arte del cavalcare, che favorisce la digestione, prepara più libero corso al sangue, promuove la traspirazione e rassoda le forze; il *bigliardo*, in cui al moto si unisce il molteplice piegarsi della persona. Inoltre riescono di singolare utilità il nuoto, perchè col movimento delle membra, unisce il vantaggio del lavacro. Giovano pure alla salute i viaggi, come vi contribuisce il sentimento religioso, aiutandoci esso a raffrenare gl'immoderati affetti, nonchè il temperato lavoro intellettuale. Ma poichè nulla nuoce più delle ostinate applicazioni, la fatica non solo dovrà alternarsi col riposo, ma considerando che gli studi severi affaticano più presto de' dilettevoli, si avvicendino gli uni cogli altri.

Della coltura dell'ingegno.

A coltivare felicemente gl'ingegni, fa d'uopo conoscere le condizioni fisiche, da cui quelli sembrano procedere, essendo dall'esperienza confermato, che l'anima esercita la sua potenza per mezzo del cervello, dei nervi e de' muscoli. Ora la mobilità e l'energia de' sensi interni, non variano soltanto ne' diversi soggetti, ma eziandio nel medesimo individuo, secondo che sono differenti le circostanze in cui trovasi, giacchè il sesso, l'età, il temperamento, il genere di vita cagionano notevole divario. Però la condizione dell'anima non è soltanto modificata dallo stato del cervello e dei sensi esterni, ma dipende in grande parte eziandio dagli organi i quali servono alla vita interna o vegetativa, cui altri chiamano organica. E qui esaminata la varietà degli ingegni, il Martini confuta l'opinione d'Elvezio, il quale pensa, che la differenza loro dipenda unicamente dalla diversità d'educazione. Il Martini distingue quattro specie d'ingegni rispetto al loro grado, e, dopo di avere esaminato l'opinione di alcuni scienziati sulla cagione determinatrice della loro varietà, divide le discipline tutte in due classi, secondo che

esigono fuoco d'immaginazione ovvero memoria e raziocinio, ed avverte che la forza immaginativa deriva dalla mobilità de' sensi interni, mentre la memoria procede dalla loro energia. Finalmente dopo di avere discusso, se l'ingegno sia atto ad accogliere i rami delle varie scienze, avvisa che prima d'imprendere lo studio di qualsivoglia materia, occorre di ciascuna conoscere l'eccellenza ed i vantaggi. Rispetto poi alla questione se si possano coltivare ad un tempo parecchie discipline, avvisa il Martini, che noi dobbiamo dedicarci specialmente ad un genere di studio, benchè si possa tuttavia per altri vagare (1). Tra i mezzi atti a coltivare l'ingegno, sono i precettori, la lettura, l'osservazione, l'esperienza, la meditazione, le adunanze letterarie e l'esercizio del parlare e dello scrivere. Or bene, quanto ascoltiamo dal maestro celermente ci sfugge, ove per mezzo della lettura non lo si elabori, in quella guisa che le cose lette non si possono comprendere appieno, quando l'istitutore non ci porga i debiti schiarimenti. Riguardo alla lettura occorre esordire dagli scrittori moderni, e risalire agli antichi, non leggerne molti ma molto; esaminare attentamente le cose lette ed avvertire le relazioni che possono avere con quelle altra volta meditate: disporre le idee, nulla lasciando passare che appieno non siasi compreso. A proposito dell'osservazione e dell'esperienza, che sono le principali fonti delle umane cognizioni, si ritenga, che lo studio della natura ha una forza meravigliosa tanto a perfezionare l'ingegno, quanto a rendere buoni i costumi. L'energia del pensiero si accresce mirabilmente coll'esercizio, avvenendo delle facoltà mentali ciò che succede delle forze muscolari. Che se nello studio delle scienze dapprima s'incontra grandissima fatica, insensibilmente s'allevia di poi la noia per acquistare in fine molta facilità e provare invidiabile diletto. Nella meditazione poi devesi porre ogni impegno per confrontare tutte le cose, per giudicarle ed esaminarle da ogni parte. In fine il Martini enumera i vantaggi provenienti dalle erudite adunanze, in cui a vicenda comunicansi le conoscenze, e dall'esercizio sia dello scrivere, sia del parlare.

(1) " Dicendo adunque non poter l'anima applicarsi a più cose, intendo parlare di quegli studii che specialmente richiedono l' opera nostra, non degli altri, che qualche volta per sollievo leggermente si libano ", n. XXXV. *Della coltura.*

Dell'educazione.

" La felicità degli uomini, il decoro delle famiglie, la sicurezza delle città, la gloria delle nazioni, l'augumento degli imperii, sopra una saggia educazione, siccome su d'una salda base, sono fondati. Per quella serbasi la gagliardia dei corpi, coltivansi gl'ingegni, informansi gli animi a virtù „. Con queste parole incomincia il sesto Emilio: *Dell'educazione:* e benchè il Martini affermi di avere già scritto altrove come si possa rendere valido l'organismo e coltivare la mente, e si riservi di trattare diffusamente degli *uffizi*, imprende puranco a dire del modo, col quale alle due prime età si possono adattare i precetti fisici ed intellettuali. Perciò l'opuscolo consta di tre parti.

Educazione fisica dell'infanzia. — L'A. ripudia l'uso delle fasce, perchè il bambino, lasciato libero ne' suoi moti, acquista maggiore vigoria. Debb'esserne nutrice la madre e non già una donna prezzolata, non potendo la medesima sottrarsi a questo obbligo, anche perchè il latte materno è il più appropriato alimento del neonato, e qualunque altro non riesce del pari blando e nutriente. Per ciò sono irragionevoli i motivi addotti da molte madri per esimersi dall'obbligo dell'allattamento. Ma se dura necessità le costringe a commettere ad estranee la loro prole, si usi la massima cautela per supplire nel miglior modo possibile al difetto del materno sussidio e si ricorra a donna del contado. Fatto un breve cenno delle cure igieniche, dell'aria, dei bagni e dei vestiti, prescrive il Martini, che siccome il movimento fortifica il corpo, nella stessa guisa che l'infiacchisce l'inerzia, si procuri di rendere il bambino vigoroso fin dalla prima età, affinchè nel corso di tutta la vita eluda l'imperio delle cagioni morbose. Quindi, compiuto un sufficente numero di mesi, si avvezzi prima a sostenersi in piedi, e quindi a poco a poco a camminare. Trascorso il primo anno, durante il quale sarà stato vaccinato (1), le forze sono già abbastanza ferme: ed il bambino si nutrirà con alimenti semplici e comuni. Nei tre anni consecutivi (cioè a tutto il quarto anno d'età), non faccia

(1) " Basta il consultare le tavole necrologiche per essere pienamente convinti quanta sia l'utilità della scoperta jenneriana „.

altro che esercitare il corpo nel camminare e nel correre: gli si concedano più copiosi cibi e consistenti: si continui l'uso del bagno e del nuoto col sorreggerlo. Coll'aumento delle forze siano più duri gli esercizi, ma si espongano con minore riserbo alle inclemenze del cielo, senza però cadere negli eccessi. Avvezziamoli a cibi più grossolani, ma non allettiamoli e, molto meno, non spingiamoli a bere vino; il quale, quando mostrino di appetirlo, dovrà essere sempre annacquato ed in piccola quantità. La corsa, il salto, l'oscillo (altalena) sono i movimenti che convengono a tale età.

Gli esercizi fisici vogliono essere più duri e di maggiore durata nel settimo anno, in cui la fibra va rafforzata colla fatica e coll'esporsi all'influenza delle forze che in debole corpo produrrebbero malattia. E poichè la natura trae i fanciulli a correre, a saltare e ad escogitare mille ragioni di giuochi, nei quali le membra ora si distendono ora contraggonsi, ed ora si arruotano in giro, i genitori ed i maestri non si oppongano giammai ai consigli della natura. Il giuoco della palla, la lotta, le ascensioni in luoghi montuosi, i bagni frequenti ed il nuoto, ecco gli esercizi propri del fanciullo, al quale convengono vesti leggiere, e comode; cibi semplici, grossolani, acqua o vino annacquato. La quale maniera di vivere però dal settimo si può protrarre fino al decimo anno. In questo tempo l'istituzione diventi più severa: si facciano viaggi: si abitui il corpo a tollerare maggiormente e sole e pioggia e caldo e freddo e sete e fame. Mangi talvolta il fanciullo pane rozzo, indurito: il vino, se gli piace, lo beva in maggior copia e puro: ma talora se ne astenga interamente. Gli si turbi il sonno, sì che s'avvezzi a sopportare la veglia. Gli esercizi ginnastici vengano moltiplicati: la danza, il salto, la corsa abbiano luogo tanto prima quanto dopo il pranzo. Impari inoltre il giovanetto qualche arte meccanica per sollevarsi all'uopo dalle fatiche. Gioverebbe anche ch'apprendesse a coltivare il giardino. Tale vuole essere l'educazione fisica dal 10° al 14° anno (1).

Adolescenza. — Considerando ch'esiste una strettissima corrispondenza tra il fisico ed il morale nell'uomo, il Martini porge

(1) In questo tempo il Martini raccomanda pure l'esercizio della caccia, che a me pare un po' troppo prematuro.

quei precetti d'una savia instituzione fisica, che conducono alla scientifica e morale. Vuole perciò che tengasi lontana dai giovanetti assolutamente l'intemperanza, la quale rende gli uomini irragionevoli, feroci ed inclinati a mal fare, e che gli esercizi del corpo siano proporzionati alle forze fattesi più valide. Il cavalcare, la scherma, la pesca, il salto, la danza, la caccia ed altri simili, sono opportunissimi a tale età. Ma colla maggiore prudenza possibile s' impedisca che il giovanetto diasi ai solitari piaceri. Non c'è vizio più pernicioso all'anima ed al corpo: ed il migliore antidoto contro il medesimo, rinviensi nella vita attiva e laboriosa. A ventun'anno allorchè il nostro allievo avrà compiuto, o quasi, la sua educazione potrebbe, se glielo permettono le sue condizioni finanziarie, intraprendere qualche viaggio d'istruzione.

Educazione intellettuale. — È cosa assurda il credere, che la ragione non si sviluppi se non dopo il settimo anno, potendosi esperimentare come il bambino d'un anno operi delle cose, le quali indicano già una serie d'idee concatenate e come nel secondo anno i sensi siano meglio diretti e sviluppati e come più attive ed ordinate appariscano le facoltà dei fanciulli. Pronunziano invero, sebbene imperfettamente, qualche parola, come i nomi dei genitori e degli avi e degli alimenti che loro si apprestano; applicano un nome a significare altre cose simili. I vocaboli sono per lo più d'una sola parola o d'una sillaba raddoppiata. Ora rispetto alla coltura di quest'anno, è necessario non profferire giammai parole inutili: che se i bambini non pronunciano bene, non s'addice a noi convertire in abitudine quello che dipende dal difetto d'esercizio degli organi. Nel terz'anno, poichè la loquela è meno imperfetta (l'A. la dice senza più *perfetta*) e sono cresciute di numero le idee, e conseguentemente si sono moltiplicati i vocaboli, con cui quelle vengono espresse, si può dare principio alla coltura del tenero ingegno, procurando che il bambino parli la lingua italiana invece del proprio dialetto. Nel quarto anno avrà principio l'insegnamento della lettura, preferibilmente nell'idioma nazionale. Ma sebbene l'A., avvisi doversi richiamare l'attenzione dei bambini sulle lettere e sulla loro connessione, non già sul significato delle parole, facendo leggere i vocaboli appresi l'anno innanzi, tuttavia io sono fermamente convinto che il bambino non è affatto capace di tale istruzione, prima d'aver compiuto almeno il quinto anno

d'età. Sarebbe bene, continua il Martini, proporre a leggere ai bambini i nomi delle parti del corpo umano, e degli oggetti i quali sono di qualche uso al vivere ed al governo della famiglia o riguardano la moderazione de' costumi. Nel quinto anno unendosi colla lettura l'esercizio dello scrivere, si abitui grado a grado l'alunno a pronunciare le parole nette e precise, non già mutilate e canticchiate: chè le abitudini si convertono in natura. Nell'anno seguente si continui l'esercizio del leggere e dello scrivere, ma vi si aggiunga qualche nozione delle scienze descrittive, più utili all'università degli uomini e in primo luogo, la geografia. Poichè l'educazione fino al settimo anno, vuole commessa alle sole genitrici, insiste nell'*Emilio*, libro III: *Del maritaggio* (1822, Torino, P. Marietti), per una conveniente coltura femminile. Se una liberale educazione richiede che dagli anni più teneri, vengano gl'ingegni con ogni diligenza coltivati, chi più atto a tale ufficio della madre? Poniamo una madre di famiglia, sufficentemente versata nella storia e nelle scienze naturali (continua nel cit. op. *Del maritaggjo*, n° 19), essa ad ogni tratto, risveglierà la curiosità e l'attenzione dei suoi figliuoletti: loro rappresenterà le chiare e memorande geste degli eroi: gli stimolerà ad imitare i buoni e ad abborrire i cattivi ed inoltre spiegherà ai medesimi, quanto al loro sguardo s'appresenti. E l'isegnamento d'una madre ai suoi figli, molto maggiore frutto apporterà che quello dei precettori, perchè continuo ed animato dall'affetto. È raro assai trovare una persona, la quale abbia per chi non sia suo figlio, la costante pazienza, necessaria a reggere un'età così irrequieta. Per tutte queste considerazioni, è lodevole la donna che applichi l'animo alla coltura delle lettere e delle scienze. Che se a tutte non fosse dato di possedere una grande erudizione, qualunque donna ben nata sappia almeno parlare e scrivere correttamente il patrio idioma; conosca le principali operazioni dell'aritmetica e gli elementi della storia sacra. Se non di assoluta necessità, tornano di ornamento alla donna e le servono inoltre di onesto sollievo, come conferiscono alla vigoria del corpo, oltre alla danza, la musica e la pittura. Quest'ultima poi le potrà offrire modo di esercitare la sua immaginazione (*Del maritaggio*, l. c.).

Trascorsi i sette anni, il fanciullo vuole essere mandato alle scuole. Benchè il pubblico insegnamento abbia sul privato

il vantaggio dell'emulazione e dell'affratellamento degli alunni, i quali conversando si comunicano le idee, se le rischiarano e fecondano a vicenda; del guidare, quand'uno erra, gli altri a scoprire la verità e finalmente dell'essere meno gravoso e più ameno, vuol tuttavia l'A., che l'istruzione privata si associ colla pubblica, facendo in guisa che gli insegnamenti del maestro siano in famiglia sviluppati da un istitutore o dal padre stesso, a cui l'ammaestramento de' figli dovrebbe tornare d'indicibile giocondità. Lasciando intatto l'ordinamento scolastico vigente ai suoi tempi, il Martini si sofferma intorno alle private lezioni, che in suo avviso, voglionsi aggiungere alle pubbliche. Egli quindi riduce le materie scolastiche, a cui devono applicarsi i giovanetti, alle seguenti: Lingue, letteratura, scienze naturali e quelle pertinenti al domestico e civile culto. Or bene quando il fanciullo imprende a frequentare le pubbliche scuole, il primo studio, che deve percorrere sotto la disciplina del suo istitutore, riguarda la conoscenza delle parti variabili ed invariabili dell'umano discorso. Farà quindi passo allo studio della lingua nazionale (1), proseguendola ancora nel nono anno, in cui si potrà iniziare il latino, mentre nel decimo all'uno ed all'altro idioma, converrà aggiungere i primi elementi del greco, necessari ad intendere il significato e l'etimologia di moltissimi vocaboli, specie latini. Il biennio successivo sia impiegato nello studio delle tre lingue suddette, e della francese. Nel decorso poi di tutto il quinquennio si coltivi lo studio dell'aritmetica e della geometria elementare. I tre anni consecutivi siano consacrati alla letteratura; ossia nel 13° il giovanetto dia opera al genere storico e didascalico: nel 14° alla poesia e nel 15° all'arte poetica. Ma a misura che più oltre si progredisce, conviene continuare sempre negli studi precedenti. Così attendendo alla poesia, richiamisi a memoria quanto s'è imparato di storia, pertinente ai poemi che leggonsi: ed applicando gli allievi all'arte oratoria, si rinnovino le nozioni istoriche e le immagini poetiche. Il Martini fa precedere come più facile la poetica all'oratoria.

---

(1) Il Martini in questo luogo loda l'aurea operetta del Napione: *Dell'uso e dei pregi della lingua toscana*, perchè combatte vittoriosamente il pregiudizio comune a molti, che si dovesse insegnare prima e quasi esclusivamente la lingua del Lazio.

Per avanzare nella letteratura giovano i precetti, l'esempio e sopra tutto l'esercizio dello scrivere e del ragionare. I precetti si attingono dagli autori e dai maestri: ma associati insieme recano maggiore ubertà di frutto. L'allievo infatti ascolta gli ammaestramenti degli insegnanti: li medita, se li appropria, li feconda: ma leggendo materie a' medesimi pertinenti, li rinnova e stampa più profondi nella mente. Come le forze del corpo crescono per l'esercizio, così pure le facoltà spirituali si fanno più agili e ordinate mediante atti ripetuti. Or bene tre sono i modi d'esercitarsi: lo scrivere, il favellare e l'insegnare. Quanto al progresso nelle lettere, conferiscano l'imitazione dei migliori esemplari, l'esercizio del comporre ed il vicendevole conversare tra i condiscepoli, non è necessario punto dimostrare. Il Martini chiarisce come il farsi precettore altrui delle cose da noi apprese, serve a meglio imprimercele in mente.

Mentre si dà opera alle lettere, occorre continuare lo studio della geometria, essendo le matematiche il principale mezzo per informare la mente alla ricerca del vero, e della geografia, la quale, poichè i primi elementi si sono appresi in età più tenera, si potrà in quest'ultimo triennio studiare con maggiore profondità. Inoltre si coltivino le lingue viventi ed in modo peculiare la francese. Suppone il Martini, che dopo il decimo terzo anno, compiuto nelle pubbliche scuole, l'alunno sia ammesso alla scuola di filosofia, che comprendeva la geometria, dal giovanetto già studiata nei primi anni, la logica, la metafisica, la fisica, la chimica, la storia naturale e l'etica. Terminati questi studi si farà grado alle discipline che debbono procurare allo studioso un titolo nella società: ed alle quali è sopra tutto necessario che sentasi chiamato da natura. Abbia egli quindi la più larga e la più illuminata libertà di scelta.

È inutile avvertire, che il piano proposto dal Nostro, può al più convenire ai figli di famiglie molto doviziose, sebbene dichiari che anche quanti vivono in umile stato vanno istruiti nel leggere, nello scrivere, nelle prime operazioni dell'aritmetica, negli elementi della storia sacra e possibilmente, anche della storia patria. Un altro difetto è quello di supporre l'intelligenza infantile capace d'ammaestramento a 4 anni, mentre questo non dovrebbe esordire giammai prima del sesto anno d'età. Come insegnar poi alla grande maggioranza de' fanciulli, il latino a

nove anni ed il greco a dieci? Il Martini presuppone un'attività intellettuale molto maggiore di quella ch'è in effetto (1): di qui l'altro errore, che mentre riguardava l'istruzione privata quale necessario compimento delle scuole pubbliche, pretende che i giovani apprendano in famiglia certe discipline, le quali non facevano parte dell'ordinamento scolastico del tempo. Meglio avrebbe di certo provveduto, proponendo un nuovo e razionale programma di studi senza preoccuparsi d'altro. Non gli mancavano certo nè l'ingegno nè la competenza. Ma un professore governativo, dopo la reazione del 1815 e specialmente dopo i fatti del '21, avrebbe potuto farlo, senza incorrere in qualche sospetto? “ Io non debbo costituirmi censore „, scriveva (*Dell'educazione*, n° 39).

Educazione morale. — La coltura della moralità deve starci meglio a cuore d'ogni altra cosa: perchè egli è certo, che un pessimo cittadino tanto più nuocerà, quanto maggiore vigore di corpo e d'ingegno avrà a sua disposizione. Ora siccome la virtù costituisce il sostegno d'ogni reggimento delle nazioni, l'infanzia sia particolarmente commessa alle cure materne, ma la fanciullezza a quelle del padre: mentre all'educazione giovanile concorreranno coi genitori ed in parte considerevole i maestri e gli istitutori.

Ma i giovani debbonsi educare in collegio od in casa? Hanno da frequentare le pubbliche scuole e starsene sotto il tetto famigliare, ovvero devono ricercare in collegio ogni ragione di educazione? A sì fatte inchieste risponde l'A., che i collegi sono utili ed in molti casi necessari, ma che qualora i figliuoli potessero avere tutta l'educazione in famiglia, questo sarebbe il miglior partito: Che quando i giovanetti sono pervenuti alle classi superiori, le quali non hanno luogo nei paesi da loro abitati, si mettano in qualche istituto: ma diversamente, frequentino le scuole pubbliche e vivano in seno dei parenti, che ne invigileranno attentamente la condotta.

Educazione infantile. — La madre e la nutrice si astengano da tutto quello che possa negli animi teneri inspirare ira, in-

(1) L'A. afferma (*Dell'educ.*, n. 52) che se non è vivace l'ingegno dell'alunno, si prolunghi ciascun corso, o si elimini affatto la lingua greca: e se mancano i necessari mezzi di fortuna, si sottraggano le discipline che paiono meno necessarie.

vidia od altra mala affezione. E siccome giunti al quinto anno d'età i bambini sono capaci di qualche raziocinio, conviene esplorarne le inclinazioni incipienti, e sopra tutto procurare che non siano menzogneri, doppî, invidiosi, crudeli. Appena poi incomincino a leggere ed a scrivere, s'ammaestrino nei principii della religione, e s'inculchi in loro quanto appartiene al bene operare. Il sesto ed il settimo anno siano impiegati a questo scopo. Nel triennio successivo, ai libri di religione, si aggiungano i profani, che tendano ad informare i costumi a virtù. All'uopo giovano assai le favole, che sotto il velame allegorico, contengono delle sublimi verità. E siccome nella puerizia ha molta forza l'emulazione ed il sentimento dell'essere amato dai parenti e dai precettori, si faccia uso di queste molle del cuore umano così potenti. Per quanto torna possibile, si allettino e non si costringano: si premiino e non si puniscano. Quando non basta la dolcezza, si ricorra ad una prudente e moderata severità. Un freddo contegno spesso è un grande castigo. Si bandiscano però in modo assoluto le percosse, le quali anzichè correggere, sogliono irritare i fanciulli.

In mente del Martini, è bene avvezzare i bambini ad agire spontaneamente, pure non abbandonandoli a se medesimi. Proposta loro una regola si faccia vedere come sia bello l'osservarla senza lasciarsi muovere dalla speranza del premio o dal timore del castigo. Perchè chi fosse indotto ad operare solo dal primo, cessando esso, s'intiepidirebbe nell'adempimento de' suoi doveri: mentre chi è guidato unicamente dal timore delle punizioni, qualora possa sfuggire alla vigilanza paterna o dei maestri, si abbandona al male. Se però l'A. condanna la severità, combatte del pari la soverchia confidenza tra i genitori ed i figliuoli, giacchè i parenti ed i precettori devono mostrare di amarli, senza che si abbassino giammai di troppo e si accomunino con loro. I fanciulli amino e temano ad un tempo: ma il loro timore non sia servile, bensì frutto di riverenza.

Dal decimo al tredicesimo anno. — Quando gli alunni abbiano raggiuto il decimo anno, gl'insegnamenti morali saranno più frequenti ed impartiti con garbo, perchè non tornino molesti ad una età ch'è pure così irrequieta. Conferisce allo scopo la vita degli uomini illustri e virtuosi; poichè la storia oltre all'accoppiare coll'utile il diletto, appaga la nostra curiosità.

Quando poi si presenta la virtù trionfante ed il vizio vinto ed avvilito, allora i giovani fatti già vigorosi e costanti nell'esercizio del bene, non si lasciano più sedurre dalle lusinghevoli apparenze del piacere, ed il compimento del dovere diventa in noi un'assoluta necessità. Si tengano lontani dal consorzio di coloro, i quali diano malo sentore di sè; nulla corrompe di più i giovanetti delle cattive amicizie. I parenti e gli istitutori diano sempre lodevole esempio: nè li lascino giammai oziosi. L'esercizio della danza, del cavalcare, la musica e la pittura, oltre al corroborare il corpo ed a sollevare l'animo dagli studi affaticato, distolgono eziandio la mente da quanto potrebbe nuocere ai costumi. Volendosi condurli al teatro, si scelgano quelle rappresentazioni, le quali non possano anche leggermente annebbiare la purezza della virtù.

Giunto al terzodecimo anno, il giovanetto può godere di maggiore libertà, benchè tanto ai parenti quanto all'istitutore, convenga sorvegliarlo da lungi. Il Martini lascia ai genitori di decidere se occorra affidare ai figli una data somma di denaro, perchè si preparino gradatamente all'amministrazione dei proprî beni. Affinchè poi il giovanetto si mantenga immune dalla concupiscenza, ch'è peste mortale de' costumi, è d'uopo applicarlo seriamente alle suaccennate discipline ed agli esercizi fisici. Sia pure addottrinato nella cognizione del cuore umano: e tanto il padre quanto l'istitutore gli dimostrino maggiore dimestichezza, ma questa non sia giammai disgiunta da certa gravità.

Se compiuta la carriera accademica, il giovane fosse già maturo, converrebbe provvedere ad un onesto collocamento, tema che il Martini tratta di proposito nell'opuscolo: *Del maritaggio*, sopracitato: e del quale, poichè esula dal campo pedagogico per entrare in quello della morale, non ci occupiamo.

***

Gli *Emilii*, hanno tutti un'intonazione pedagogica, ma quelli dei quali ci siamo più particolarmente trattenuti, intendono in maniera diretta alle singole parti dell'educazione, di cui discorre, seguendo pur egli il metodo evolutivo o storico, come adoperarono la maggior parte de' nostri pedagogisti.

Anche esso nella ginnastica e nell'igiene ripone i due mezzi

più efficaci e diretti dell'educazione fisica: alla quale giustamente, a suo avviso, conferiscono la bontà del costume ed il vivo sentimento religioso, che raffrena le passioni, peste dell'anima e della sanità. Indurare il corpo, renderlo atto a sopportare le fatiche, i travagli e le intemperie: farne insomma uno strumento docile dello spirito, ecco la ragione della fisica coltura. Ma tanto le cure igieniche quanto gli esercizi devono accomodarsi convenevolmente alle condizioni, all'età, alle forze dell'alunno. Pel Nostro, l'educazione fisica, atteso i vicendevoli rapporti tra l'organismo e lo spirito, doveva essere mezzo e preparazione ad una saggia coltura morale. Chè gli esercizi nell'atto che sollevano la mente, distolgono l'allievo da tutto ciò che può nuocere ai costumi. Però la vita laboriosa vuolsi alternata col riposo, alla stessa guisa che gli studi difficili e severi si devono avvicendare con quelli più facili e dilettevoli. Nè al Martini sfuggì l'importanza pedagogica del lavoro manuale.

Tanto nella coltura della mente quanto in quella del cuore, l'A., guida l'alunno collo stesso metodo, ossia dalla prima apparizione della ragione successivamente al compiuto svolgimento di tutte le facoltà intellettuali, mediante un graduale e progressivo programma di studi. Il quale, quantunque gli si possa muovere l'appunto di fare troppo a fidanza coll'ingegno del fanciullo, non è certo privo di meriti. Egli infatti non solo distingue gli studi letterari dagli scientifici, ma li vuole uniti, perchè s'illustrino e fecondino a vicenda. Mentre invero, a' suoi tempi l'insegnamento secondario, detto della grammatica e della rettorica, escludeva affatto il greco e le discipline scientifiche, le quali avevano luogo soltanto, ed in scarsa misura, nel corso di filosofia, esigeva il Martini che la storia, la geografia, la lingua greca e la francese, l'aritmetica e la geometria s'insegnassero anche agli allievi delle scuole secondarie inferiori. Il suo progetto quindi segna un progresso notevole nell'ordinamento scolastico.

Finalmente, rispetto alla coltura morale, i precetti e le considerazioni così frequenti nel suo opuscolo, se ci si presentino piuttosto quale frutto del buon senso, che della meditazione filosofica, sono però logicamente e gradatamente disposti.

Relazione sulla Memoria del Prof. Giuseppe Prato: *L'evoluzione agricola nel secolo XVIII e le cause economiche dei moti del 1792-98 in Piemonte.*

Illustri Colleghi,

Della memoria, sulla quale voi ci deste l'onorifico incarico di riferire alla Classe, ecco in breve il contenuto.

Il Prato vi studia i documenti di un'inchiesta ufficiale ordinata nel novembre del 1792 dal Governo piemontese per indagare le tendenze dello spirito pubblico alla vigilia della guerra colla Francia e per veder chiaro nelle cause del malcontento che in più luoghi ed in varia forma si veniva manifestando. Occasione all'inchiesta fu una curiosa lettera anonima diretta al Re dai contadini di parecchi paesi, per lagnarsi del grande peggioramento che era derivato alle loro sorti dalla sostituzione dell'affittanza alla mezzadria, e per invocare provvedimenti proibitivi degli affittamenti. E le risposte degli intendenti alle richieste di informazioni tosto spedite dalla Segreteria di Stato porgono, nel complesso, un quadro assai preciso delle condizioni economiche e sociali delle campagne piemontesi negli anni che precedettero l'invasione.

Esposte ed analizzate tali relazioni, il Prato prende a studiare le proposte diverse di provvedimenti formulate dai vari funzionari per far cessare uno stato di cose che tutti ammettevano esser assai pericoloso, e riassume quindi i modi e le vicende dei decreti con cui si volle promuovere un forzato ritorno all'antico: tassa sugli affittamenti, e divieto delle locazioni oltre un certo limite di estensione e di prezzo.

Il paragrafo seguente è dedicato all'esposizione della controversia teorica che si agitò in Piemonte, verso quegli anni, tra i fautori della grande coltura e dei contratti di affittanza e i difensori del frazionamento delle terre e della mezzadria: tema che diede luogo alle più aspre polemiche tra i nostri scrittori di cose agrarie ed alcuni scienziati stranieri, fra i quali precipuo A. Young.

Valendosi poi delle statistiche demografiche ed economiche di quel tempo, il Prato tenta di stabilire se fossero giustificati,

e fino a qual segno, i lamenti dei nostri scrittori, che, facendosi eco dell'opinione prevalente fra i contadini, accusavano i nuovi sistemi di coltura di aver spopolate le campagne e rovinata l'agricoltura nazionale.

Il fenomeno del resto non era limitato al Piemonte, ma si manifestava con caratteri somiglianti in tutta Europa, come risulta dall'esame che fa il Prato delle condizioni agricole e delle teorie e controversie scientifiche che si riscontrano, nella seconda metà del secolo XVIII, in Inghilterra, in Francia, in Germania, in Lombardia e in parecchi altri Stati italiani.

Gli ultimi paragrafi pongono in luce le cause economiche, generali e locali, per cui la metamorfosi nelle colture doveva fatalmente risolversi, almeno temporaneamente, in un grave danno per la classe contadina, ed illustrano il carattere vero delle sommosse di affamati che accompagnarono ed affrettarono la fine dell'antico regime anche tra noi.

Questo studio del Prato fa dunque parte di quella ormai ricca collana di ricerche dedicate alla storia economica e finanziaria dell'antica Monarchia piemontese, nella quale egli ed il Prof. Einaudi, che fu in tale nobile intrapresa suo valoroso collaboratore, hanno acquistato una competenza, che non ha certamente oggidì quella che l'agguagli, ed una benemerenza, che nessuno certo oserebbe di contrastare loro. E già l'Accademia nostra, allorchè i principali scritti di questa collana le furono offerti, ebbe a dimostrare il suo pieno gradimento per questo genere di studi, e con la sua sopra ogni altra autorevole approvazione a sempre più incuorare i loro autori in proseguirli. Importanza somma, specie per la Regione nostra, della materia trattata, novità ma insieme rigore inaccepibile di metodo, novità ma insieme fermezza grande di risultati, segnalano pure questo nuovo studio del Prato.

Per tutto questo noi crediamo dovere nostro di proporre che la Memoria del Prof. Giuseppe Prato sia dalla Classe ammessa alla lettura.

Torino, 18 aprile 1909.

Antonio Manno,
Francesco Ruffini, *relatore*.

L'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 25 Aprile 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: NACCARI, direttore della Classe, SALVADORI, SPEZIA, SEGRE, PEANO, FOÀ, FILETI, PARONA, FUSARI, GRASSI e CAMERANO, Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Scusano la loro assenza i Soci GUARESCHI, SOMIGLIANA, GUIDI e MATTIROLO.

Il Presidente rivolge, a nome della Classe, parole di viva congratulazione al Socio CAMERANO per la sua nomina a Senatore. Il Socio CAMERANO ringrazia.

Il Presidente comunica una lettera del Socio GUARESCHI il quale ringrazia delle condoglianze che la Classe gli ha inviato per il grave lutto domestico che l'ha colpito.

Il Presidente presenta in omaggio alla Classe la pubblicazione: *In memoria di Maria Guareschi in Garelli nel XXX giorno dalla sua morte.*

Vengono presentate per la stampa negli *Atti* le note seguenti:

1° *Fenomeno fotoelettrico osservato in liquidi dielettrici,* nota del Socio NACCARI;

2° Dott. Gustavo SANNIA: *Nuove fórmole utili per lo studio delle congruenze rettilinee*, dal Socio D'OVIDIO;

3° Giuseppe ALBENGA: *Sul calcolo analitico degli archi elastici*, dal Socio GUIDI.

Il Socio FUSARI, a nome anche del Socio CAMERANO, legge la relazione sulla Memoria del Dott. A. BOVERO, col titolo: *Annotazioni sull'anatomia del palato duro: ossificazioni autonome e suture accessorie dei processi dei palatini dei mascellari - partecipazione del vomere alla costituzione del palato nei Mammiferi; forami e canali vascolari anomali nella volta palatina.*

La relazione favorevole è approvata unanimemente dalla Classe e pure all'unanimità con votazione segreta si approva la stampa del lavoro del Dott. BOVERO nei volumi accademici.

Raccoltasi quindi la Classe in seduta privata procede alla elezione di un Socio delegato della Classe presso il Consiglio di Amministrazione dell'Accademia. Riesce eletto il Socio SALVADORI. Procede pure alla nomina di un Socio della Giunta di vigilanza per la biblioteca accademica. Riesce eletto il Socio MATTIROLO.

LETTURE

Nuove formole utili per lo studio delle congruenze rettilinee.

Nota di GUSTAVO SANNIA.

1. — Nella memoria *Nuova esposizione della geometria infinitesimale delle congruenze rettilinee* (*) dimostrai che una congruenza di raggi può ritenersi individuata da una coppia di forme differenziali quadratiche simultanee

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} ds'^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \\ -\mu = Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2\,, \end{cases}$$

i cui coefficienti sieno legati dall'unica relazione

$$\text{(II)}\qquad \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{b_{221}}{\Delta} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{b_{112}}{\Delta}\right) = H,$$

ove

$$\text{(1)}\qquad H = \frac{2FD' - ED'' - GD}{EG - F^2}\,,$$

$$\Delta = \left|\sqrt{EG - F^2}\right| > 0,$$

$$\text{(2)}\qquad \begin{cases} b_{112} = \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{D}{\Delta} - \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{D'}{\Delta} + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\dfrac{D}{\Delta} - 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\dfrac{D'}{\Delta} + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\dfrac{D''}{\Delta}\,, \\ b_{221} = \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{D''}{\Delta} - \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{D'}{\Delta} + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\dfrac{D}{\Delta} - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\dfrac{D'}{\Delta} + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\dfrac{D''}{\Delta} \text{ (**)}. \end{cases}$$

I due membri della (II) sono invarianti simultanei delle due forme (I), ed ogni classe particolare di congruenze è caratterizzata da una o più relazioni invariantive tra i coefficienti delle (I).

(*) " Annali di Matematica ", Tomo X della Serie III, pag. 95 e seguenti.

(**) Per i valori dei simboli $\begin{Bmatrix}rs\\t\end{Bmatrix}$, di Christoffel, formati con i coefficienti della prima forma (I), vedi Bianchi, *Lezioni di Geometria Differenziale*, vol. I, § 43.

Le (I) hanno un significato geometrico semplice: detti X, Y, Z i coseni direttori di un raggio $r(u, v)$ della congruenza, si ha

$$ds'^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2,$$

sicchè ds' *è l'arco elementare dell'immagine sferica della congruenza*, descritta dal punto di coordinate X, Y, Z sulla sfera che ha per centro l'origine delle coordinate e raggio 1; μ è poi il *momento* dei due raggi infinitamente vicini r, $r'(u + du, v + dv)$.

Per costruire effettivamente la congruenza, basta conoscere i coseni direttori X, Y, Z di ciascun raggio r ed il suo *punto medio*, le cui coordinate x, y, z si ottengono con quadrature dalle formole

$$\text{(III)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{D'}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial u} - \frac{D}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{b_{112}}{\Delta} X, \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{D''}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial u} - \frac{D'}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial v} - \frac{b_{221}}{\Delta} X \end{aligned} \right.$$

e dalle analoghe in y, Y e in z, Z.

2. — Richiamati questi risultati, osservo che il raggio r può ritenersi individuato, anzichè da X, Y, Z, x, y, z, dalle sei coordinate *(radiali)*: X, Y, Z ed

$$(4) \qquad l = \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix}, \quad m = \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix},$$

legate dalla relazione

$$lX + mY + nZ = 0.$$

Note queste sei coordinate in funzione di due parametri u, v, i coefficienti delle due forme fondamentali (I) si calcolano facilmente. Infatti la (3) dà immediatamente

$$E = \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2, \quad F = \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v}, \quad G = \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right)^2.$$

Per calcolare i coefficienti D, D', D'' della seconda forma,

ricordiamo che il momento di due rette $r(X, Y, Z, l, m, n)$, $r'(X', Y', Z', l', m', n')$ è espresso dalla formola (*)

$$\text{mom}\, rr' = \frac{Xl' + Ym' + Zn' + X'l + Y'm + Z'n}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}}.$$

Nel nostro caso

$$X' = X + dX + \frac{1}{2} d^2X + \ldots, \ldots; \; l' = l + dl + \frac{1}{2} d^2l + \ldots, \ldots;$$

quindi, tenendo presente la relazione $\Sigma lX = 0$ e le altre

$$\Sigma l dX + \Sigma X dl = 0,$$
$$\Sigma l d^2X + \Sigma X d^2l = -2\Sigma dl dX,$$

che ne seguono differenziando, il numeratore si riduce a

$$-\Sigma dl dX + \text{infinitesimi superiori};$$

poi

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \quad X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = 1 + \text{infin.};$$

dunque, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, si ha

$$\mu = \text{mom}\, rr' = -\Sigma dl dX,$$

e però

$$-D = \sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial u}, \; -D' = \sum \frac{\partial X}{\partial u}\cdot\frac{\partial l}{\partial v} + \sum \frac{\partial X}{\partial v}\cdot\frac{\partial l}{\partial u}, \; -D'' = \sum \frac{\partial X}{\partial v}\cdot\frac{\partial l}{\partial v}.$$

Viceversa: se son date le due forme (I), X, Y, Z si calcolano in funzione di u, v mediante l'integrazione di un'equazione del tipo di Riccati (**); per il calcolo di l, m, n darò certi sistemi di equazioni alle derivate parziali seconde, illimitatamente integrabili.

(*) Cfr. p. es. E. D'Ovidio, *Geometria Analitica*, p. 216.

(**) Bianchi, loc. cit., § 72.

3. — Per fare un sol calcolo, conviene cambiare per poco le notazioni, ponendo

$$(5) \qquad \begin{cases} u = x_1, \ v = x_2, \\ E = a_{11}, \ F = a_{12} = a_{21}, \ G = a_{22}, \\ D = b_{11}, \ D' = b_{12} = b_{21}, \ D'' = b_{22}; \end{cases}$$

allora

$$(\mathrm{I}') \qquad \begin{cases} ds'^2 = a_{11} dx_1^2 + 2a_{12} dx_1 dx_2 + a_{22} dx_2^2, \\ -\mu = b_{11} dx_1^2 + 2b_{12} dx_1 dx_2 + b_{22} dx_2^2. \end{cases}$$

Indicando con una lettera uno qualunque dei due indici 1, 2, indicheremo l'altro con la stessa lettera munita di un apice; allora potremo scrivere le (III) in modo più conciso:

$$(\mathrm{III}') \quad \frac{\partial x}{\partial x_r} = -\sum_\lambda (-1)^\lambda \frac{b_{r\lambda'}}{\Delta} \cdot \frac{\partial X}{\partial x_\lambda} - (-1)^r \frac{b_{rr'}}{\Delta} X (\lambda = 1,2, \ r = 1,2).$$

Esse sussistono cambiandovi x e X in y e Y o in z e Z.

In seguito ci occorreranno anche alcune formole della teoria delle superficie applicate alla sfera (*), che, con le nostre notazioni, si scrivono:

$$(6) \qquad \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial x_\lambda} & \frac{\partial Z}{\partial x_\lambda} \\ \frac{\partial Y}{\partial x_r} & \frac{\partial Z}{\partial x_r} \end{vmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda = 0 \\ (-1)^r & \text{se } \lambda = r' \end{cases}$$

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} Y & Z \\ \frac{\partial Y}{\partial x_r} & \frac{\partial Z}{\partial x_r} \end{vmatrix} = \sum_\mu (-1)^\mu \frac{a_{r\mu'}}{\Delta} \cdot \frac{\partial X}{\partial x_\mu},$$

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial x_r \partial x_s} = \sum_\nu \begin{Bmatrix} rs \\ \nu \end{Bmatrix} \frac{\partial X}{\partial x_\nu} - a_{rs} X,$$

con le analoghe che si ottengono permutandovi circolarmente X, Y, Z.

(*) Bianchi, loc. cit., §§ 54, 77, 72 rispettivamente.

Dalla prima delle (4), si ha

$$\frac{\partial l}{\partial x_r} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_r} & \frac{\partial z}{\partial x_r} \\ Y & Z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & z \\ \frac{\partial Y}{\partial x_r} & \frac{\partial Z}{\partial x_r} \end{vmatrix}$$

ossia, per le (III′),

$$\frac{\partial l}{\partial x_r} = \sum_\lambda (-1)^\lambda \frac{b_{r\lambda'}}{\Delta} \begin{vmatrix} Y & Z \\ \frac{\partial Y}{\partial x_\lambda} & \frac{\partial Z}{\partial x_\lambda} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & z \\ \frac{\partial Y}{\partial x_r} & \frac{\partial Z}{\partial x_r} \end{vmatrix}$$

ed infine, per la (7),

$$\frac{\partial l}{\partial x_r} = \sum_{\lambda,\mu} (-1)^{\lambda+\mu} \frac{a_{\lambda\mu'} b_{r\lambda'}}{\Delta^2} \cdot \frac{\partial X}{\partial x_\mu} + \begin{vmatrix} y & z \\ \frac{\partial Y}{\partial x_r} & \frac{\partial Z}{\partial x_r} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Derivando rispetto ad x_s si ha

$$\frac{\partial^2 l}{\partial x_r \partial x_s} = \sum_{\lambda,\mu} (-1)^{\lambda+\mu} \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{a_{\lambda\mu'} b_{r\lambda'}}{\Delta^2}\right) \cdot \frac{\partial X}{\partial x_\mu} + \tag{10}$$

$$+ \sum_{\lambda,\mu} (-1)^{\lambda+\mu} \frac{a_{\lambda\mu'} b_{r\lambda'}}{\Delta^2} \frac{\partial^2 X}{\partial x_\mu \partial x_s} + \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_s} & \frac{\partial x}{\partial x_s} \\ \frac{\partial Y}{\partial x_r} & \frac{\partial Z}{\partial x_r} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & z \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial x_r \partial x_s} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_r \partial x_s} \end{vmatrix}$$

Ora, per le (III′) e poi per le (6) e (7), si ha

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_s} & \frac{\partial z}{\partial x_s} \\ \frac{\partial Y}{\partial x_r} & \frac{\partial Z}{\partial x_r} \end{vmatrix} = -\sum_\lambda (-1)^\lambda \frac{b_{s\lambda'}}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial x_\lambda} & \frac{\partial Z}{\partial x_\lambda} \\ \frac{\partial Y}{\partial x_r} & \frac{\partial Z}{\partial x_r} \end{vmatrix} - (-1)^r \frac{b_{rr'}}{\Delta} \begin{vmatrix} Y & Z \\ \frac{\partial Y}{\partial x_r} & \frac{\partial Z}{\partial x_r} \end{vmatrix}$$

$$= b_{sr} X - (-1)^r \frac{b_{rr'}}{\Delta} \cdot \sum_\mu (-1)^\mu \frac{a_{r\mu}}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial x_\mu};$$

inoltre, per le (8) e poi per le (4) e (9), si ha

$$\begin{vmatrix} y & z \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial x_r \partial x_s} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_r \partial x_s} \end{vmatrix} = \sum_\nu \begin{Bmatrix} rs \\ \nu \end{Bmatrix} \begin{vmatrix} y & z \\ \frac{\partial Y}{\partial x_\nu} & \frac{\partial Z}{\partial x_\nu} \end{vmatrix} - a_{rs} \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_\nu \begin{Bmatrix} rs \\ \nu \end{Bmatrix} \frac{\partial l}{\partial x_\nu} - \sum_{\lambda,\mu,\nu} (-1)^{\lambda+\mu} \begin{Bmatrix} rs \\ \nu \end{Bmatrix} \frac{a_{\lambda\mu'} b_{\nu\lambda'}}{\Delta^2} \cdot \frac{\partial X}{\partial x_\mu} - a_{rs} l.$$

Dunque, sostituendo in (10) questi valori ed il valore di $\frac{\partial^2 X}{\partial x_\mu \partial x_s}$ tratto dalla (8), si ha

$$\frac{\partial^2 l}{\partial x_r \partial x_s} = \sum_\nu \left\{ \begin{matrix} rs \\ \nu \end{matrix} \right\} \frac{\partial l}{\partial x_\nu} - a_{rs} l + \left[b_{rs} - \sum_{\lambda,\mu} (-1)^{\lambda+\mu} \frac{a_{\lambda\mu'} a_{\mu s'}}{\Delta^2} \, . \, b_{r\lambda} \right] X +$$
$$+ \sum_\mu A_{rs\mu} \frac{\partial X}{\partial x_\mu} ,$$

dove si è posto per brevità

$$(11) \qquad A_{rs\mu} = \sum_\lambda (-1)^\lambda \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\frac{a_{\lambda\mu'} b_{r\lambda'}}{\Delta^2} \right) - (-1)^{r+\mu} \frac{a_{r\mu'} b_{rrr'}}{\Delta^2} +$$
$$+ \left\{ \begin{matrix} rs \\ \mu \end{matrix} \right\} \sum_{\lambda,\nu} (-1)^{\lambda+\nu} \frac{a_{\lambda\nu'} b_{r\lambda'}}{\Delta^2} - (-1)^\mu \sum_{\lambda,\nu} (-1)^\lambda \left\{ \begin{matrix} rs \\ \nu \end{matrix} \right\} \frac{a_{\lambda\mu'} b_{r\lambda'}}{\Delta^2} .$$

Ma, essendo

$$\sum_\mu (-1)^\mu a_{\lambda\mu'} a_{\mu s} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \lambda = s \\ (-1)^s \Delta^2 & \text{se} \quad \lambda = s', \end{cases}$$

il coefficiente di X diventa

$$b_{rs} - \frac{1}{\Delta^2} \sum_\lambda (-1)^\lambda b_{r\lambda'} \sum_\mu (-1)^\mu a_{\lambda\mu'} a_{\mu s} = b_{rs} - (-1)^{s'} . (-1)^s b_{rs} = 2 b_{rs} ,$$

quindi

$$(\mathrm{IV}') \quad \frac{\partial^2 l}{\partial x_r \partial x_s} = \sum_\mu \left\{ \begin{matrix} rs \\ \mu \end{matrix} \right\} \frac{\partial l}{\partial x_\mu} - a_{rs} l + 2 b_{rs} X + \sum_\mu A_{rs\mu} \frac{\partial X}{\partial x_\mu} \; (r, s = 1, 2).$$

Son queste le formole che volevamo stabilire, e che valgono anche per m, Y e per n, Z.

Se ritorniamo alle primitive notazioni, mediante le (5), e diamo ad r, s i valori 1, 1 o 1, 2 o 2, 2, otteniamo le formole definitive:

$$(\mathrm{IV}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 l}{\partial u^2} = \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial l}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial l}{\partial v} - El + 2DX + A_{111} \dfrac{\partial X}{\partial u} + A_{112} \dfrac{\partial X}{\partial v} , \\ \dfrac{\partial^2 l}{\partial u \partial v} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial l}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial l}{\partial v} - Fl + 2D'X + A_{121} \dfrac{\partial X}{\partial u} + A_{122} \dfrac{\partial X}{\partial v} , \\ \dfrac{\partial^2 l}{\partial v^2} = \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial l}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial l}{\partial v} - Gl + 2D''X + A_{221} \dfrac{\partial X}{\partial u} + A_{222} \dfrac{\partial X}{\partial v} , \end{cases}$$

le quali valgono anche per m, Y ed n, Z.

Pel modo come le abbiamo dedotte, è chiaro che esse costituiscono un sistema illimitatamente integrabile.

I simboli a tre indici $A_{rs\mu}$ sono funzioni note dei coefficienti delle (I) e delle loro derivate parziali prime. Sono in numero di 6 indipendenti, perchè

$$A_{rs\mu}=A_{sr\mu},$$

non dovendo alterarsi la (IV′) per lo scambio di r con s. I loro valori espliciti nelle primitive notazioni sono i seguenti:

$$A_{111}=\frac{\partial}{\partial u}\frac{FD'-GD}{\Delta^2}-\frac{F}{\Delta^2}b_{112}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{ED'-FD}{\Delta^2}-\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{FD''-GD'}{\Delta^2},$$

$$A_{112}=\frac{\partial}{\partial u}\frac{FD-ED'}{\Delta^2}+\frac{E}{\Delta^2}b_{112}+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{ED''-GD}{\Delta^2}+\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right)\frac{ED'-FD}{\Delta^2},$$

$$A_{121}=\frac{\partial}{\partial v}\frac{FD'-GD}{\Delta^2}+\frac{F}{\Delta^2}b_{221}+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{FD-ED''}{\Delta^2}-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{FD''-GD'}{\Delta^2}$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}\frac{FD''-GD'}{\Delta^2}-\frac{G}{\Delta^2}b_{112}+\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{GD-ED''}{\Delta^2}+\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right)\frac{FD''-GD'}{\Delta^2},$$

$$A_{122}=\frac{\partial}{\partial v}\frac{FD-ED'}{\Delta^2}-\frac{E}{\Delta^2}b_{221}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{ED''-GD}{\Delta^2}+\left(\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right)\frac{FD-ED'}{\Delta^2}$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}\frac{FD'-ED''}{\Delta^2}+\frac{F}{\Delta^2}b_{112}+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{FD''-GD'}{\Delta^2}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{FD-ED'}{\Delta^2},$$

$$A_{221}=\frac{\partial}{\partial v}\frac{FD''-GD'}{\Delta^2}+\frac{G}{\Delta^2}b_{221}-\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{ED''-GD}{\Delta^2}+\left(\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\right)\frac{FD''-GD'}{\Delta^2},$$

$$A_{222}=\frac{\partial}{\partial v}\frac{ED''-FD'}{\Delta^2}-\frac{F}{\Delta^2}b_{221}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{FD''-GD'}{\Delta^3}+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{ED'-FD}{\Delta^2}.$$

4. — Sono facili a verificare le relazioni seguenti:

$$A_{111}+A_{122}=\frac{\partial H}{\partial u},\quad A_{121}+A_{222}=\frac{\partial H}{\partial v},\tag{12}$$

$$\begin{cases}EA_{121}+F(A_{122}-A_{111})-GA_{112}+2b_{112}=0,\\ GA_{212}+F(A_{211}-A_{222})-EA_{222}+2b_{221}=0.\end{cases}\tag{13}$$

Per le (12), le (13) si possono anche scrivere:

$$
(14)\quad \begin{cases} GA_{111} + EA_{221} - 2FA_{121} = G\dfrac{\partial H}{\partial u} - F\dfrac{\partial H}{\partial v} + 2b_{221}, \\ EA_{222} + GA_{112} - 2FA_{122} = E\dfrac{\partial H}{\partial u} - F\dfrac{\partial H}{\partial v} + 2b_{112}. \end{cases}
$$

Sostituendo in (II) i valori di b_{112}, b_{221} tratti da queste formole e tenendo presente che (*)

$$
\frac{1}{\Delta}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\dfrac{\partial H}{\partial u} - F\dfrac{\partial H}{\partial v}}{\Delta}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\dfrac{\partial H}{\partial v} - F\dfrac{\partial H}{\partial u}}{\Delta}\right)\right\} = \Delta_2 H
$$

è il parametro differenziale secondo di H costruito rispetto alla prima forma (I), la relazione fondamentale (II) assume la forma

$$
(II')\qquad \Delta_2 H + 2H =
$$

$$
= \frac{1}{\Delta}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{GA_{111} + EA_{221} - 2FA_{121}}{\Delta}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{EA_{222} + GA_{112} - 2FA_{122}}{\Delta}\right)\right\}.
$$

Da essa risulta che il secondo membro è un invariante differenziale simultaneo delle due forme (I) (tale essendo il primo).

Quale ne è il significato geometrico?

Consideriamo la doppia infinità di piani aventi per equazione

$$
Xx + Yy + Zz = H,
$$

ove x, y, z sono le coordinate correnti, ossia *i piani normali ai raggi della congruenza e distanti per* H *dall'origine* 0; e consideriamo *la superficie* S *inviluppo di questi piani.* Per S la prima forma (I) è la terza forma fondamentale ossia rappresenta il quadrato dell'elemento lineare della sua immagine sferica (di Gauss); quindi la somma dei raggi principali di curvatura r_1, r_2 di S è (**)

$$
r_1 + r_2 = \Delta_2 H + 2H.
$$

(*) Bianchi, loc. cit., § 43.
(**) Bianchi, loc. cit., § 81.

Dunque: *il secondo membro della* (II′) *rappresenta la somma dei raggi principali di curvatura di* S.

Sol quando esso è zero, la superficie S è ad area minima. Ciò accade, per esempio, nelle congruenze *isotrope*, nelle quali è $\Delta_2 H + 2H = 0$, e nelle congruenze *normali*, nelle quali è $H = 0$, ed S si riduce a un punto (*).

5. — Introducendo *le derivate seconde covarianti* di l (Ricci) rispetto alla prima forma (I)

$$l_{rs} = \frac{\partial^2 l}{\partial x_r \partial x_s} - \sum_\mu \left\{ \begin{matrix} rs \\ \mu \end{matrix} \right\} \frac{\partial l}{\partial x_\mu},$$

la (IV′) diventa

$$l_{rs} + a_{rs} l = 2b_{rs} X + \sum_\mu A_{rs\mu} \frac{\partial X}{\partial x_\mu}$$

e le (IV) diventano

$$(15) \quad \begin{cases} l_{11} + El = 2DX + A_{111} \dfrac{\partial X}{\partial u} + A_{112} \dfrac{\partial X}{\partial v}, \\[2ex] l_{12} + Fl = 2D'X + A_{121} \dfrac{\partial X}{\partial u} + A_{122} \dfrac{\partial X}{\partial v}, \\[2ex] l_{22} + Gl = 2D''X + A_{221} \dfrac{\partial X}{\partial u} + A_{222} \dfrac{\partial X}{\partial v}. \end{cases}$$

Il parametro differenziale secondo di l, costruito rispetto alla prima forma (I) è (**)

$$\Delta_2 l = \frac{Gl_{11} + El_{22} - 2Fl_{12}}{\Delta^2},$$

quindi, per le precedenti e per le (14), si ha la relazione

$$(16) \quad \Delta_2 l + 2l = -2HX + \frac{1}{\Delta}\left(G \frac{\partial H}{\partial u} - F \frac{\partial H}{\partial v} + 2b_{221}\right) \frac{\partial X}{\partial u} + \\ + \frac{1}{\Delta}\left(E \frac{\partial H}{\partial v} - F \frac{\partial H}{\partial u} + 2b_{112}\right) \frac{\partial X}{\partial v}$$

che vale anche per m, Y ed n, Z.

(*) Cfr. la memoria citata, §§ 26 e 27.

(**) Bianchi, loc. cit., p. 146.

Ne segue la relazione

$$-2H = X\Delta_2 l + Y\Delta_2 m + Z\Delta_2 n.$$

6. — La congruenza è costituita dalle normali ad una superficie ad area minima solo quando è (*)

$$H = 0,\ b_{112} = 0,\ b_{221} = 0. \tag{17}$$

Allora, per la (16) e per le analoghe in m ed n, si ha

$$\Delta_2 l + 2l = 0,\ \Delta_2 m + 2m = 0,\ \Delta_2 n + 2n = 0.$$

Viceversa, se queste equazioni sono soddisfatte, essendo

$$\begin{vmatrix} X & \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \\ Y & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} \\ Z & \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix} = \sqrt{EG - F^2} \neq 0 \tag{18}$$

per ipotesi, la (16) e le analoghe in m ed n dànno le (17).

Dunque: *nelle congruenze costituite dalle normali ad una superficie ad area minima, ed in queste soltanto,* l, m, n *sono tre soluzioni dell'equazione di Laplace*

$$\Delta_2 \varphi + 2\varphi = 0.$$

Si noti che alla stessa equazione soddisfanno anche X, Y, Z ed *in ogni congruenza.* Ciò risulta dalle (8), che si possono scrivere

$$X_{rs} = -a_{rs} X,$$

e dànno

$$\Delta_2 X = \frac{GX_{11} + EX_{22} - 2FX_{12}}{\Delta^2} = -2X, \ldots$$

(*) Cfr. la memoria citata, § 28.

7. — Le coordinate l, m, n non si alterano, se nelle loro espressioni (4) sostituiamo alle coordinate x, y, z del punto medio quelle di un altro punto qualunque del raggio r; dunque, introducendole al posto di x, y, z, si fa lo studio della congruenza indipendentemente dalla considerazione della superficie media o di qualunque altra superficie di partenza.

Si noti l'analogia di alcune formole precedenti con altre formole relative alla superficie, qualora si interpretino l, m, n, come coordinate di un punto della superficie ed X, Y, Z come coseni direttori della normale. In particolare, la (16) ha qualche analogia con una importante formola di Beltrami (*).

8. — Le (IV) permettono di risolvere rapidamente una quistione interessante: cercare la condizione necessaria e sufficiente affinchè le (I) individuino una congruenza W, ossia *caratterizzare le congruenze* W (**), Chi tentasse la ricerca usando le (III) si imbatterebbe in calcoli, se non impraticabili, estremamente laboriosi.

Invocheremo il bel teorema di Darboux (***): “ affinchè una retta descriva una congruenza W, ossia una congruenza sulle cui falde focali si corrispondano le asintotiche, occorre e basta che le sue coordinate sieno soluzioni di una medesima equazione alle derivate parziali del secondo ordine, del tipo

$$a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + c \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + d \frac{\partial \varphi}{\partial u} + e \frac{\partial \varphi}{\partial v} + f = 0 \text{ ”.}$$

Per esempio, per le congruenze costituite dalle normali ad una superficie ad area minima, e che sono congruenze W, questa equazione è $\Delta_2 \varphi + 2\varphi = 0$ (cfr. § 6).

(*) Bianchi, loc. cit., p. 146.

(**) Nella memoria citata, nel § 28, risolsi il problema in un caso particolare, caratterizzando *le congruenze* W *normali* ed, in particolare, quelle costituite dalle normali ad una superficie ad area minima.

(***) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. 3°, p. 345.

Nelle nostre notazioni, la condizione richiesta è

$$(19)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} & \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} & X \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial u^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Y \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Z \\ \frac{\partial^2 l}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 l}{\partial v^2} & \frac{\partial l}{\partial u} & \frac{\partial l}{\partial v} & l \\ \frac{\partial^2 m}{\partial u^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & m \\ \frac{\partial^2 n}{\partial u^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & n \end{vmatrix} = 0.$$

Togliamo le ultime tre colonne del determinante: dalla prima, dopo averle moltiplicate rispettivamente per $\left\{ {11 \atop 1} \right\}, \left\{ {11 \atop 2} \right\}, -E$; dalla seconda, dopo averle moltiplicate per $\left\{ {12 \atop 1} \right\}, \left\{ {12 \atop 2} \right\}, -F$; dalla terza, dopo averle moltiplicate per $\left\{ {22 \atop 1} \right\}, \left\{ {22 \atop 2} \right\}, -G$.

Allora, in virtù delle (8) e (IV), gli elementi comuni alle prime tre orizzontali ed alle prime tre verticali si annullano, e però il determinante si riduce al prodotto del determinante (18) per un determinante di terzo ordine in cui gli elementi della prima orizzontale sono

$$2DX + A_{111}\frac{\partial X}{\partial u} + A_{112}\frac{\partial X}{\partial v}, \quad 2D'X + A_{121}\frac{\partial X}{\partial u} + A_{122}\frac{\partial X}{\partial v},$$
$$2D''X + A_{221}\frac{\partial X}{\partial u} + A_{222}\frac{\partial X}{\partial v},$$

e quelli delle altre due si deducono da questi cambiandovi X in Y e in Z; quest'ultimo è sua volta il prodotto del determinante (18) per l'altro

$$\begin{vmatrix} 2D & A_{111} & A_{112} \\ 2D' & A_{121} & A_{122} \\ 2D'' & A_{221} & A_{222} \end{vmatrix};$$

dunque, essendo il determinante (18) diverso da zero, la (19) si riduce a

$$(20) \qquad \begin{vmatrix} D & A_{111} & A_{112} \\ D' & A_{121} & A_{122} \\ D'' & A_{221} & A_{222} \end{vmatrix} = 0.$$

È questa la condizione necessaria e sufficiente affinchè le due forme fondamentali (I) *individuino una congruenza* W.

9. — Notiamo per finire che la (19) e quindi la (20) è anche condizione necessaria (ma non sufficiente) affinchè tra X, Y, Z, l, m, n passi una relazione

$$aX + bY + cZ + dl + em + fn = 0$$

a coefficienti $a, b, \ldots$ costanti, ossia affinchè la congruenza faccia parte di un complesso lineare.

Otteniamo così il teorema noto: *ogni congruenza che fa parte di un complesso lineare è una congruenza* W.

Torino, 18 aprile 1909.

Fenomeno fotoelettrico osservato in liquidi dielettrici.

Nota del Socio ANDREA NACCARI.

Nel corso di uno studio sulle proprietà elettriche dei liquidi dielettrici volli esaminare se la luce esercitasse influenza sulla resistenza. È noto che le radiazioni delle sostanze radioattive alterano la resistenza di tali corpi. Non è mai stato osservato, ch'io sappia, alcun effetto simile prodotto dalla luce.

In una bacinella circolare di vetro del diametro di 17 cm. stava un disco di rame nichelato di 15 cm. di diametro. Tre pezzetti di vetro dell'altezza di 1,5 mm. circa erano applicati con mastice alla faccia superiore del disco. Su questi s'appoggiava un disco di rete di filo d'ottone, le cui maglie quadrate avevano il lato di circa 3 mm. I poli di una pila Leclanché di 53 coppie erano congiunti rispettivamente al disco massiccio e alla rete. La bacinella conteneva toluene che copriva appena, appena la rete. Nel circuito era inserito un galvanometro. Una corrente di $1,8.10^{-8}$ ampère produceva una deviazione di una divisione della scala. La corrente passava continuamente e si osservava la deviazione del galvanometro ogni quattro minuti. Nei periodi compresi tra le osservazioni alternamente si teneva al buio la bacinella o la si esponeva alle radiazioni.

Le tabelle seguenti contengono i risultati di altrettante serie di esperienze fatte con luce diffusa in una stanza volta a levante. Altre ne furono fatte con simili risultati. La bacinella stava sopra una mensola a poca distanza da una grande finestra. In ciascuna tabella è indicata al di sopra l'ora dell'esperienze. La prima colonna contiene le osservazioni fatte al buio, la seconda quelle fatte quando la luce entrava nella stanza. Nelle ore antimeridiane i raggi solari entravano nella stanza, ma non cadevano mai nè sulla bacinella, nè sulla mensola. I numeri scritti all'estremità inferiore delle due colonne sotto la retta orizzontale danno le medie delle osservazioni rispettive. Il numero scritto più sotto dà la differenza delle medie, che può servire a rappresentare l'effetto della luce. La deviazione iniziale era di circa 200 divisioni. I numeri positivi indicano aumenti dell'intensità della corrente.

9-10	
0,7	
	5,5
1,2	
	7,8
— 0,2	
	11,8
0,2	
	15,5
— 0,7	
	18,0
1,7	
	18,9
4,9	
	24,1

1,1 14,9

13,8

15-16	
2,1	
	5,8
2,0	
	3,6
1,8	
	3,3
1,3	
	4,0
0,4	
	3,5
1,0	

1,4 4,0

2,6

16-17	
3,1	
	6,6
3,3	
	5,3
2,9	
	3,8
2,0	
	4,5
3,3	

2,8 5,0

2,2

16-17	
2,7	
	4,0
2,3	
	3,0
— 0,1	
	4,1
0,7	
	4,1
4,9	
	1,5

1,3 3,3

2,0

8-9	
1,2	
	2,2
0,9	
	3,9
1,3	
	5,7
0,6	
	5,1
1,6	

1,1 4,2

3,1

10-11	
1,3	
	4,9
1,7	
	7,4
1,6	
	13,1
— 0,1	
	8,9
4,4	
	13,0
3,3	
	15,5
2,8	

2,1 10,4

8,3

17-18	
0,8	
	6,8
1,1	
	8,1
— 1,8	
	4,9
— 1,9	
	7,1
— 1,9	

— 0,7 6,7

7,4

18-19	
2,0	
	2,7
1,8	
	0,3
0,1	

1,3 1,5

0,2

Non si notò alcuna influenza del senso della corrente.

Queste esperienze mostrano che la luce diffusa fa crescere l'intensità della corrente. Sopra una cinquantina di esperienze una sola ebbe esito negativo.

L'esperienze, alle quali spettano le tabelle seguenti, furono eseguite facendo cadere sulla bacinella i raggi solari, ma interponendo sul cammino di essi una bacinella di sezione rettangolare che conteneva dell'acqua o una soluzione colorata. Lo strato d'acqua aveva la grossezza di 2 cm. circa.

Acqua	
2,9	
	42,8
2,8	
	29,8
—10,2	
—1,5	36,3
37,8	

Solfato di rame	
4,0	
	14,4
— 1,8	
	24,3
— 3,8	
— 0,5	19,3
19,8	

Bicromato potassico	
6,2	
	18,8
0,5	
	10,5
— 4,6	
0,7	14,6
13,9	

Le due tabelle che seguono spettano ad esperienze fatte con una lampada Uviol posta a 80 cm. di distanza dalla bacinella. L'effetto si palesava in generale venti secondi circa dopo l'istante, in cui i raggi cominciavano a cadere sulla bacinella.

1,2	
	41,3
— 14,5	
— 5,5	
	20,5
— 8,2	
— 6,5	30,9
37,4	

3,7	
	27,8
— 18,8	
— 7,0	27,8
34,8	

In queste ultime esperienze è da notare il fatto che, appena cessata l'azione della luce, si osservò un aumento di resistenza, il che raramente avvenne negli altri casi. Non sempre la lampada Uviol apparve tanto efficace come in questo caso. Una lampada Auer con una bacinella d'acqua interposta produce poco effetto come risulta dalla tabella seguente.

3,1	
	5,1
4,0	
	4,6
2,5	

3,2 4,3

1,1

L'esperienze descritte furono fatte con toluene del commercio. Avendolo distillato, si comportò nello stesso modo. Un altro saggio di toluene, che credo più puro, diede effetti minori. Uno solo non ne diede alcuno.

Un saggio di petrolio che era stato distillato fra 280° e 300°, mostrò effetti simili a quelli descritti, ma di molto minore intensità. I raggi della lampada Uviol parvero poco efficaci sopra di esso a paragone dei raggi solari, benchè questi avessero attraversato tre pareti di vetro e uno strato d'acqua. Non ebbi alcun effetto con l'anilina, nè con l'alcool. Su liquidi molto resistenti non potei ancora sperimentare per la poca sensibilità dell'apparecchio.

Il fenomeno potrebbe attribuirsi ad un'azione fotoelettrica sugli elettrodi, ma credo più probabile che la luce modifichi la conducibilità del liquido.

Sul calcolo analitico degli archi elastici.

Nota di GIUSEPPE ALBENGA.

Il problema di determinare analiticamente le reazioni di imposta degli archi elastici a parete piena con vincoli sovrabbondanti fu risoluto (per alcuni casi semplici di sollecitazione e per le usuali forme della fibra media) verso la metà del secolo scorso da Bresse, che trattò l'arco con due cerniere e da Winkler che studiò l'arco incastrato (*). Ma le formole a cui giunsero questi autori sono molto complesse e non possono esser facilmente tradotte in numeri; l'uso delle ordinarie tavole di logaritmi a sette decimali non permette di ottenere una approssimazione soddisfacente quando l'arco che si considera sia alquanto ribassato. Per facilitare l' impiego delle sue formole Bresse calcolò alcune tabelle numeriche: altre tabelle pubblicò di recente Pigeaud, relative agli archi senza cerniera; ma queste, a dir vero, contemplano parametri della reazione d'imposta, alquanto diversi da quelli cui ricorse Winkler (**). Allo scopo di giungere a formole semplici vennero proposte molte soluzioni approssimate: ma anche le più interessanti e le più ingegnose di esse, trascurano termini, la cui influenza non può a priori esser con precisione stabilita e che possono nel fatto modificare notevolmente i risultati.

Con la presente nota mi propongo di indicare come a formole, che è semplice calcolare numericamente e che non sono così complesse come quelle di Bresse e di Winkler, si possa

(*) Bresse, *Étude théorique sur la résistance des arcs,* “ Annales des Ponts et Chaussées „, 1848, I, 150 e *Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbes.* Paris, 1854 — Winkler, *Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit,* Prag, 1867 e *Ueber den Einfluss der Temperatur bei Bogenbrücken. Zivilingenieur,* 1867. Per una trattazione completa dell'argomento cfr. Müller-Breslau, *Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken,* Berlin, 1880 e C. Guidi, *Lezioni sulla Scienza delle costruzioni. Teoria dei ponti,* Torino, 1905.

(**) Pigeaud, *Note sur le calcul des arcs encastrés,* “ Annales des Ponts et Chaussées „, 1905, II, 201 e 1906, III, 97.

giungere con la semplice traduzione analitica dei procedimenti grafici che derivano dalla teoria dell'ellisse di elasticità (*). Questi procedimenti coincidono in sostanza con quelli svolti da Guidi nella classica memoria " L'arco elastico senza cerniere „ (**).

Le ipotesi che suppongo verificate nella trattazione seguente, sono quelle di solito ammesse nella resistenza dei materiali: per esse e per le notazioni più sotto impiegate seguo le *Lezioni sulla Scienza delle costruzioni* del prof. Guidi.

***

Consideriamo per fissare le idee il caso dell'arco perfettamente incastrato alle imposte, soggetto all'azione d'un solo carico unitario verticale. È noto che le espressioni dei parametri della reazione di imposta, sono per questa ipotesi:

$$\mathfrak{M} = 1 \frac{\sum_A^C (x_C - x)\, w}{\sum w}$$

$$A = -1 \frac{\sum_A^C (x_C - x) x w}{\sum x^2 w}$$

$$H = -1 \frac{\sum_A^C (x_C - x) y w}{\sum y^2 w}$$

o passando al caso della scomposizione in elementi infinitesimi:

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M} = 1 \dfrac{\int_A^C (x_C - x) dw}{\int dw} \\[2ex] A = -1 \dfrac{\int_A^C (x_C - x) x dw}{\int x^2 dw} \\[2ex] H = -1 \dfrac{\int_A^C (x_C - x) y dw}{\int y^2 dw} \end{cases}$$

dove con dw si indica il peso elastico elementare $\frac{ds}{EJ}$.

(*) Cfr. W. Ritter, *Anwendungen der graphischen. Statik*. IV. *Der Bogen*, Zürich, 1906 e C. Guidi, *L'ellisse d'elasticità nella Scienza delle Costruzioni*, Torino, 1904. Ritter dà una applicazione analitica della sua teoria ad alcuni casi particolarissimi introducendo ipotesi semplificative.

(**) " Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino „, 1902.

Gli integrali contenuti nelle (1) non si prestano ad una semplice risoluzione, poichè il peso elastico dw è diffuso, e non uniformente, sulla superficie dell'elemento. È opportuno perciò ricorrere ad una trasformazione che ci permetta di sostituire, agli integrali delle (1) altri integrali estesi unicamente a linee. Se si osserva che nelle (1) compaiono soltanto momenti di 1° e di 2° ordine dei pesi elastici si vede subito che si raggiungerà lo scopo prefisso riducendo il sistema continuo dei pesi elastici, ad un sistema discreto di pesi, opportunamente scelti, che equivalga quadraticamente il sistema dato; che ammetta cioè lo stesso peso elastico totale dw, lo stesso centro C ed il cui ellisse di inerzia coincida con l'ellisse di elasticità dell'elemento (*).

Consideriamo un tronco di arco compreso fra due sezioni AB, CD abbastanza prossime (fig. 1): se si fa astrazione dalla curvatura sarà $w = \frac{\Delta s}{EJ}$ il peso elastico dell'elemento, e ne saranno $\rho = \sqrt{\frac{J}{F}}$ e $\rho_1 = \sqrt{\frac{\Delta s^2}{12} + \frac{E}{G}\chi\rho^2}$ i semiassi radiale e longitudinale dell'ellisse di elasticità. È facile verificare che al sistema ora considerato potremo nella ricerca delle quantità staticamente indeterminate sostituire tre forze aventi la intensità ed i punti di applicazione segnati in fig. 1 (**). Se si suppone che le faccie AB e CD vadano avvicinandosi, il semiasse ρ_1 tende al valore $\sqrt{\frac{E}{G}\chi\rho^2}$: avremo al limite per ogni elemento tre forze disposte come nella fig. 2. Estendendo la trasformazione a tutto l'arco, i punti E, F, G descrivono tre curve, ad ogni punto di esse corrisponde un determinato peso elastico e, per i casi trattati da Winckler, la integrazione delle formole in cui si trasformano le (1) non presenta alcuna difficoltà. Trascurando,

---

(*) A proposito di sistemi quadraticamente equivalenti cfr. *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, IV, I, 3. G. Young, *Geometrie der Massen*, § 22 ed opere ivi citate.

(**) Non è che un caso particolare di una sostituzione ampiamente trattata da Th. Reye. Ogni triangolo autopolare rispetto alla conica centrale del sistema considerato, quando si immaginano i suoi vertici affetti da masse opportune, ci dà una terna di punti che soddisfano alle condizioni sopra esposte. Per il caso in cui si imponga che le 3 masse siano eguali vedi Holzmüller, *Die Ingenieurmathematik*, I, 222, Leipzig, 1897.

come è generalmente lecito, l'influenza dello sforzo di taglio i punti F e G vengono a coincidere nel punto I: potremo quindi sostituire ad ognuno degli elementi due punti E ed I caricati da pesi elastici $\frac{1}{2}\,dw$ e situati a distanza ρ dall'asse baricentrico. È interessante osservare che si ricade così su quell'arco reticolare ideale che il prof. Guidi sostituisce all'arco a parete

Fig. 1.

Fig. 2.

piena per la ricerca delle deformazioni e per il calcolo delle quantità staticamente indeterminate che ne dipendono (*).

È molto semplice tener conto della curvatura. Basterà, ricordando quanto esposi recentemente in una breve nota (**),

---

(*) C. Guidi, *Teoria dei ponti*, pag. 273. A risultati analoghi giunge per altra via Bertrand de Fontviolant, *Mémoire sur la statique graphique des arcs élastiques.* Paris, Steinheil, 1890 e Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences (seduta del 31 marzo 1890).

(**) *Contributo alla teoria dei solidi a grande curvatura,* " Atti Accademia Scienze di Torino ", vol. LXIV.

sostituire al raggio di curvatura r il raggio $\frac{r}{1+\varkappa}$; al peso elastico $\frac{ds}{EJ}$ il peso elastico $\frac{ds_n(\varkappa+1)^2}{\varkappa F r^3}$; al segmento ρ il segmento $\sqrt{\frac{\varkappa}{(\varkappa+1)^2}r^2}$ ed al coefficiente χ il coefficiente χ_1.

***

Nel caso dell'arco circolare, simmetrico, di sezione costante, quando si trascurino l'influenza della curvatura e dello sforzo

Fig. 3.

di taglio, le (1) divengono, con semplicissime riduzioni, e coi dati della fig. 3, dove s'indicò con G il baricentro elastico; con x ed y gli assi coordinati coincidenti con gli assi dell'ellisse l'elasticità dell'arco:

$$\mathfrak{M} = 1 \, \frac{\int_A^C (x_C - x)ds}{\int ds}$$

$$A = -1 \, \frac{\int_A^C (x_C - x_e)x_e ds + \int_A^C (x_C - x_i)x_i ds}{\int x_e^2 ds + \int x_i^2 ds}$$

$$H = -1 \, \frac{\int_A^C (x_C - x_e)y_e ds + \int_A^C (x_C - x_i)y_i ds}{\int y_e^2 ds + \int y_i^2 ds}.$$

Osserviamo che è $y = \eta - Y$ ed indichiamo con c la semicorda, con l_0 la semilunghezza della fibra media, con l_C la lunghezza della fibra media fra A e C: si avrà allora (fig. 3):

$$\int ds = 2l_0$$

$$\int_A^C ds = l_C$$

$$\int_A^C x ds = -\int_A^C r dy = -r y_C$$

$$\int_A^C x_e ds = -\int_A^C r dy_e = -r y_{eC}$$

$$\int_A^C x_e^2 ds = r_e^2 \left[\frac{1}{2} l_C - \frac{1}{2} (x_C + c)\cos\varphi_0\right]$$

$$\int x_e^2 ds = r_e^2 [l_0 - c\cos\varphi_0]$$

$$\int_A^C x_e \eta_e ds = r \left[\frac{1}{2} x_{eC}^2 - \frac{1}{2} c_e^2\right]$$

$$\int_A^C \eta_e ds = r[x_{eC} + c_e]$$

$$\int \eta_e^2 ds = r_e^2 [l_0 + c\cos\varphi_0]$$

etc.

e che inoltre è

$$x_e = (r + \rho)x; \; x_i = (r - \rho)x, \text{ etc.};$$

avremo

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2l_0}(x_C l_C + r y_C)$$

$$A = \frac{1}{2}\frac{(r^2+\rho^2)(l_C - (x_C + c)\cos\varphi_0) - 2r x_C y_C}{(r^2+\rho^2)(l_0 - c\cos\varphi_0)}$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{4Y\mathfrak{M}l_0 + (r^2+\rho^2)\left(\frac{c^2 - x_C^2}{r}\right) - 2x_C(x_C + c)}{(r^2+\rho^2)(l_0 + c\cos\varphi_0) - 2Y^2 l_0}.$$

Le equazioni precedenti quando si tenga conto della curvatura si semplificano alquanto e prendono la forma:

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2l_0}\left(x_C l_C + \frac{r y_C}{1+\varkappa}\right)$$

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{l_c - l_0 - x_C\left(\cos\varphi_0 - \frac{y_C}{r}\right)}{l_0 - c\cos\varphi_0}\right)$$

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2}\frac{4\mathfrak{M}c - (x_C + c)^2}{r(l_0 + c\cos\varphi_0) - \frac{2}{1+\varkappa}Yc} \quad (*).$$

È facile verificare mediante semplici sostituzioni, che le equazioni qui date coincidono sostanzialmente con quelle a cui giunsero gli autori che si citarono.

Se si ricorda, che nella massima parte dei casi $\varkappa$ è piccolissimo e trascurabile di fronte alla unità (**), nel calcolo degli archi delle tettoie e dei ponti, quando non si abbia la pretesa, che Wilhelm Ritter chiamò ridicola, d'una precisione assoluta, si potrà porre semplicemente:

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2l_0}(x_C l_C + r y_C)$$

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{l_c - l_0 - x_C\left(\cos\varphi_0 - \frac{y_C}{r}\right)}{l_0 - c\cos\varphi_0}\right]$$

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2}\frac{4\mathfrak{M}c - (x_C + c)^2}{r(l_0 + c\cos\varphi_0) - 2Yc}.$$

(*) Basta fare negli integrali sopra riportati le sostituzioni cui si accennò in fine del paragrafo precedente: e ricordare che è $Yl_0 = rc$.

(**) Quando il raggio sia anche soltanto 10 volte lo spessore dell'arco, $\varkappa$ è, per la sezione rettangolare, di poco superiore ad $\frac{1}{1200}$.

Sono le equazioni a cui si giungerebbe quando si immaginasse il peso elastico $\frac{ds}{EJ}$ di ciascun elemento dell'arco concentrato nei punti della fibra media (*).

*
* *

L'estensione delle formole precedenti ad altri casi di carico è ovvia e il procedimento di calcolo da seguirsi non presenta alcun particolare interesse: è preferibile indicare a quali formole si giunga quando si cerchi l'effetto delle variazioni di temperatura.

Per l'arco perfettamente incastrato si ha notoriamente:

$$\mathcal{H}_t = \frac{\alpha t 2c}{\Sigma y^2 w}$$

e quindi, per il caso dell'arco precedentemente trattato, con i simboli della figura 3:

$$\mathcal{H}_t = \frac{EJ\alpha t 2c}{(r^2 + \rho^2)(l_0 + c\cos\varphi_0) - 2Y^2 l_0}$$

quando si trascuri l'influenza della curvatura: se invece se ne tien conto si ricade, come è facile verificare, sulle formole date da Winkler e da Müller-Breslau.

Per l'arco con cerniere di imposte dovremo nella (2) alle ordinate prese per rispetto all'asse orizzontale baricentrico sostituire quelle misurate a partire dalla corda dell'arco: o, coi nostri simboli, porre:

$$\mathcal{H}_t = \frac{\alpha t 2c}{\Sigma y^2 w}$$

da cui

$$\mathcal{H}_t = \frac{EJ\alpha t 2c}{(r^2+\rho^2)[l_0 + c\cos\varphi_0] - 2l_0 r^2\cos^2\varphi_0 - 4crY\cos\varphi_0},$$

(*) Il supporre il peso elastico concentrato in corrispondenza della fibra media, coincide, come si vede subito, col trascurare nella trattazione grafica gli spostamenti in senso radiale.

e, avuto riguardo alla curvatura:

$$\mathcal{H}_t = \frac{\varkappa EF \alpha t 2c}{l_0 - 3c\cos\varphi_0 + (1+\varkappa)2l_0\cos^2\varphi_0};$$

formola che coincide in sostanza con quella data da Winkler e che differisce invece notevolmente da quella cui giunse Müller-Breslau.

Si può molto semplicemente dimostrare quale sia l'origine della sconcordanza tra le due formole: le espressioni delle deformazioni elementari, da cui partì Müller-Breslau (*), sono, con i nostri simboli:

$$\epsilon_0 = -\frac{1}{EF}\left(N + \frac{M}{r}\right) + \alpha t$$

$$\frac{\Delta d\varphi}{ds} = -\frac{1}{EFr}\left(N + \frac{M}{r} + \frac{M}{\varkappa r}\right) + \frac{\alpha t}{r}$$

e quindi per l'arco incastrato ad un estremo e libero all'altro, sottoposto unicamente ad una variazione di temperatura:

$$\epsilon_0 = \alpha t$$

$$\frac{\Delta d\varphi}{ds} = \frac{\alpha t}{r}.$$

Ne segue che in un elemento libero di dilatarsi varierebbe l'angolo al centro e rimarrebbe immutato il raggio di curvatura. Viceversa è noto che per effetto di una variazione di temperatura ogni elemento libero di dilatarsi si trasforma in un elemento simile, e quindi si mantien costante l'angolo al centro, mentre varia, proporzionalmente al binomio di dilatazione, il raggio di curvatura. La causa di questa contraddizione fra i risultati di Müller-Breslau e la esperienza dipende dal fatto che nell'ottener le formole sopra accennate venne fatta astrazione dalla influenza della dilatazione in senso radiale: che forse non convenga trascurarla dimostrano le conseguenze, non in tutto conformi ai pratici risultati, delle ipotesi di Müller-Breslau. Il

(*) Müller-Breslau, Op. cit.

tener conto di questa dilatazione, come dimostra un calcolo semplicissimo, conduce alla espressione:

$$\frac{\Delta d\varphi}{ds} = -\frac{1}{EFr}\left(N + \frac{M}{r} + \frac{M}{\varkappa r}\right),$$

che è quella da cui partì Winkler.

A Müller-Breslau era' parso che questa formola non soddisfacesse alle condizioni dell'equilibrio statico dell'elemento e realmente nelle ipotesi da lui e da Winkler ammesse non vi soddisfaceva (*).

(*) Nelle opere più recenti Müller-Breslau non ripete più la formola a cui qui si accenna ed in trattazioni ampie e profonde del comportamento degli archi soggetti a variazioni di temperatura, ricorre ad altri metodi per la determinazione della spinta da esse provocata. La formola a cui si riferiscono le precedenti osservazioni è però ancor molto diffusa. Cfr. a. e. *Handbuch der Ingenieurwissenschaften. Brückenbau.* MELAN, *Theorie der eisernen Bogen- und Hängebrücken.* Leipzig, 1906.

Relazione sulla Memoria del D[r] Alfonso Bovero, intitolata: *Annotazioni sull'anatomia del palato duro: ossificazioni autonome e suture accessorie dei processi palatini dei mascellari; partecipazione del vomere alla costituzione del palato nei Mammiferi; forami e canali vascolari anomali nella volta palatina.*

Già un'altra memoria del D[r] Alfonso Bovero sull'anatomia del palato duro fu accolta da questa Accademia nel 1907; in questa seconda memoria egli continua l'esposizione dei risultati ottenuti nei suoi studi sulla morfologia dello scheletro palatino nell'Uomo e negli altri Mammiferi. L'A. ora prende specialmente in esame le ossificazioni autonome e le suture accessorie dei processi palatini dei mascellari; correlativamente tratta della partecipazione del vomere alla costituzione dello scheletro del palato nei Mammiferi.

Circa alla ossificazione infrapalatomascellare, premessa una completa rivista della letteratura, l'A. dimostra come vi si possano distinguere più categorie di ossicini: denomina *ossicini infrapalatomascellari incisivopalatini* quelli che sono limitati da suture procedenti dalla palatina trasversa e terminanti nella sutura incisiva; *ossicini infrapalatomascellari anteriori* quelli che sono frapposti solamente alle porzioni ventrali dei margini mediali dei palatomascellari. Descritti minutamente molti casi dei due gruppi, egli discute poi sul significato morfologico dei medesimi ed anche degli ossicini *infrapalatomascellari posteriori* di cui si parla nella letteratura, ma che dall'A. non vennero riscontrati in nessuno dei 3742 crani osservati. Con la scorta delle osservazioni personali dimostra come le diverse categorie di formazioni non siano dovute che ad un diverso grado di sviluppo ed alla ubicazione assunta nel corso dell'ontogenesi da speciali punti di ossificazione accessorie dei palatomascellari.

È difficile riassumere in breve la quantità di fatti presi in esame dal D[r] Bovero e messi in rapporto con quanto è consegnato già nella letteratura. Fra le altre considerazioni rileviamo che l'A. esclude una correlazione necessaria fra l'esistenza

degli ossicini infrapalatomascellari e la presenza del *torus palatinus*, esclude anche che gli stessi ossicini, nell'Uomo, abbiano qualsiasi rapporto genetico col vomere come ammisero altri ricercatori. A questo proposito dall'esame di un ricchissimo materiale appartenente a tutti gli ordini di Mammiferi, l'A. dimostra come il vomere possa realmente comparire alla volta palatina con modalità in certo modo fisse e caratteristiche per determinati generi di alcuni ordini. Quasi del tutto nuove si devono ritenere le osservazioni del Bovero sul genere *Felis* fra i carnivori e specialmente nella famiglia *Cervidae* fra gli Artiodattili, relativamente alla comparsa del vomere alla volta palatina.

L'A. infine descrive per la prima volta dei forami e dei canali vascolari anomali nella volta palatina, che danno ricetto a robusti tronchi anastomotici fra le arterie dentarie posteriori superiori e l'arteria palatina posteriore, affermando trattarsi in tali casi della esagerazione di disposizioni le quali, con un grado di sviluppo molto minore, si devono ritenere perfettamente normali.

La considerevole copia del materiale di osservazione, la grande diligenza usata nello studio, fanno dare molto peso alla conclusione ultima dell'A. che le ossificazioni infrapalatomascellari non riconoscono la loro origine da alcuna condizione di natura teratologica, ma rientrano appieno in quel novero di formazioni che sono dovute alla variabilità.

Una tavola con 40 figure serve ad illustrare le disposizioni più tipiche degli ossicini infrapalatomascellari dell'Uomo e la maniera con cui il vomere si presenta a costituire la volta palatina in alcuni Mammiferi.

In base a quanto venne esposto i sottoscritti propongono l'accettazione del lavoro del D^r Bovero per la stampa fra le Memorie.

L. Camerano,
R. Fusari, *relatore*.

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSI UNITE

Adunanza del 2 Maggio 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Naccari, Direttore della Classe, Spezia, Camerano, Segre, Jadanza, Foà, Guidi, Parona, Grassi, Somigliana e Fusari.

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Carle, Renier, Pizzi, Ruffini, Stampini, Sforza e De Sanctis, Segretario. — Scusano l'assenza i Soci Manno, Direttore della Classe, e D'Ercole.

È approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente a Classi unite, 31 gennaio 1909.

Il Presidente comunica l'invito della Società storica tortonese a contribuire alla sottoscrizione per un ricordo marmoreo all'insigne anatomico Carlo Giacomini, che fu Socio residente della nostra Accademia. La scheda di sottoscrizione rimarrà presso la Segreteria dell'Accademia a disposizione dei Soci.

Invitato dal Presidente, il Socio Camerano, Segretario della 1ª Giunta per il XVI° premio Bressa (premio nazionale, quadriennio 1905-1908), legge la relazione intorno alle opere che possono essere considerate pel premio. Il Presidente chiede ai Soci se abbiano nuove proposte a fare; ma nessuno prendendo la parola, a tenore dell'art. 3 del Regolamento interno pel con-

ferimento del premio Bressa, dichiara chiuso il periodo delle proposte.

A norma dell'art. 4 del detto Regolamento si procede poi alla nomina della 2ª Giunta pel premio stesso. Riescono eletti, per la Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, i Soci: Naccari, Camerano, Guareschi, Somigliana e Parona; per la Classe di scienze morali, storiche e filologiche, Renier, Pizzi, De Sanctis, Ruffini e Stampini.

Il Presidente comunica che l'Accademia è chiamata quest'anno a giudicare intorno al conferimento del premio istituito dal senatore Giovanni Morelli a favore di quel giovane della città o provincia di Bergamo che presenti la migliore opera scientifica. Il giudizio è dato per turno dall'Istituto Lombardo, dall'Istituto Veneto, dall'Accademia delle Scienze di Torino e dall'Accademia dei Lincei. La nostra Accademia, nell'adunanza dell'11 giugno 1899, deliberò di accettare l'incarico e lo disimpegnò già una prima volta per mezzo di una Commissione nominata nell'adunanza del 30 aprile 1905. Interrogata dal Presidente, l'Accademia delibera con voto unanime di accettare anche questa volta il còmpito affidatole. Presa cognizione dei titoli presentati dai concorrenti, si conviene di formare una Commissione giudicatrice di due membri per ciascuna Classe, più il Presidente. Le Classi votano separatamente a schede segrete. Risultano eletti, per la Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali: Guidi e Grassi; per la Classe di scienze morali, storiche e filologiche: De Sanctis e Ruffini.

Gli Accademici Segretari
Lorenzo Camerano.
Gaetano De Sanctis.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 2 Maggio 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Carle, Renier, Pizzi, Ruffini, Sforza e De Sanctis Segretario. — Scusano l'assenza i Soci Manno, Direttore della Classe, e D'Ercole.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente, 18 aprile 1909.

Il Socio Renier presenta per gli *Atti* una nota del prof. Carlo Contessa sopra *Un inventario del secolo XV ed alcune spigolature per la storia della Biblioteca capitolare d'Ivrea.*

Il Socio De Sanctis, anche a nome del Socio Stampini, legge la relazione intorno alla memoria del prof. Angelo Taccone, intitolata: *Contributi alla ricostruzione dell'Issipile euripidea.* La Classe, approvata la relazione, delibera a scrutinio segreto con voto unanime la inserzione dello scritto del Taccone nelle *Memorie* accademiche.

LETTURE

Un inventario del secolo XV ed alcune spigolature per la storia della Biblioteca capitolare d'Ivrea.

Nota del Prof. CARLO CONTESSA.

Debbo alla cortesia singolare del canonico Domenico Garino, esperto quanto appassionato conoscitore dei codici della biblioteca capitolare di Ivrea, la comunicazione di un inventario da lui rinvenuto tra le carte disordinate e tenute in nessun conto (1).

Esso mi pare degno di essere pubblicato, come quello che fu ignoto a tutti gli studiosi che dal secolo XVII si giovarono dei codici preziosi che la biblioteca possiede (2), e pure può dare qualche sussidio per chi volesse mai ricostruire la storia di una raccolta che gode meritatamente fama nel resto d'Europa, assai meglio che appo di noi ed in Ivrea stessa.

M'incoraggia alla pubblicazione l'esempio di parecchi altri inventarii di biblioteche medievali messi in luce di questi ultimi tempi (3).

---

(1) Al canonico Garino, che col canonico Clerico, bibliotecario, gareggia in generosità e gentilezza verso tutti i visitatori della biblioteca capitolare d'Ivrea, debbo, oltre la comunicazione dell'inventario suddetto, anche parecchie preziose notizie di cui mi sono giovato nella compilazione del lavoro. All'uomo che ha modestia pari ai meriti veramente singolari, rendo con sincero entusiasmo pubblica testimonianza di gratitudine e di ammirazione.

(2) Viene generalmente ricordato come uno dei primi dotti che visitarono e studiarono i codici della capitolare d'Ivrea il D'Achery pel suo *Spicilegium*.

(3) Sono da ricordare in primo luogo: Becker G., *Catalogi bibliothecarum antiqui*, Bonnae, ap. Max. Cohen et filium, 1885 (In quest'opera son pubblicati, nella parte I, cataloghi anteriori al sec. XIII, e nella parte II, p. 286-303, si dà l'elenco dei cataloghi di età posteriore). — Gottlieb Th., *Ueber Mittelalterliche Bibliotheken*, Leipzig, 1890 (Riferisce di parecchi cataloghi medievali di biblioteche di Germania, Francia, Gran Brettagna, Italia, Paesi Bassi, Scandinavia, Spagna e Portogallo. Per l'Italia dà

Nell'anno 1785 il chierico Agostino Torelli, noto anche per l'inventario dell'archivio arcivescovile di Torino, ordinò l'archivio capitolare di Ivrea e lasciò un pregiato benchè incompleto inventario delle scritture dal secolo XI al XVIII. Egli però non si occupò dei codici.

Nel secolo XIX, indipendentemente dagli studi parziali condotti sui più noti codici eporediesi dai dotti sopratutto stranieri, parecchi si occuparono complessivamente della biblioteca che andò raccogliendo attraverso i secoli e custodisce la cospicua raccolta.

Però tutti coloro che cercarono di ordinare ed inventariare la suppellettile preziosa operarono indipendentemente l'uno dall'altro, tenendo in troppo poco conto, e taluno fors'anche ignorando, l'opera di chi nel processo di ordinamento aveva preceduto.

Primo a rivelare ai dotti d'Italia e d'Europa i tesori della

---

notizie delle biblioteche ecclesiastiche di Aquileia, Arezzo, Assisi, Benevento, Bobbio, Bologna, Cremona, Farfa, Firenze, Grottaferrata, Gubbio, Lucca, Montecassino, Monza, Monteprandone, Nonantola, Orvieto, Padova, Palermo, Pistoia, Pomposa, Ravenna, Roma, Siena, Venezia; nonchè di biblioteche private in centri minori). — Manitius M., *Geschichtliches aus Mittelalterlichen Bibliothekskatalogen*, in " Neues Archiv ", XXXIII, 2, 1907, pp. 647-709 [Notizia di opere storiche medievali nei codici delle varie biblioteche di Europa]. — Tra i cataloghi e cenni di varie biblioteche pubblicati separatamente ricordo a caso: Zdekauer L., *Un inventario della libreria capitolare di Pistoia del secolo XV*, in " Bullettino storico pistoiese ", IV, 4, 1902. — Baldasseroni F. e D'Ancona P., *La biblioteca della basilica fiorentina di S. Lorenzo nei secoli XIV e XV*, in " Rivista delle biblioteche e degli archivi ", 1905, pp. 175-202. — Alessandri L., *Inventario dell'antica biblioteca del S. Convento di S. Francesco in Assisi, compilato nel 1381, pubblicato con note illustrative e con raffronti ai codici esistenti nella Comunale della stessa città*, Assisi, 1906, pp. xlv, 269. — Manacorda G., *Alcuni codici notevoli nella biblioteca del Seminario in Casale*, Casale, 1906, pp. 22. — A. Ferretto, *Un inventario di libri e di arredi della chiesa di S. Stefano* [Abbazia di S. Stefano a Genova] *fatto nel 1327*, in " Rivista stor. benedettina ", III, 12, ottobre-dicembre 1908. Nella stessa rivista e fascicolo C. Cipolla pubblica *Un catalogo della biblioteca dell'abbazia di Bobbio del 1722* e dà notizia di un altro inventario della medesima biblioteca del secolo X od XI. — Hefner I., *Zur Geschichte des Schatzes und der Bibliothek der Päpste in 14 Jahrhundert*, in " Historisches Jahrbuch ", XXIX, 4, 1908. — F. Curlo, *L'Archivio di S. Gaudenzio di Novara*, in " Bollettino stor. bibliografico subalpino ", Asti, 1908.

capitolare di Ivrea fu Amedeo Peyron in un opuscolo che ha avuto fortuna ed è ormai diventato raro (1).

Il Peyron si sofferma a ricamare con serena compiacenza alcuni squarci aneddotici anche estranei all'argomento; accenna quale importante materiale offrono per la storia locale e generale così le pergamene come i codici e gl'incunaboli eporediesi; ma non sono, quelli del Peyron, cenni sistematici, piuttosto impressioni parziali e staccate. La scomunica del vescovo Veremondo contro Arduino re induce, per esempio, l'autore a divagare, riferendosi a ricerche sulle origini della casa di Savoia tentate nella Francia meridionale e a Parigi, a fortuite scoperte di documenti sulle relazioni del Richelieu colla prima Madama Reale, che proprio coi codici di Ivrea non hanno nulla da vedere.

In conclusione il Peyron non dà un catalogo dei codici eporediesi, bensì, oltre i codici di Veremondo e quello del vescovo Giacomo de Pomariis (sec. XV), riduce l'opera sua essenzialmente ad una coscienziosa descrizione di quattro codici contenenti leggi romane e barbariche. Gli altri manoscritti nota molto sommariamente per gruppi.

Dei codici, unitamente agli incunaboli, dà il numero complessivo di duecentoventi.

E degli incunaboli dà pure qualche notizia, che rimane finora l'unica traccia di un esame fatto dei medesimi, poichè non si è provveduto ancora a ordinarli e catalogarli definitivamente. La trascuratezza forse è dovuta al giudizio che appunto nell'opuscolo del Peyron si dà dello scarso valore di tali incunaboli.

Ben altrimenti per i codici. La principale fortuna per l'opuscolo del Peyron consiste in ciò che la sua rivelazione e il suo augurio non furono inascoltati. Per opera dei canonici del Capitolo e di dotti volonterosi i codici furono tosto più di una volta, come si è detto, ordinati e sistematicamente catalogati. Già durante il suo viaggio attraverso la Germania e l'Italia (1844-46) per preparare i materiali usati per le edizioni dei " Monumenta Germaniae historica „ capitò ad Ivrea Ludovico Bethmann munito di una raccomandazione di re Carlo Alberto,

(1) *Notizia dell'Archivio del reverendissimo Capitolo d'Ivrea* del cavaliere Amedeo Peyron, Torino, Stamperia Reale, 1843, pp. 30, in-8°.

e vi soggiornò dieci giorni. Lavorarono con lui a ordinare i codici della capitolare l'abate Gazzera e l'arcidiacono della cattedrale canonico Benzo (1).

Il Bethmann stesso pubblicò il catalogo nell' " Archivio „ del Pertz (2); enumerava egli 129 codici, di cui alcuni descritti col semplice titolo, altri (i numeri 116 a 129) solo accennati in gruppo con designazione generica.

Non era adunque quello del Bethmann un catalogo completo e perfetto, ma tuttavia nella descrizione dei codici più importanti veramente notevole e scrupoloso.

Nel 1860 scrisse degli archivi di Ivrea notizie generiche il Neigebaur (3). Prima del 1868 per incarico del Capitolo attese a riordinare *ex-novo* i codici eporediesi il cav. Emanuele Bollati e li descrisse più tardi nell'inventario che tuttora si conserva manoscritto (4). Ricevette, lautissimo compenso dell'opera sua, un codice del secolo X: " liber canonum „ (5), il quale dopo alcune peregrinazioni (6) potè dopo circa quarant'anni, essere ricuperato dagli attuali canonici, solerti e gelosi custodi della gloriosa raccolta, in cui è tanta parte della storia della Chiesa di Ivrea.

Il catalogo del Bollati enumerava a differenza di quello del Bethmann solo più 114 codici.

Notizia succinta dei codici e degli incunaboli diede Nicomede Bianchi enumerando 114 dei primi e 73 volumi dei due

---

(1) *Archiv der Gesellschaft für ältere deutsche Geschichtskunde herausgegeben von* G. H. Pertz, Bd. IX, 1847, p. 513 e segg., Bd. XII, 1874, p. 593 e seg. — Costanzo Gazzera (1778-1859), archeologo, bibliografo e critico insigne, socio di questa Accademia. — Carlo Benzo da Cassine (Acqui) fu canonico d'Ivrea dal 1825, arcidiacono dal 1836; passò poscia a Torino come preside del Collegio delle Provincie, morì nel 1865.

(2) *Idem*, IX, 611-627.

(3) *Ueber die Archive zu Ivrea*, in " Serapeum „, XXI, 172-175.

(4) *Indice ossia inventario dei codici manoscritti membranacei (114) appartenenti al Capitolo Eporediese* fatto dal cav. Bollati nel 1871.

(5) Bethmann, *op. cit.*, in " Archiv von Pertz „, IX, 617, n. 37.

(6) Riassume le vicende del codice ormai famoso, sopratutto per le investigazioni numerose cui diede luogo, il lavoro recentissimo del prof. Silvio Pivano: " *Consortium* „ *o* " *societas* „ *di chierici e laici ad Ivrea nei secoli IX e X*, estratto dalla parte I del *volume in onore di Federico Ciccaglione*, Catania, Giannotta, 1909.

primi secoli della stampa (1). Infine, con numerazione e ordine ancora una volta mutati, ma con poche varianti sostanziali da quello del Bollati, ha redatto un ultimo inventario dei codici eporediesi il dottor Alfonso Professione, mio predecessore nella cattedra di storia nel R. Liceo Carlo Botta di Ivrea, e lo pubblicò nella raccolta del Mazzatinti (2). Il Professione a sua volta enumerava sol più 112 codici, ai quali oggi va aggiunto di nuovo il " liber canonum „ riacquistato dal Capitolo nel 1904.

Chi studiando e vagliando le divergenze dei tre principali inventarii ricordati redigesse l'inventario definitivo della biblioteca capitolare di Ivrea farebbe opera di qualche merito ed utile agli studiosi venturi, che auguro numerosi e degni dei precedenti.

Intanto nel desiderio di identificare per quanto è possibile i codici dell'antico inventario che qui pubblico mi è duopo citare le tre numerazioni o segnature del Bethmann, del Bollati e del Professione.

Il catalogo di codici di cui offro il testo è estratto da un più generale inventario di tutta la suppellettile della maggior chiesa di Ivrea. Volendo occuparmi soltanto della biblioteca tralascio la parte che riguarda gli arredi sacri.

L'inventario intero costituisce un fascicolo cartaceo di sedici fogli semplici, senza numerazione, della misura di millimetri 280 × 95.

Esso fu redatto nell'anno 1427 per opera di sei canonici a ciò delegati dal Capitolo: Enrico de Cornibus, arciprete (3),

---

(1) *Le carte degli archivi Piemontesi*, Torino, Bocca, 1881, pp. 147-148.

(2) *Inventarii dei mss. delle biblioteche d'Italia*, vol. IV, Forlì, 1894.

Furono alcuni dei codici eporediesi, con diverso criterio di studi speciali, elencati e descritti dal MAASSEN: *Bibliotheca juris canonici manuscripta*, in " Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften „, Wien, LIII Band, 1866, pp. 377-379 (cinque codici giuridici) e dal REIFFERSCHEID: *Bibliotheca patrum latinorum italica*, " Idem „, Wien, 1871, II Band, pp. 221-241 (codici patristici).

(3) Enrico de Cornibus, di Candia Lomellina, prevosto di Casale, canonico d'Ivrea dal 1414, succedette nell'arcipretura d'Ivrea al canonico Giacomo de Pomariis quando questi nel 1427 fu eletto vescovo; morì l'8 maggio 1428.

Giorgino de Balbis, di Chieri, cantore (1), Giovanni di Andrate (2), Giovanni Rampono (3), Pantaleone di Castelletto (4), Giovanneto di Castagnole (5).

È scritto in forma sufficientemente chiara e d'una mano sola, che per altri documenti si può riconoscere del canonico Giorgino dei Balbo di Chieri; la lingua non è certo umanistica anzi nemmeno corretta.

Ignorasi quale occasione abbia mosso il Capitolo alla lodevole deliberazione, la quale non dovette tuttavia essere soltanto casuale, bensì piuttosto forse aver carattere sistematico, poichè l'inventario stesso conserva traccia e notizia specifica di una revisione fatta di ciascuna parte della suppellettile della Chiesa, e quindi anche dei libri, otto anni più tardi, cioè nel 1435, dal prevosto stesso della cattedrale (6) e dai canonici Giovanni di Andrate e Giovanni Regrutò (7).

La coincidenza della data dell'inventario con quella dell'assunzione al vescovado di Ivrea di Giacomo de Pomariis potrebbe per avventura non essere fortuita (8); anche la data della revisione dell'inventario cade ancora sotto il vescovado di lui. Giacomo, figlio del fu Vecellio de Pomariis, da Brusasco, prima di salire alla cattedra episcopale nel 1427, fu già dal 1393

---

(1) Giorgino Segnorino de Balbis, di Chieri, canonico cantore d'Ivrea dal 1423; canonico pure di S. Maria della Scala di Chieri; morto il 6 febbraio 1459.

(2) Giovanni de Burgo, di Andrate, canonico di Ivrea dal 1414; morto nel settembre 1438.

(3) Giovanni de Textoribus alias de Rampono, di Fiorano, canonico di Ivrea con aspettativa di prebenda dal 15 novembre 1421, canonico effettivo dal 17 novembre 1422; morto il 4 luglio 1447.

(4) Pantaleone figlio di Antonio di Castelletto, in territorio di Settimo Vittone, canonico d'Ivrea dal 1426 (?); morto il 12 giugno 1451.

(5) Giovanneto de Canevosiis, di Castagnole Piemonte, canonico d'Ivrea dal 1423; morto il 6 agosto 1450.

(6) Prevosto della Cattedrale di Ivrea era nel 1435 Giovanni di Parella dei conti di San Martino, canonico di Ivrea dal 1423, eletto poi nel 1437 vescovo della stessa città.

(7) Giovanni de Regrutis, di Montalto, canonico di Ivrea dal 1428; morto il 10 gennaio 1470.

(8) Giacomo de Pomariis succedette a Bonifazio di S. Martino della Torre l'8 gennaio del 1427 e morì nel 1437 (Eubel C., *Hierarchia catholica medii aevi*, tom. I, Monasterii, 1898, p. 298).

canonico della stessa cattedrale di Ivrea; per alcuni documenti appare ch'egli godeva di grande autorità presso i colleghi, sia in materia ecclesiastica quando ebbe parte nelle trattative con Amedeo VIII per l'estirpazione dello scisma d'Occidente (1), sia in materia amministrativa per lo zelo mostrato al buon ordine della proprietà capitolare.

Come vescovo il de Pomariis legò ancora il suo nome alla biblioteca capitolare col prezioso messale " scriptum in civitate " Yporiensi per nobilem Bertolotum de Maynis de Mediolano " sub anno 1436 „. Il messale fu poi, dopo la morte del donatore avvenuta nell'anno 1437, fatto terminare nel 1443 dal canonico Giorgino de Balbis (2), che forse per la fiducia particolare del vescovo era stato tra i delegati dell'inventario, ed anzi l'estensore del medesimo. L'ipotesi che l'inventario generale della cattedrale d'Ivrea nel 1427 possa essere stato ordinato o perlomeno ispirato dal vescovo, se non è per tutte queste circostanze assodata, non appare tuttavia del tutto inverisimile.

Per maggior agio nei richiami ho dato a ciascun capoverso, o meglio libro indicato nell'inventario un numero progressivo, mentre nell'originale così i codici come gli arredi sacri registrati non recano numerazione alcuna. Il difetto di una numerazione o segnatura proverebbe che detti codici non erano ordinati con un criterio qualsiasi o precedentemente catalogati.

Difatti nemmeno appaiono i libri conservati tutti insieme, bensì parte in sacrestia, e cioè quelli impiegati nell'uso quotidiano del culto, parte invece in " thesauro ecclesie yporiensis „.

Anche nel nostro inventario l'elenco dei codici è fatto piuttosto a caso, ossia per gruppi frammezzati da serie di oggetti di altra maniera, anzichè con un criterio cronologico, o divisione per materia, o comunque altrimenti.

La parola e il concetto di biblioteca, come noi l'intendiamo, adunque, nell'inventario quattrocentesco non appare affatto.

E tuttavia l'inventario stesso è, secondo la ragion dei tempi, redatto con abbastanza diligenza nella descrizione delle

---

(1) Per la parte di Amedeo VIII nello scisma cfr. A. Segre, *I Conti di Savoia e lo scisma d' Occidente (1378-1417)*, in " Atti della R. Accademia delle scienze „, vol. XLII, 17 marzo 1907.

(2) Peyron, opuscolo citato; Bollati, CI; Professione, 110.

opere, e al confronto di altri antichi inventarii di libri avanti ricordati offre anche qualche pregio superiore ai comuni.

Di alcuni codici è registrata o si può perlomeno indurre la provenienza.

Non è improbabile che il graduale " vocatum novariense „ ed il " liber omeliarum evangeliorum qui dicitur novariensis „, di cui ai nn. 6 e 25, dovessero a Novara la loro provenienza materiale, se pure la denominazione non significa che furono esemplati su archetipi novaresi. Ricorda un dono fatto in vita o ricevuto in eredità, il " liber fratris Jacopini „, di cui al n. 19. Sappiamo infatti che l'autore del libro ascetico, ora smarrito, Jacopino de Regona, nobile e ricco cremonese venuto in Ivrea verso la fine del secolo XIV per condurre vita di recluso volontario, fece in Ivrea acquisti di terre, fece costrurre e adornò un oratorio intitolato a S. Giacomo, poi con successivi testamento e codicillo del 1295 (1) lasciava al vescovo Alberto Gonzaga (1289-1319 o 1320) (2) ogni suo avere, nominando tassativamente anche dei libri; dopo la rinuncia o la deposizione di Alberto Gonzaga al vescovado, rinnovò il Jacopino nel 1324 (3) la donazione generale delle sue sostanze al vescovo Uberto Solaro di S. Stefano Belbo (1322 (?)-1326) (4).

Più categoriche sono le notizie dell'inventario sugli acquisti o doni ricevuti a memoria dei canonici redigenti l'inventario stesso, così: il passionario acquistato da Bartolomeo de Ferrariis (5), di cui al n. 23, e i codici con munificenza veramente singolare lasciati in eredità da Antonio della Curseria (6), di cui ai nn. 35, 58, 148, 149, 150, 151, 152, 153.

Per contro la provenienza di altri codici, non solo certa ma famosa, come a cagion di esempio quelli del vescovo Desiderio e del vescovo Veremondo, di cui accennerò oltre, nell'in-

---

(1) Protocollo n. 4 dell'archivio capitolare di Ivrea, foglio 13 e foglio 29 verso.

(2) F. Savio, *Gli antichi vescovi d'Italia; Piemonte*, Torino, 1890, p. 219.

(3) Protocollo Rapicia, dell'archivio capitolare di Ivrea, foglio 12 recto.

(4) Eubel, op. cit., I, p. 297.

(5) Bartolomeo, figlio di Giovanni de Ferrarijs, di Biella, canonico di Ivrea dal 1423; morto il 16 dicembre 1453.

(6) Antonio, figlio di Giovannone della Curseria, cittadino d'Ivrea, canonico della cattedrale dal 20 novembre 1388; morì nel 1426.

ventario nostro non è affatto accennata, salvo indirettamente per il benedizionario di cui al n. 90.

Qualche barlume per la provenienza di alcuni codici, o perlomeno della sorte loro comune in precedenti ordinamenti si può ancora dedurre dalla descrizione dell'inventario, e sono quelli che registra come contrassegnati da lettere dell'alfabeto, di cui ai nn. 51, 52, 53, 54, 55, 71. Sono, come ognun vede, salvo l'ultimo, raccolti in gruppo, non so se a studio o per caso; epperò sono scarsi di numero, manca qualunque criterio di successione nella scelta delle rispettive lettere di segnatura (T. G. Y. S. B. R.); non si può supporre facilmente la dispersione dei codici segnati successivamente colle rimanenti lettere intermedie; inoltre non sono fra quei codici compresi quelli che con assoluta certezza furono i primi e ininterrottamente a far parte del tesoro della Chiesa di Ivrea. Per tutte queste ragioni parmi si possa escludere l'ipotesi che quelle lettere dell'alfabeto rappresentino la segnatura attribuita ai codici menzionati, in un ordinamento generale della biblioteca, anteriore al nostro inventario. Appare più ragionevole vedere in tale segnatura traccia della posizione che detti codici occuparono in altra biblioteca prima di pervenire al Capitolo d'Ivrea; lo stesso loro aggruppamento nell'inventario potrebbe confermarlo.

Non è possibile argomentare che rappresenti del pari un indizio sia pur tenue della provenienza la segnatura dei codici di cui ai nn. 59 (una testa umana), 60 e 136 (una croce), 129 (una mano con indice teso).

Dalla numerazione da me apposta a ciascun capo dell'inventario appare complessivamente un numero di opere assai ragguardevole e superiore a quello stesso dei codici oggi esistenti nella biblioteca.

La differenza del numero, che deve essere accresciuta dei codici che pervennero alla biblioteca dopo il 1435, rappresenta purtroppo l'azione deleteria del tempo.

Avvertirà tuttavia chi percorra l'inventario quattrocentesco che nei centocinquantasei numeri sono compresi anche quaderni e rotoli, che non sono propriamente codici ed oggidì vengono elencati tra i protocolli e le pergamene sciolte, come ad esempio i numeri 146, 147, 154-156, ecc.

Non tutti i numeri dell'inventario pertanto ho saputo e

potuto identificare coi codici attuali. Moltissimi indicati troppo vagamente con un titolo assolutamente generico, come “ missale „, “ antiphonarium graduale „, “ liber evangeliorum „, “ liber epistolarum „, “ psalterium „, “ bibbia „, “ breviarium „ etc., si potrebbero, anzichè individualmente, identificare per gruppi, come appunto alcuni ha elencato per gruppi soltanto anche il Bethmann (1).

Molte volte poi il titolo dato nell'inventario quattrocentesco è soltanto parziale e il codice contiene invece altre opere, oltre quella indicata, che meglio servirebbero a individualizzarlo: ad esempio gli stessi codici di Veremondo.

Fra i codici dell'inventario quattrocentesco non identificati, numerosi purtroppo sono quelli irreparabilmente distrutti o distratti. Per molti di quelli che l'inventario dice tenuti in sacrestia, l'uso quotidiano giustificherebbe abbastanza il consumo precoce. Per altri sarebbe ardua impresa avventurarsi nel gran pelago di mille ipotesi possibili.

Nè occorre che io metta in rilievo come, appunto e specialmente pei codici che oggi non sono più, riescono preziose le traccie che al futuro storico della biblioteca può offrire l'inventario che oggi vede la luce.

Di fronte a perdite dolorose, fra cui va segnalata a cagion d'esempio quella di un codice dell' “ Historia Langobardorum „ di Paolo Diacono, è tuttavia argomento di legittima compiacenza la identificazione nell'antico inventario di quei codici che formarono fin d'allora certamente e ancora oggidì costituiscono le gemme più preziose della raccolta.

L'enumerazione di questi codici particolarmente importanti della capitolare di Ivrea, anteriori o posteriori all'inventario del 1427, oggi esistenti, riuscirebbe oziosa, poichè non farei che ripetere cose dette già con sicura autorità da persone assai più competenti.

Però avendo ricordato dianzi colla scorta del nostro inventario alcuni donatori, vorrei pochi altri nomi aggiungere di benemeriti, per doni o comunque altrimenti, della biblioteca, oltre i vescovi Desiderio, Veremondo, de Pomariis, incidentalmente da me pure nominati già.

Legò un codice alla biblioteca capitolare il vescovo Alberto

---

(1) Op. cit., IX, nn. 116 a 129, già ricordato a pag. 6.

Gonzaga e non è da escludere l'abbia avuto da Papa Nicolò IV di cui era famigliare; forse è quello segnato nell'inventario al n. 142.

Tre codici, e precisamente il " liber de proprietatibus rerum „, di cui al n. 57, la " gemma animae „ unita alla " summa „ di Giovanni Beleeth, di cui al n. 144, e il " breviarium ad usum ecclesiae aurelianensis „, di cui al n. 140, provengono dall'eredità di Obertino de Bovolo da Pavone, dottore di diritto, canonico prevosto della cattedrale di Ivrea dal 1361, vicario generale successivamente dei vescovi Pietro de Chonde (1373-1399) e Bonifacio della Torre dei conti di S. Martino (1). Di fatto quei tre codici unitamente a parecchi altri libri ed oggetti di argenteria, quali dovevano essere venduti destinandone i proventi a certe elemosine, sono elencati nell'ultimo codicillo apposto al suo testamento rogato nei giorni 6, 12, 18 aprile dell'anno 1414, in cui morì (2).

Altra notizia leggiamo nel messale del XIV secolo, di cui il Bethmann al n. 56 e il Professione al n. 90, il quale " relictum " fuit per bone memorie episcopum Bonifacium capelle sancti " Georgij ecclesie maioris yporegiensis anno 1419 „; si tratta di Bonifacio della Torre dei conti di S. Martino, sopranominato, vescovo dell'obbedienza di Benedetto XIII dal 1399 al 1426 (1). Va notato il codice, di cui il Bethmann al n. 115, che reca il nome " Domnus Anthonius de Solerio de Carixio canon. Ipo-" regiensis „; fu costui cappellano di monsignor della Torre, rettore di S. Salvatore in Ivrea e canonico della cattedrale dal 1425 al 1447. Appartenne al canonico Magnino, curato di Chatillon, segretario di Amedeo VIII, canonico di Ivrea dal 1428 al 1440, un codice ch'egli quand'era ancora chierico studente acquistò a Padova: contenente componimenti profani, satire e canti gogliardici, descritto dal Bethmann al n. 15 e dal Professione al n. 80.

Un messale per la chiesa d'Ivrea fu incominciato a scrivere nel 1426 da Bertolotto de Maynis (già da noi ricordato pel mes-

---

(1) Secondo la serie dei vescovi d'Ivrea pubblicata dal canonico Domenico Garino [Manno A., *Bibliografia storica degli Stati della Monarchia di Savoia*, vol. VIII, Torino, 1907, pag. 294].

(2) Archivio capitolare di Ivrea, mazzo 40, n. 29.

sale del vescovo Pomario) " de mandato ac expensis omnibus " providi et discreti viri Bartolamei Gerii de sancto Martino " merchatoris Yporegie „ (Boll., CII; Prof., 111).

Molti altri nomi e molte notizie per la storia della biblioteca metteranno in luce ancora i codici eporediesi diligentemente esplorati, nonchè i protocolli così dell'archivio capitolare come dell'archivio vescovile di Ivrea.

Appunto dai protocolli spigolo ancora due belle testimonianze delle cure e dell'amore che per la biblioteca capitolare aveva un vescovo di Ivrea del secolo XV, voglio dire monsignor Giovanni di Parella degno successore di Giacomo Pomario (1437-1479) (1). Costui legò il suo nome a riparazioni importanti della cattedrale d'Ivrea: il cardinale Bessarione, legato apostolico presso la corte di Savoia, concedeva il 3 ottobre 1472 appunto per tali riparazioni al vescovo di esigere fino alla somma di 400 fiorini sopra i legati incerti (2). Orbene appunto questo monsignor di Parella, progettando già alcuni anni prima, la costruzione della grandiosa sacrestia, che anche oggi si ammira, benchè non compiuta secondo il disegno iniziale, intendeva che a questa fosse aggregata anche la biblioteca capitolare, ossia un locale dove potessero custodirsi i libri e anche raccogliersi gli studiosi per consultarli; voleva con ciò evitare il pericolo che sempre incombeva ad opere preziosissime per il prestito dei libri stessi a domicilio.

A tale scopo nell'anno 1469 strinse il vescovo un accordo col Capitolo (3), destinando egli per parte sua duecento ducati: " ... Cum prelibatus R. d.d. episcopus ypor. et comes, zelans " precunctis rebus divinis cultum et que eundem augere no" scuntur decorem ipsius ecclesie quem inter cetera censuit hoc " unum esse, sacristiam et bibliothecam unam apud ipsam ec-

(1) Eubel, op. cit., II, p. 186.

(2) Archivio capitolare d'Ivrea, mazzo 13.

(3) Archivio vescovile d'Ivrea, protocollo De Ayra 1457-1475, foglio 64 sgg.: " Instrumentum conventionum supra facienda sacristia et bibliotheca ypo" riensis ecclesie cum cessione iurium hereditariorum venerabilis capituli " competentium in bonis venerandi domini prepositi et liberatione ac con" fessione domini Jacobi de Alladio ac moderni domini prepositi de fruc" tibus prebende vacantis et hereditate quondam domini Anthonii de Al" ladio „.

" clesiam in qua possint paramenta preciosa, libri, calices et
" reliqui apparatus ipsius ecclesie recundi, et si sint viri stu-
" diosi se se in bibliotheca retrahere et studere absque periculo
" translationis librorum dicte ecclesie, valde opportunam et ne-
" cessariam affectaverit dudum et exortatione dulci invitaverit
" prefatos dominos canonicos et capitulum ad constructionem
" et perfectionem ipsius bibliothece et sacristie, offerendo semper
" se sustinere et facere pro rata eundem contingente in finem,
" et presentibus omnibus supra nominatis affectum suum effectu
" demonstrando, obtulit prefato venerabili capitulo ducatos du-
" centos quos solvere et exbursare convenit et promisit eidem
" cui voluerit onus dicte sacristie cum bibliotheca modo quo infra
" construende mediante auxilio et contributione ipsius venera-
" bilis capituli pro parte ipsum contingente suscipere „.

I canonici di fatto destinarono allo stesso scopo la parte loro spettante dell' eredità del defunto prevosto e i frutti dell'annata della prebenda vacante; cioè dell'eredità " nunc " quondam bone memorie domini Anthony de Alladio ex comi- " tibus Sancti Martini prepositi et canonici dicte ecclesie ypo- " riensis (1) tam adversus spectabilem et generosum dominum Ja- " cobum de Alladio ex prefatis comitibus, fratrem dicti quondam " domini prepositi, quam quoscumque alios ipsius hereditatis et " bonorum detentores vel possessores seu occupatores, libris " dumtaxat ipsius venerabilis capituli quos ad prefatum do- " minum Jacobum reperiri contigerit et ipsi venerabili capitulo " reservatis „. Abbiamo in quest'ultima riserva traccia della forma purtroppo liberissima, troppo libera e vaga, del prestito individuale dei libri che il documento stesso poco avanti segnalava pericoloso. Non è troppo azzardato attribuire a quella causa, che forse non si riuscì a dirimere, la spiegazione della scomparsa di parecchie delle opere registrate nell'inventario del 1427-1435; il guaio poteva essere anche assai anteriore al secolo XV, e non è da escludere neppure che possa avere esso contribuito alla deliberazione di redigere appunto lo stesso inventario.

(1) Antonio d'Agliè dei conti di S. Martino, canonico di Ivrea dal 1431, prevosto della cattedrale stessa di Ivrea dal 1437 dopo la promozione di mons. di Parella al vescovado, canonico pure di Ginevra e di Losanna, morto nel marzo del 1468.

Nel progettare un locale speciale per la custodia dei libri e per la consultazione dei medesimi, oltre lo scopo di evitare gli abusi del prestito male organizzato, il nobile vescovo di Ivrea si proponeva per avventura altra mira anche più vasta. Forse con occhio sagace il Parella prevedeva le conseguenze dell'invenzione della stampa per l'incremento delle biblioteche e degli studi; forse — e perchè no? — sognava egli di conservare o meglio rinnovare in Ivrea i mezzi per cui essa ancora potesse gareggiare negli studi con altre città subalpine, come già un tempo!

Non sappiamo per quali ragioni il progetto di monsignor di Parella riguardo alla biblioteca non siasi compiutamente effettuato Egli bensì da parte sua non mancò al sogno di dare alla biblioteca incremento. Lo dimostra il suo testamento rogato il 30 marzo dell'anno 1479 (1), dove leggesi: “ Item legavit et iure legati “ reliquit eidem ecclesie (2) quinque volumina expositionis littera- “ ralis fratris Niccolay de Lyra super veteri et novo testamento “ stampata et impressa in papiro, ligata et cooperta. Item ca- “ thenam auream beati Thomae de Aquino in duobus volumi- “ nibus stampatam impressam, ligatam et coopertam ut supra. “ Item universum historialem in quattuor voluminibus magnis “ stampatis, impressis, ligatis et coopertis ut supra. Item ratio- “ nale divinorum [officiorum] stampatum in papiro. Statuens et “ mandans eosdem libros uniri et apponi in libraria dicte ec- “ clesie per artificem illius videlicet M. Ponzinum capiendo “ postes alberarum repositos in episcopali palatio per ipsum re- “ verendum episcopum preparatos. Item breviarium unum quod “ scribi fecit in carta per venerabilem presbiterum Anthonium “ Cortesium capellanum suum, iubens illum expleri et ligari cum “ una catena ferrea in coro ipsius ecclesie „.

Così forse i primi incunaboli entrarono ad arricchire la biblioteca di cui ci occupiamo (3).

---

(1) Archivio capitolare, protocollo De Ayra, f. 123: è dello stesso notaio che il protocollo avanti citato dell'archivio vescovile. — Monsignor Giovanni di Parella moriva il 7 aprile dello stesso anno 1479.

(2) La cattedrale di Ivrea.

(3) Le benemerenze di alcuni ecclesiastici del secolo XV verso la biblioteca di Ivrea ci richiamano al pensiero un ecclesiastico del tempo e di terra canavesana, il prete Antonio Rovaria, dottore di diritto canonico, il quale nel 1475 donava appunto all'ospedale e alla cappella della nativa Borgo d'Ale, unitamente ai suoi beni mobili e immobili, parecchi libri; il

Nel por termine alle poche spigolature, riguardanti sopratutto il secolo XV, precorro alcune delle conclusioni che il futuro storiografo sarà per concretare intorno all'origine e alle vicende della biblioteca capitolare di Ivrea.

Anzitutto i primi nuclei di codici o di libri, e ad ogni modo sempre i codici più preziosi, sono di origine vescovile.

In secondo luogo appare fin dall'origine la comunanza della biblioteca e dell'archivio capitolare, considerati ancora nel secolo XV, e nello stesso progetto del Parella, come parte del tesoro della cattedrale; lo provano il catalogo sommario degli instrumenti del capitolo e la raccolta dei medesimi instrumenti frammischiati ai codici nell'inventario generale quattrocentesco, nonchè l'elenco dei codici nell'inventario stesso frammezzato dall'enumerazione di oggetti di affatto diversa natura.

Poche relativamente erano nel secolo XV, e nei posteriori ancor meno, le opere esorbitanti dalle discipline ecclesiastiche.

Recentemente il canonico Romualdo Pastè della Cattedrale di Vercelli, scrivendo alcuni appunti sull'origine e sulle vicende di quell'archivio capitolare (1), ha proposto l'ipotesi, del resto ragionevolissima e già per altri luoghi dimostrata, per cui la storia di molti codici e specialmente quelli di discipline profane si riattaccherebbe alla storia delle scuole che diedero lustro nel Medioevo alla città di Vercelli.

Sulle scuole e sulla cultura medievale in genere, anche nel riguardo della civiltà italiana, si è accumulata da un trentennio circa amplissima copia di ricerche, oltre quelle notissime dell'Ozanam (2), del Giesebrecht (3), del Savioli (4), del Novati (5),

---

documento relativo fu pubblicato da Antonio Manno, *Alcuni cataloghi di antiche librerie piemontesi*, in " Miscellanea di storia italiana ", tomo XIX (S. 2, IV), Torino, 1880.

(1) Nell'" Archivio della Società vercellese di storia e d'arte ", anno I, fasc. I, 1909.

(2) *Documents pour servir à l'histoire littéraire d'Italie depuis le VIII^e siècle*, Paris, 1850. — *Le scuole e l'istruzione in Italia nel Medioevo*, Milano, 1858 e " Biblioteca crit. " di F. Torraca, n. 2, Firenze, Sansoni, 1895.

(3) *De litterarum studio apud italos primis medii aevi saeculis*, Berolini, 1845, traduz. ital. di G. Pascal, nella " Bibl. crit. " di F. Torraca, n. I, Firenze, 1895.

(4) *L'istruzione pubblica in Italia nei secoli VIII, IX, X*, parte I (nella " Biblioteca crit. " di F. Torraca, n. 25), Firenze, Sansoni, 1898.

(5) *L'influsso del pensiero latino sopra la civiltà italiana del M. E.*, Milano, 1899.

più comunemente citate. Basta percorrere i repertorii bibliografici del Denifle (1), del Roger (2), del Gabotto (3), del Barsanti (4), del Manacorda (5), ecc.

Osserva Giuseppe Manacorda, nella sua ultima rassegna di bibliografia scolastica, che avviene oggi per la storia dell'insegnamento quello che in grande accadde molto tempo addietro alla storia letteraria in genere: le sintesi vaste ed audaci precorsero le monografie, le quali per le singole scuole tuttora mancano, o sono assai povere di materiale, ad illustrazione definitiva di questa o quella scuola locale.

La biblioteca capitolare di Ivrea, che quale a noi pervenne non può certo competere per importanza e numero di codici con altre maggiori, quelle di Vercelli e di Novara ad esempio, ha tuttavia con queste e con le altre dell'Italia superiore vicende simili e parallele. Senza dubbio nei codici eporediesi si possono e si debbono seguire le traccie non solo per la storia della chiesa ma eziandio per quella degli studi nella nostra città. Basterebbero essi, indipendentemente da qualsiasi altra precisa notizia, a dimostrare come sia stata Ivrea un centro fiorente di studi. Che se quivi manchino quei palimsesti di cui altre biblioteche vanno famose, già ne traeva il Peyron, con arguta spiegazione, argomento anzi e prova di largo mecenatismo: " Ivrea non era come Bobbio divisa dall'orbe, chè anzi i suoi marchesi e quindi il comune vi facevano provvidamente affluire quanto occorreva per una vita secondo quei tempi agiata, quindi le nuove e belle pergamene non vi mancarono mai „ (6).

La scarsezza poi dei codici di materie profane in confronto di più numerosi conservati in altre biblioteche capitolari, non

---

(1) *Die Entstehung der Universitäten des Mittelalters bis 1400*, Berlin, 1885.

(2) *L'enseignement des lettres classiques d'Ausone à Alcuin. Introduction à l'histoire des écoles carolingiennes*, Paris, Picard, 1905.

(3) *Supplemento al dizionario dei maestri che insegnarono in Piemonte fino al 1500*, in " Bollettino storico-bibliografico subalpino „, XI, 1-2, 1906.

(4) *Il pubblico insegnamento in Lucca dal secolo XIV alla fine del XVIII*, Lucca, 1905.

(5) *Studi di storia universitaria e scolastica*, in " Studi storici „ del Crivellucci, XIII, 2, 1904 — e *Rassegna degli studi sull'antico insegnamento italiano*, in " Giornale storico della Letteratura Italiana „, XLIX, 1, 1907.

(6) Op. cit., pag. 20.

potrebbe essere definitivo argomento per valutare la minore importanza della scuola eporediese, ove si considerino le mille cause che possono aver determinata la dispersione di tali codici posseduti per avventura in maggior copia dapprima, e spariti specialmente dopo che la fortuna della scuola episcopale eporediese tramontò in epoca che non è facile per ora precisare.

Nominando la scuola episcopale d'Ivrea il pensiero corre subito all'età carolingica e al capitolare di Lotario dell'825 (1) notissimo, il quale, mentre fa dipendere varie città dell'Italia superiore dalla scuola di Dungalo a Pavia, accorda ad Ivrea una certa autonomia: " In Eporea ipse episcopus hoc per se " faciat ".

Anche prima dell'età carolingica dovette forse Ivrea non essere priva di buone tradizioni negli studi.

Non possiamo qui indagare se i frammenti di un ricettario di medicina, attribuiti dal Mommsen (2) al VII secolo, rappresentino un codice originariamente appartenente a scopo di studio alla chiesa d'Ivrea, o pervenutovi chissà come e quando, avanzo forse di un naufragio (3).

Indipendentemente da ipotesi vacillanti, soccorre come una buona traccia di studi in Ivrea, se non di una vera e propria scuola, il codice della regola pastorale di S. Gregorio scritto con eleganza in Ivrea verso il 690 (4) pel vescovo Desiderio, " Desiderius papa " (680). Così, due secoli dopo, i versi latini composti da un Agifredo in lode del vescovo d'Ivrea Azzone (876 o 877?), benchè rozzi assai, sono documento della cultura locale (5).

---

(1) Muratori, *Rerum It. Script.*, I, p. II, e Pertz, *Mon. Germ. Hist.*; *Leges*, I, 249.

(2) Teodoro Mommsen fu due volte a studiare i codici della capitolare d'Ivrea: nel 1871 per trascrivere appunto l'indice del ricettario medico, e nel 1899 per copiare pagine del codice teodosiano, che disse anteriore a quello di Parigi, mentre prima lo riteneva posteriore.

(3) Il Bethmann ne parla nel suo inventario al n. 92.

(4) Bethmann, " Archiv ", IX, pp. 611-613; XII, p. 594.

(5) Dümmler, *Gesta Berengarii*, Halle, 1871, pag. 75: " ein Gegenstück " sehr abweichender Art zu den kunstreichen Gedichten auf Berengar und " Adalhard bilden die rohen Verse, welche ein Schreiber Agifred der " Sammlung Pseudisidors in der Foliohandschrift n. 83 des Capitels von " Ivrea am Schlusse hinzufügte ". — Il codice che li contiene è quello segnato nel nostro inventario al n. 53; Beth., 83; Boll., LXXXIII; Prof., 29.

Traccia luminosa oggi ancora, dopo nove secoli, splende nell'opera del vescovo S. Veremondo (969-1001 o 1002). La fierezza dell'uomo politico, che contrastò con re Arduino fino alle misure estreme della scomunica contro di lui e della sua famiglia, e la pietà del santo hanno attirato la curiosità delle ricerche storiche moderne, a preferenza delle benemerenze insigni ch'egli acquistò come canonista e come poeta (1). Se varii canoni e decreti di lui, secondo l'affermazione del De Gregory (2), per causa di una pestilenza furono perduti, basta quanto ce ne conservano i codici famosi che da lui prendono nome a consacrare la sua fama letteraria e a darci sicuro indizio che il patrizio vercellese della famiglia degli Arborio continuò le belle tradizioni della scuola eporediese (3) e le diede incremento, recandovi l'influsso dei proprii studi compiuti a Vercelli e a Pavia (4).

Non per nulla Benzone nel “ Panegyricus ad Henricum „ (5) paragona Veremondo al vescovo Leone di Vercelli e conclude

---

(1) Gallizia G., *Atti dei santi dei dom. di Savoia*, Torino, 1756, III, 342-347. — Massa V. G., *Diario dei santi negli Stati di Savoia*, Torino, 1815, I, 115. — Saroglia, *Eporedia sacra*, Ivrea, 1877. — Arborio di Gattinara D., *Memorie istoriche del Beato Warmondo Arborio vescovo d'Ivrea*, Torino, 1841. — Provana L. G., *Studi critici per la storia d'Italia ai tempi di Arduino*, Torino, 1844. — Moreno L., *Vita di S. Veremondo Arborio vescovo d'Ivrea nel sec. X*, Ivrea, 1858. — *Festeggiamenti e discorsi per l'inaugurazione dell'officio divino in onore di S. Veremondo*, Ivrea, 1859. — Savio F., *Gli antichi vescovi d'Italia*, Torino, 1899, I, 190-196. — Gabotto F., *Un millennio di storia eporediese* (“ Biblioteca storica subalpina „, vol. IV), Pinerolo, 1900, pp. 19 e segg. — Baudi di Vesme B., *Il Re Ardoino e la riscossa italica contro Ottone III ed Arrigo II* (“ Id. „, vol. VII), Pinerolo, 1900.

(2) *Storia della vercellese letteratura ed arti*, Torino, 1819: distribuzione II, quadri IV e V, p. 211.

(3) Dümmler, *Anselm der Peripatetiker nebst andern Beiträgen zur Literaturgeschichte Italiens im eilften Jahrhundert.* Halle, 1872, p. 83.

(4) Il canonico Garino vorrebbe trovare una prova degli studi fatti da Veremondo a Pavia in un codice di lui, e precisamente l' *Orationarium* (Bethmann, n. 3; Bollati, III, Professione, 7), in cui, come dice l'inventario del 1427, al n. 103, sono “ circa medium litanie ubi nominantur plures sancti “ nobis incogniti „. Tra quei santi vanno segnalati con prevalenza i patroni di parecchie città dell'Italia superiore; però precedono quasi a titolo d'onore e di seguito sei santi venerati a Pavia.

(5) *Mon. Germ. hist.*, XI, 637, citato dal Gabotto in *Eporediensia: Un millennio di storia eporediese*, l. c.

“ sub Leone et Warmundo fuit aetas aurea „ ; questa specie di apoteosi noi non vogliamo attribuire solo ai fasti politici.

Benzone nel passo che ricordiamo rivolge le sue parole come invocazione e monito ad Ogerio, appunto come erede delle gloriose tradizioni nella cattedra vescovile d'Ivrea (1075-1094)(1). Fu invero costui uomo pure di squisita cultura letteraria, autore di poesie di argomento profano, poesie erotiche, le quali contengono reminiscenze di scuola.

Se dall'età dei codici eporediesi non liturgici, oltrechè dai fatti preaccennati, vogliamo trarre indizio sulla fortuna della scuola episcopale, dobbiamo confermarci nell'opinione che il periodo di maggior splendore anzichè nell'età carolingica sia stato piuttosto nel secolo X e successivi (2). Del resto l'importanza che la sede vescovile d'Ivrea conservò politicamente nei secoli XI-XIII (3) non rende troppo inverosimile l'ipotesi che anche lo studio eporediese per mecenatismo dei vescovi possa essersi conservato fiorente.

La luce del genio antico si spegneva gradatamente dal tempo delle invasioni barbariche in Occidente, l'aurora dei tempi moderni tardava ad apparire. E tuttavia anche in quei secoli meno favoriti restava come un barlume: è bello seguire quella tenue luce, osservare come cresce talora, e talora con alterna vicenda s'abbassa e par che si spenga!

---

(1) F. Savio, op. cit., p. 201-202.

(2) Al X ed XI secolo attribuisce il Bethmann, oltre i codici di Veremondo, di cui il suo catalogo ai numeri 4, 18, 20, 26, 61, 85, 86, 99, gli antichi canoni di cui ai nn. 37, 42, 74, 75, 83, 94, 100, i codici con antiche note di cui ai nn. 2, 42, 60, 106, il testo di Marziale, le ricette mediche di cui al n. 80, ecc., ecc. [“ Archiv von G. Pertz „, Band XII, 1874: 594].

(3) Gabotto F., *Le carte dell'archivio vescovile d'Ivrea fino al 1313*, vol. I e II (“ Biblioteca storica subalpina „, V e VI), Pinerolo, 1900.

Inventarium mobilium ecclesie iporegiensis factum sub anno domini MCCCCXXVII.

Anno a nativitate domini MCCCCXXVII

Sequitur repertorium sive inventarium bonorum mobilium et ecclesiasticorum ecclesie maioris yporiensis factum anno quo supra die XXIII mensis aprilis, per venerabiles dominos Henricum de Cornibus archipresbiterum, Georginum de Balbis de Cherio cantorem, Johannem de Andrate, Johannem Ramponum et Panthaleonem de Castelleto canonicos et Johannetum de Castegnolis canonicos yporiensis ecclesie per capitulum eiusdem ecclesie ad hoc specialiter deputatos

Segue un elenco di oggetti per il culto.

A foglio 7 verso:

Anno domini MCCCCXXXV die decima septembris in presencia venerabilium virorum dominorum: prepositi Johannis de Andrate et Johannis Regrutis canonicorum fuerunt omnia suprascripta consignata et presentata per presbiterum Arditionem de Ansermo et Petrum de Agladio sacristas (1).

A foglio 8°:

Sequuntur libri in sacristia

Primo

1. Missale unum pro maiori altari
2. Item aliud missale ad altare apostolorum Petri et Pauli
3. Item aliud missale de grossa littera ubi non sunt nisi orationes et collecte cum quibusdam missis votivis quod alias vocatum fuit missale viride (2)
4. Item graduale maius novum
5. Item aliud graduale copertum de coreo rubeo parvum
6. Item aliud graduale vocatum novariense

7-8. Item duo antiphonaria quibus utimur cotidie (3)

9. Item liber evangeliorum quo utimur omni die cum hymnariis
10. Item unus liber epistolarum quo utimur omni die (4)

---

(1) La traccia della revisione del 1435 è ripetuta a ciascuna parte dell'inventario.

(2) I numeri 1, 2, 3 si possono identificare in gruppo rispettivamente col Beth., 46, 56, 73; Boll., LVI, LXIII, XCV; Prof., 90, 96, 100.

(3) Beth., 64, 116-129; Boll., LXIV e LX; Prof., 62 e 91.

(4) Beth., 68; Boll., LXIII; Prof., 71.

11-12. Item duo psalteria quibus utimur omni die (1)
13-14. Item alia duo psalteria unius litterae (2)
15. Item aliud vetus deauratum (2)
16-17. Item duo bibliae una nova parva et alia maior et vetus (3)
18. Item breviarium applicatum cum cathena (4)
19. Item liber fratris Jacopini applicatum cum alia cathena (5)
20. Item breviarium grossum sine psalterio vocatum registrum (6)
21. Item passionarium vetus (7)
22. Item passionarium novum (8)
23. Item alius liber passionarium emptus noviter a domino Bartolomeo de Ferrarijs copertus coreo albo (2)
24. Item omeliarum Aymonis super evangelijs
25. Item alius liber omeliarum evangeliorum qui appellatur novariensis
26. Item alius liber vetus appellatus Gregorius omeliarum evangeliorum
27. Item alius liber appellatus Gregorius juvenis (9) super omelijs evangeliorum et circa finem plures legende tam de adventu Domini quam de sanctis scriptus littera francigena nova (10)
28. Item liber pilosus ubi est in principio officium sancti Thome Canturiensis et circa finem lamentationes Jeremie prophete
29. Item alius liber de natalitijs sanctorum vocatus liber prime (11)
30. Item liber plurium orationum vocatus Regaldus (12)
31. Item liber legendarum sanctorum Savini, Bessi et Teguli etc. (13)

---

(1) Beth., 44, 115; Boll., XLVI, LXXIII; Prof., 87, 98.

(2) I nn. 13, 14, 15 e 23 appaiono come aggiunti nella revisione del 1435.

(3) Una delle due bibbie si può identificare con Beth., 48; Boll., XLVIII; Prof., 69.

(4) Questo codice ed il seguente ci richiamano alla mente l'uso medievale di tenere in sacrestia il breviario ed altri libri di preghiera legati ad una catenella, per uso dei sacerdoti specialmente, e per evitarne la perdita. L'uso vige tuttora in alcune case religiose.

(5) Beth., 96; Boll., XCVI; Prof., pag. 1.

(6) I nn. 18, 20 corrispondono indifferentemente con Beth., 9, 81; Boll., XIX, LXXXI; Prof., 56, 92.

(7) Beth., 66; Boll., CXII; Prof., 55.

(8) Beth., 105; Boll., CV; Prof., 104.

(9) Strana l'appellazione di *Gregorius iuvenis* per indicare un codice recente delle omelie di S. Gregorio in opposizione al *liber vetus* del numero precedente.

(10) Beth., 62; Boll., LXII; Prof., 61.

(11) Notevole la denominazione " liber prime „ (cfr. anche il n. 91) ossia libro che serve " a prima „ nella recita dell'uffizio divino, per indicare il martirologio. — Beth., 58; Boll., LVIII; Prof., 39.

(12) Oberto Regaldo.

(13) Beth., 49; Boll., CVIII; Prof., 73.

32. Item liber quarundam omiliarum evangeliorum vocatus stangardus sive liber perforatus (1)
33. Item hymnarius vetus ubi est ludus trium Regum (2)
34. Item magnus liber sine assidibus ubi sunt plures legende sanctorum (3)
35. Item liber copertus coreo viridi legendarum quem reliquit d. Anthonius de Curseria canonicus olim (4)
36-37. Item duo libri sequentiarum notatarum unus novus alius vetus
38. Item libri tres processionum
39. Item liber orationum qui dicitur manualis (5)
40-41. Item duo parvi libri invitatoriorum notatorum
42. Item liber unus benedictionum baptizandi et oleandi (6)
43. Item liber qui appellatur ordo
44. Item liber anniversariorum (7)
45-46. Item duo quaterni litaniarum unus novus et alius vetus
47. Item liber unus ubi est absterget de pergameno (8)
48. Item liber Apocalipsis (9)

Sequuntur libri reperti in thesauro ecclesie yporiensis

49. Primo liber unus sancti Yeronimi super psalterio et vocatur liber expositionum psaltherij, copertus coreo bloveti copertura circumdata ornamentis et grossis clavibus de lotono (10)
50. Item liber unus dialogorum sancti Gregorij vetus cum una poste ab uno latere integra cum pauca copertura rubea et ab alio latere cum parte minus media et tres folias primas laceratas
51. Item alius liber vocatus Augustinus de Trinitate, signatum de foris per literam T (11)
52. Item alius liber evangeliorum scriptus grossa littera non bene legibilis et clarus, signatum de foris per litteram G

---

(1) Si allude probabilmente ad un foro nella legatura per cui passava una catenella o una fune, la quale era assicurata alla parte opposta da una stanghetta, onde forse il nome di *stangardus*. — Beth., 59; Boll., LIX; Prof., 60.

(2) Beth., 23; Boll., XXXIII; Prof., 11. — Cfr. n. 154-156.

(3) Beth., 22; Boll., CVIII; Prof., 73.

(4) Beth., 108.

(5) Boll., XLVI; Prof., 86.

(6) Boll., X; Prof., 75.

(7) Beth., 51-52; Boll., LI-LII; Prof., 88-89.

(8) Nell'originale leggesi inoltre cancellata l'aggiunta: “ et alius in papiro de absterget „.

(9) Beth., 103; Boll., CIII; Prof., 53.

(10) Beth., 69; Boll., LXIX; Prof., 23.

(11) Beth., 77; Boll., LXXVII; Prof., 34.

53. Item alius liber Ysidori de moribus pontificum una cum canonibus Clementis pape et quorundam aliorum pontificum scriptus littera grossa et bene legibilis, signatum de foris per Y correctum (1)
54. Item alius liber conciliorum antiquorum in quo continentur in principio canones apostolorum primo de ordinatione episcopi, signatum de foris per S cum assibus novis sine copertorio (2)
55. Item alius liber grossus vocatus liber Brucardi (3) de ordinatione ecclesie et statu eius, signatum de foris per literam B (4)
56. Item liber epistolarum Pauli glosatus (5)
57. Item alius liber de proprietatibus rerum (6)
58. Item ambreviarium unum novum secundum usum yporiensem, scriptum manu quondam domini Anthonij de la Curseria eiusdem ecclesie yporiensis (7)
59. Item alius liber Sancti Augustini qui appellatur speculum qui sic incipit: quis ignorat, signatum per [una testa umana di profilo].
60. Item alius liber qui appellatur Rabanus de laudibus crucis Christi, signatum per ✠
61. Item alius liber vocatus liber artis musice circa principium versificatus (8)
62. Item alius liber qui appellatur Yeronimus super duodecim prophetis (9)
63. Item alius liber Augustini super quibusdam questionibus et expositio Remigij super Apocalypsi et caret principio, et incipit: ut substantie sue, in primo foleo dicti libri
64. Item alius liber qui appellatur Ysidorus ethimologiarum (10)
65. Item alius liber omeliarum evangeliorum, quod incipit: Ammonendi sumus (11)
66. Item alius liber sancti Yheronimi contra Iovinianum, quod incipit pauci admodum dies sunt (12)
67. Item alius liber in quo est quedam pars moralium super Job cui

---

(1) Beth., 83; Boll., LXXXIII; Prof., 29.
(2) Beth., 75?; Boll., XXXVIII; Prof., 20.
(3) Burcardo di Worms.
(4) Beth., 94; Boll., XCIV; Prof., 50.
(5) Beth., 43.
(6) Beth., 41; Boll., XLI; Prof., 84.
(7) Beth., 9; Boll., LXXII; Prof., 97.
(8) Beth., 84; Boll., LXXXIV; Prof., 52.
(9) Beth., 114; Boll., XCVII; Prof., 51.
(10) Beth., 53; Boll., XXXVII; Prof., 19.
(11) Beth., 61; Boll., LXXV; Prof., 43. — Si suppone scritto da Enrico vescovo d'Ivrea (1029-1059).
(12) Beth., 87; Boll., LXXXVII; Prof., 54.

desit principium et exordium; prima linea primi folei incipit et replevit eum spiritu timoris Domini (1)

68. Item alius liber XVII[us] Gregorij pape super Job et incipit: Quotiens sancti viri (2)
69. Item alius liber omeliarum Sancti Gregorij pape super Ezechiel (3)
70. Item alius liber Ysaye, Yheremie, Danielis, Johel, Amos, Abdie, Jone, Michee, Naum, Abachuch, Sophonie, Agey et Zacarie; et incipit prologus Sancti Yheronimj: Nemo etc. (4)
71. Item alius liber Bede omeliarum super pluribus evangelijs, et sic incipit: adventum dominice praedicationis etc.; signatum per R in primo folio (5)
72. Item alius liber expositionum sancti Ambroxij super Luca evangelista, et incipit: scripturi etc. (6)
73. Item alius liber qui appellatur Alcuinus super expositione psalterij, et incipit: sanctissimo (7)
74. Item alius pulcerrimus liber psalterij translatus de greco in latinum per sanctum Yheronimum, bene rubricatum cum magna cruce aurea intus, et cum litteris psalmorum capitalibus deauratis (8)
75. Item alius liber vetus certorum conciliorum qui incipit: ut vidue; et prima et secunda folia sunt desubter incise sive lacerate (9)
76. Item alius liber bonus de canonibus apostolorum cuius prima rubrica incipit: de ordinatione episcopi (10)
77. Item alius liber appellatus examen sancti Ambroxij, cuius est principium: tantum me opinionis etc.; et in primo foleo est imago depicta unius sancti sacerdotis induti casula (11)
78. Item psalterium unum pulcerrimum cum bona littera glosatum et intitulatum liber ymnorum vel soliloquiorum, et incipit: beatus vir etc. (12)
79. Item alius liber de sacramentis Pascasius condidit (13), et incipit: dilectissimis

---

(1) Beth., 90; Boll., LXV; Prof., 41.
(2) Beth., 65; Boll., XC; Prof., 47.
(3) Beth., 79; Boll., LVII; Prof., 38 (cfr. n. 95).
(4) Beth., 93 o 97; Boll., XCIII; Prof., 49.
(5) Beth., 24; Boll., XXIV; Prof., 36.
(6) Beth., 67; Boll., LXXVII; Prof., 70.
(7) Beth., 30; Boll., XXX; Prof., 16.
(8) Beth., 69; Boll., LXXXV; Prof., 30.
(9) Beth., 74.
(10) Beth., 75; Boll., LXXIV; Prof., 26.
(11) Beth., 70; Boll., XLIII; Prof., 57.
(12) Beth., 85; Boll., XLIV; Prof., 58.
(13) Nessuna delle opere conosciute di Pascasio Ratberto è così intitolata; lo stesso dicasi delle opere di Pascasio diacono del sec. VI.

80. Item alius liber legis Ripuariorum, et incipit primum capitulum: si quis etc. (1)
81. Item alius liber soliloquiorum Augustini de quantitate anime et eiusdem ad Yheronimum de origine anime, cuius primum capitulum incipit: quaedam huius operis (2)
82. Item alius liber evangeliorum vel textus quatuor evangelistarum, cuius principium est: Liber generationis; et appellatur novum testamentum (3)
83. Item alius liber de cursu lunari et solari et ceteris planetis et circha finem sequuntur certi canones conciliorum et caret exordio tamen, in primo foleo incipit solem terra esse maiorem (4)
84. Item alius liber computi in quo continetur kalendarium, cursus lune et capitula de naturis rerum (5)
85. Item alius liber qui appellatur pastoralis sanctorum Ambroxij et Gregorij, et incipit: si quis fratrum oraculum reminiscatur (6)
86. Item liber alius et textus evangeliorum qui incipit: secundum Marcum initium sancti evangelij domini nostri Jhesu Cristi filij dei sicut scriptum est in Ysaya propheta etc. (7)
87. Item alius liber qui appellatur pastoralis sancti Gregorij, qui incipit: pastorales cure; et est littera pessima illius libri et tamen clara (8)
88. Item alius liber pulcer ubi continetur benedictiones episcopales per totum annum cum litteris capitalibus deauratis, incipit: Deus (9)
89. Item alius liber cum rubricis aureis qualiter episcopus se ad missam preparare debeat (10)
90. Item alius liber benedictionum episcopalium cum capitalibus litteris et rubricis aureis, precedente maledictione in Ardoinum et Amedeum cum sequacibus eorum, qui erant predones et detentores rerum et bonorum donatarum per Imperatorem seniorem episcopo yporiensi Vuarmundo et eius ecclesie yporiensi etc. (11)

---

(1) Beth., 33; Boll., XXXIII; Prof., 4.
(2) Beth., 16; Boll., XVI; Prof., 65.
(3) Beth., 2; Boll., XXVIII o XXIX; Prof., 14 o 15 (cfr. nn. 86 e 133).
(4) Beth., 42; Boll., XLII; Prof., 6.
(5) Beth., 19? cfr. n. 91.
(6) Beth., 21; Boll., XXI; Prof., 68.
(7) Cfr. nn. 82 e 133; Beth., 99; Boll., XCIX; Prof., 32.
(8) Beth., 1; Boll., I; Prof., 1. È il famoso codice del vescovo Desiderio.
(9) Beth., 13; Boll., 20; Prof., 10.
(10) Beth., 4.
(11) Beth., 20; Boll., XX; Prof., 10. Nell'inventario nostro questo preziosissimo codice di Veremondo è messo in particolare rilievo mediante una mano con indice teso sottosegnata.

91. Item alius liber qui appellatur liber prime, ex una parte cum asside et ante principium sine poste, satis largum et grossum, cuius principium, non deductis sive positis rubricis et kalendario et repertorio, incipit: populus christianus (1)
92. Item antiphonarium unum notatum vetus et notatum notis muscarum pauci valoris (2)
93. Item alius parvus liber, graduale intermixtum cum antiphonario et notatum parvis notulis et pravis, cum principijs introituum et psalmorum, cum pluribus sequentijs
94. Item alius liber qui appellatur historie Longobardorum, primum capitulum incipit: Septentrionalis plaga
95. Item alius liber sancti Gregorij pape pulcer super Ezechiele ad Marianum episcopum directus, cum imagine sancti Gregorij depicto sedente et scribente, et incipit: dilectissimo (3)
96. Item aliud graduale cum notulis quasi muscarum (4), quasi vetus cum certis versiculis intromixtis, cuius principium: Ad te domine levavi etc.
97. Item liber unus ubi desuper principium prime pagine sive marginis est descriptus: Leges Karoli, in quo sunt plures constitutiones edite in concilijs ut in ipso libro continetur
98. Item alius liber pulcer copertus pano serico veteri, in quo contitinentur ordo ad benedicendum regem, consecrandum episcopum et multa alia delectabilia, qui intrascriptum ymaginibus est depictus (5)
99. Item alius liber laceratus ab extra et morsus a muribus, in quo continetur capitula episcoporum et regum francorum et incipit: Dominante per secula infinita omnium dominatore Christo salvatore nostro
100. Item alius liber pauci valoris, ordo ad dedicandam ecclesiam et incipit: primitus enim antequam pontifex etc.
101. Item alius liber in quo continetur epistule Pauli, prophetie et certi tractus, et est vetus, et incipit: Fratres, Paulus servus Jhesu Christi (6)
102. Item alius liber qui vocatur canonica ad Romanos, et incipit primum capitulum: De diebus vel mundi etatibus; cum una poste ab uno latere vetus multum

---

(1) Beth., 19? cfr. n. 84.
(2) Beth., 106; Boll., CVI; Prof., 33.
(3) Cfr. n. 69; Beth., 57; Boll., LXXVIII; Prof., 44.
(4) Cfr. nn. 92 e 93.
(5) Beth., 86; Boll., LXXXVI; Prof., 31.
(6) Beth., 43; Boll., XLIII; Prof. 57.

103. Item alius liber vetus parvi voluminis carens principio, cum una poste vetustissima in quo continetur plures devote orationes et circa medium litanie ubi nominantur plures sancti nobis incogniti (1)
104. Item alius liber mediocris voluminis de grossa littera, carens exordio et sine una poste ab uno latere, cuius tertia linea incipit: quamvis die dominico omnes lites etc.
105. Item alius parvus liber in quo continentur benedictiones episcopales, et est copertus coreo, et in principio prime pagine est descriptus: suspicamini fratres diligentes ut boni imitatores etc. (2)
106. Item alius liber parvus, vetus et fuscus, copertus pergameno, qui vocatur comentum Donati de maioribus partibus (3)
107. Item alius liber vetus cum una poste ab uno latere, cuius principium talis est et descriptus litteris grossis et bruxatus: In nomine Domini incipit prologus libri canonum (4)
108. Item libellus vetus et pessima littera cum plurimis vocabulis descriptis per alphabetum
109. Item alius libellus clarus in quo continentur videlicet legenda sancti Savini et dies in quibus capellani civitatis Yporedie tenentur venire ad officium in ecclesia majori
110. Item quaternum papiri hoc est officium sancti Teguli notatum
111. Item parvulus liber sequentiarum notatarum parvis notulis
112. Item alius liber sine postibus et coperturis qui vocatur comentum predicamentorum, et incipit in tercia linea: Expeditis hijs que ad predicamenta Aristotelis etc.
113. Item alius liber vetus sermonum responsoriorum notatorum et evangeliorum quando itur ad psalmos, copertus pergameno lacerato
114. Item alius liber consimilis sermonum
115. Item alius liber Jeronimi super cantica vetus et fuscus in pluribus locis et incipit: Tres libros Solomonis (5)
116. Item liber unus vocatus liber de agricoltura sine postibus, vetus et incipit: Flavij Vegetij Renati etc.
117. Item quaternetus unus in quo est notatum officium sancti Quirici
118. Item comunetum unum sanctorum vetus in papiro, nichil vel paucum valet (6)
119. Item alius liber pulcer et clarus copertus pergameno fodrato de

---

(1) Beth., 3; Boll., III; Prof., 7.
(2) Beth., 18.
(3) Beth., 7; Boll., VII; Prof., 105.
(4) Beth., 37; Boll., XCVIII. Cfr. pag. 6.
(5) Beth., 113; Boll., XXXIX; Prof., 21.
(6) In una nota marginale, scritta nella revisione dell'inventario fatta l'anno 1435, leggesi: " non reperitur ".

tella alba in quo continentur VII epistole canonice Jacobi apostoli et est glosatus, qui incipit: non ita ordo est apud Grecos etc.

120. Item alius liber sine postibus in quo sunt plures orationes et prephationes que non utuntur, cuius prima oratio dicitur in festo sancti Gaudentij

121-122. Item duo bibie veteres maior et minor et sine postibus que non sunt complete

123. Item alius liber vetus tractans circa principium de participijs et pronominibus, scriptus littera que non potest legi nec intellegi (1)

124. Item alius liber vetus de interpretationibus sine copertorio carens exordio, cuius prima linea incipit: precij nomine vilioris (2)

125. Item alius liber vetus, sine copertura, epistolarum et evangeliorum, cuius prima linea incipit: non revertetur ad me vacuum (3)

126. Item alius quaternus scriptus bona littera clara, in quo continentur constitutiones Clementis pape quinti, et incipit: Clemens episcopus etc.

127. Item lectura una domini Cyni pistoriensis super prima parte codicis clarus et desquaternatus, et incipit: Reverendo etc.

128. Item alius liber sine copertura, ubi sunt epistole Pauli glosate et caret principio, in principio prime pagine incipit: secundum opus eius (4)

129. Item alius liber cuius vocabolum ignoro, vetus, sine principio et sine copertura, mihi videtur quod est grammaticalis et glosatus partim. Signatus ☞ (5)

130. Item liber alius vetus et grossus carens principio in quo est passio sancti Georgij, cuius prima linea incipit: Qui per lignum et diabolum et mortem dampnati fuistis etc.

131. Item alius quaternus notatus de sanctis Gregorio, Benedicto, Bononio et multis alijs etc.

132. Item alius textus quatuor evangelistarum depinctus portis et ambis in principio et sine postibus (6)

133. Item alius liber sine copertura et sine principio vetus ubi est descriptus desuper: liber grossus in quo continetur omelie certorum evangeliorum (7)

---

(1) Beth., 12; Boll., XII; Prof., 77.
(2) Beth., 36; Boll., XXXVI; Prof., 18.
(3) Beth., 61; Boll., LXVI; Prof., 42.
(4) Beth., 78; Boll., LXXIX; Prof., 28.
(5) Beth., 82; Boll., LXXXII; Prof., 45.
(6) Beth., 26; Boll., XXVI; Prof., 12.
(7) Cfr. nn. 82 e 86.

134. Item alius liber sine copertura vetus et partim obscurus quatuor evangelistarum et non completus et incipit: liber generationis etc. (1)
135. Item alius liber vetus sine postibus et carens principio qui creditur esse Remigij super evangelijs secundum Johannem (2)
136. Item alius liber ..... circha finem ..... cuius prima linea prime pagine incipit: ..... (3) cui tale signum ✠
137. Item psalterium unum pravum vetus et parvum cum medietate assidum, partim desquaternatum, cuius prima linea prime pagine incipit: In te eripiar a temptatione; et caret principio
138. Item alius liber sermonum sive predicationum vetus sine postibus carens principio, cuius prime pagine prima linea incipit: Et in malivolam animam non intrabit sapientia
139. Item alius liber bonus ethimologiarum Ysidori, quod incipit videlicet prima epistola: Domino servo Braulioni episcopo Ysidorus etc.; et est cum postibus copertis coreo et imago unius sancti presbiteri et secunda folia depicta (4)
140. Item bonum ebreviarium bene clarum scriptum littera francigena et bona, ad usum ecclesie aurelianensis, cum psalterio, kalendario et responsorijs ac antiphonis notatis
141. Item liber unus vetus cum bona littera omeliarum sancti Gregorij pape, primo super evangelio secundum Lucam, erunt signa in sole et luna; cuius prohemium in prima pagina incipit: Reverentissimo, et est sine postibus
142. Item aliud pontificale bene clarum ubi in principio sunt adiuncte certe benedictiones pontificales, rubricatum principij ipsius libri incipit: ordo ad benedicendam ecclesiam. In quo continetur sermo in die Iovis sancti ante fores ecclesie: adest o venerabilis pontifex etc. Et vocatur pontificalis albus (5)
143. [Item] liber unus nuncupatus textus decretalium cuius prologus incipit: Quoniam; cum rubricis et est foliorum CLXXXVIII
144. Item liber unus nuncupatur gemma anime cuius exordium incipit: In castris eterni regis. Et in eodem libro continetur liber magistri Johannis Beleeth de doctrina ecclesiastica, et incipit: In primitiva ecclesia (6)
145. Item quaternus unus notatus cum certis Kirieleison et gloria in excelsis Deo cum evangelio videlicet liber generationis notatus et ceteris alijs notatis

---

(1) Beth., 28, 29 o 40; Boll., XL; Prof., 22.
(2) Beth., 25; Boll., XXV; Prof., 2.
(3) La scrittura delle parole omesse è cancellata per macchie di umidità.
(4) Beth., 53 (cfr. n. 641); Boll., LIII; Prof., 37.
(5) Beth., 13; Boll., XIII; Prof. 78.
(6) Beth., 8; Boll., VIII; Prof., 67.

146. Item liber unus autenticorum plurium instrumentorum ecclesie yporiensis et in principio dicti libri in medio octave linee est flos daelis pincta atramento et in quo continentur registra facta per Johannem de Pergamo de pluribus instrumentis pertinentibus ecclesie yporiensi et est scriptus in pergameno (1)

147. Item liber unus cum bonis postibus in quo continetur summarium registri instrumentorum bonorum immobilium et aliorum quam plurium pertinentium ecclesie yporiensi cum pluribus foleis incisis et despiglatis de dicto libro et est scriptus in papiro manu Johannis de Pergamo, cuius prima linea incipit: item plura instrumenta. Caret principio

Sequuntur libri relicti ecclesie yporiensi per venerabilem virum dominum Anthonium [Curseria ?] olim canonicum ecclesie yporiensis

148. Primo liber unus parvus scriptus in papiro ubi continetur in principio sermo in parasceve videlicet egressus Jhesus trans torrenten Cedron etc.

149. Item alius liber parvus cum postibus et clavis lotoni: de contemptu mundi, et incipit: Domino patri carissimo per portuensi episcopo etc. Lotarius indignus cardinalis etc.

150. Item alius liber parvus videlicet summa Johannis Belehet et in duobus ultimis foleis sequuntur rubrice dicti libri.

151. Item alius liber pulcer in quo continentur videlicet quedam introductoria ad loquendum in mensa etc. et incipit: quia honorificum est. Et ante principium ipsius libri est adiuncta legenda sancti Zenonis episcopi. Et in fine de coniuratione cuiusdam spiritus

152. Item alius liber qui incipit: sepius rogatus etc. Et in principio est adiuncta ratio pro versu qua hora luna debeat renovari

153. Item unus parvus liber coopertus coreo rubeo nuncupatur summa magistri Raymundi non glosatus

154-156. Item tres rotuli in quibus continetur ludus trium regum in Epiphania domini (2) et mihi placet.

---

(1) Si conserva tra i protocolli dell'archivio capitolare.
(2) Cfr. n. 33.

Relazione intorno alla memoria del D^r Angelo Taccone: *Contributi alla ricostruzione della Issipile euripidea.*

Egregi Colleghi,

La memoria su cui abbiamo l'onore di riferire concerne il nuovo testo classico che ha veduto la luce nel sesto volume dei papiri d'Oxyrhynchos, la Issipile euripidea: testo disgraziatamente assai frammentario perchè non s'è ricuperato che un sesto circa del dramma. Si adoperarono con acume e con fortuna gli editori, Bernardo Grenfell e Arturo Hunt, a ricostituirne la sceneggiatura e a riconoscere la forma del mito che Euripide aveva adottato. Ora il prof. Taccone che già s'era sperimentato sopra un altro dramma euripideo scoperto recentemente, l'Antiope, ha preso a studiare anch'egli i frammenti dell'Issipile. Pel mito ha fatto accurati e copiosi raffronti con le fonti letterarie e con le rappresentanze figurate; e per la composizione si è valso della profonda conoscenza che ha dell'arte euripidea istituendo continui e interessanti paragoni coi drammi conosciuti. Per tal modo egli ha tentato di distribuire la materia della Issipile in quattro anzichè in cinque episodî come avevano proposto gli editori. E oltre molte congetture su minuti particolari, ha messo innanzi alcune acute osservazioni intorno alla agnizione (ἀναγνωρισμός) con cui il dramma si chiude, ch'egli attribuisce unicamente all'intervento di Anfiarao. Inoltre movendo da una ipotesi del Hartung, ma eliminandone certe evidenti esagerazioni, ha cercato di determinare la parte che i figli d'Issipile avevano nel dramma. Questi, che andavano alla ricerca della propria madre e non l'avevano riconosciuta nella disgraziata ridotta da strane vicende schiava del re di Nemea e sul punto d'esser condannata a morte per la fine sventurata del fanciullo Ofelte affidato alle sue cure; questi, diciamo, secondo il Taccone avrebbero contribuito inconsapevolmente alla condanna della madre. La congettura è avvalorata da analogie desunte da altri drammi e dalla nuova interpretazione d'un passo

del frammento scoperto. Interessanti osservazioni fa poi il Taccone intorno al prologo. Egli è d'avviso che il discorso iniziale (ῥῆσις) fosse detto non da Issipile, come ritengono gli editori, ma da una divinità, perchè solo una divinità era in grado nel caso nostro di dare quell'accenno al futuro che, insieme col riassunto degli antefatti, è caratteristico dei prologhi euripidei. Questa divinità egli propenderebbe a ritenere fosse qui Nemea, la dea eponima del luogo dove il dramma si svolge.

Non tutte le osservazioni del Taccone possono esser tenute come certe, ed egli stesso non nasconde al lettore quanto v'ha sovente di congetturale nei suoi tentativi di ricostruzione. Ma questi tentativi ad ogni modo, fatti con acutezza e con piena padronanza dell'argomento e presentati in forma sobria e garbata, forniscono senza alcun dubbio un notevole contributo alla intelligenza del dramma euripideo. Ed aggiunge pregio al lavoro lo studio accurato delle attinenze tra la Issipile e la Tebaide di Stazio.

Per queste ragioni la commissione è d'avviso che la memoria del prof. Taccone sia ammessa alla lettura nella Classe.

Ettore Stampini,
Gaetano De Sanctis, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

Torino — Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e dei RR. Principi.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 9 Maggio 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: NACCARI, Direttore della Classe, SPEZIA, SEGRE, PEANO, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, GRASSI, SOMIGLIANA, FUSARI e CAMERANO Segretario.

Si legge e si approva l'atto verbale della seduta precedente.

I Soci MATTIROLO e PARONA scusano la loro assenza.

Il Presidente presenta in omaggio il lavoro del Socio straniero Ernesto HAECKEL intitolato: *Das Weltbild von Darwin und Lamarck.*

Vengono presentati per l'inserzione negli *Atti* i lavori seguenti:

1° Prof. Gino FANO: *Sulle varietà algebriche che sono intersezioni complete di più forme,* dal Socio SEGRE;

2° Prof. F. SIBIRANI, *Su la rappresentazione approssimata delle funzioni di più variabili reali e delle loro derivate per polinomi trigonometrici,* dal Socio SEGRE;

3° E. GATTI, *Ricerca intorno ad un particolare sistema telescopico,* dal Socio JADANZA;

4° Dr. L. COLOMBA: *Relazioni fra le densità e le costanti cristallografiche in alcuni gruppi di sostanze,* dal Socio SPEZIA;

5° Dr. G. Pagliero, *Geodetica di una superficie di rivoluzione,* dal Socio Peano;

6° Dr. Luigi Cognetti De Martiis: *Una curiosa alterazione anatomica-istologica in un Lombrico dovuta a Nematodi parassiti,* dal Socio Camerano.

Il Socio Somigliana presenta per l'inserzione nelle *Memorie* il lavoro del Dr. Ernesto Laura, intitolato: *Sopra i moti vibratori armonici semplici e smozzati di un corpo omogeneo, elastico, isotropo.* Il lavoro è affidato ai Soci Somigliana e Naccari perchè ne riferiscano all'Accademia.

Il Socio Camerano presenta per l'inserzione nelle *Memorie* il lavoro del Dr. E. Zavattari, intitolato: *I muscoli ioidei dei Sauri in rapporto con i muscoli ioidei degli altri vertebrati.* Parte I. Il lavoro viene affidato ai Soci Camerano e Fusari perchè ne riferiscano all'Accademia.

LETTURE

Sulle varietà algebriche che sono intersezioni complete di più forme.

Nota di GINO FANO.

1. — Il Prof. SEVERI ha dimostrato (¹) che *Sopra una forma algebrica* V (o varietà di dimensione $r-1$) *priva di punti multipli dello spazio* S_r (dove $r \geq 4$) *ogni varietà algebrica a* r — 2 *dimensioni è la completa intersezione di* V *con un'altra forma.* Questa proposizione era già nota per le quadriche di uno spazio qualunque (sempre di dimensione ≥ 4) (²) e per la varietà cubica di S_4 (³).

Nello spazio S_3 è pure noto da ricerche del Sig. NOETHER, appoggiate essenzialmente sopra un computo di costanti, che la superficie generale di un ordine qualsiasi ≥ 4 non contiene altre curve all'infuori di quelle che sono sue intersezioni complete con un'altra superficie (⁴): proprietà analoga a quella che è oggetto del teorema suddetto del SEVERI, ma il cui enunciato non ha, nè può ricevere una forma altrettanto precisa. Mentre se $r > 4$ l'esistenza, sopra una V_{r-1} appartenente a S_r, di una M_{r-2} che non ne sia la completa intersezione con un'altra forma

(¹) *Una proprietà delle forme algebriche prive di punti multipli,* “ Rend. Acc. dei Lincei „ (5), vol. 15°, 2° sem. 1906; p. 691.

(²) F. KLEIN, *Ueber einen liniengeometrischen Satz;* “ Gött. Nachr. „, 1872; “ Math. Ann. „, vol. 22 (1883), p. 234.

(³) V. la mia Nota: *Sulle superficie algebriche contenute in una varietà cubica dello spazio a quattro dimensioni*, “ Atti della R. Acc. di Torino „, vol. XXXIX (1904). Dopo la pubblicazione di questa Nota io avevo trovata anche una dimostrazione, che però non pubblicai, la quale permetteva di estendere la proprietà di cui si tratta alle varietà cubiche di uno spazio qualunque S_r, dove $r > 3$.

(⁴) M. NOETHER, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven*, Preisgekrönte Schrift, “ Berliner Abhandl. „, 1882.

porta di conseguenza, necessariamente, l'esistenza su di essa di qualche punto doppio, ciò non avviene più per $r = 3$ (nemmeno per le superficie di ordine ≥ 4).

La proprietà accennata si può estendere dal caso di una forma di S_r al caso di una varietà intersezione completa di forme. Però quest'estensione, che è appunto oggetto della presente Nota, non posso darla per ora che nella forma seguente, più prossima a quella del teorema di Noether (benchè io non faccia alcun uso di computo di costanti) che a quella di Severi:

In uno spazio qualunque S_r *una varietà algebrica di dimensione* $k \geq 2$ *la quale sia completa intersezione di* $r - k$ *forme*, e se $k = 2$ non sia una superficie razionale [1], *non contiene* IN GENERALE *altre varietà* M_{k-1} *all'infuori di quelle che sono sue intersezioni complete con un'ulteriore* $[(r - k + 1)^{\text{sima}}]$ *forma.*

In altri termini: Una forma di S_r priva di punti multipli non contiene (come è già noto) altre M_{r-2} all'infuori delle sue intersezioni con un'altra forma. La più generale fra queste M_{r-2} di un dato ordine, ossia *la* M_{r-2} *generica di un sistema lineare completo sulla prima forma* non conterrà altre M_{r-3} all'infuori di quelle segate su di essa da una terza forma; e così di seguito.

Come ho detto, per ora non mi è riescito di dare al teorema forma più precisa. Per le varietà M_k di dimensione $k \geq 3$ è possibile (forse con qualche restrizione) che il fatto di contenere una M_{k-1}, la quale non ne sia intersezione completa con una forma, porti di conseguenza l'esistenza su di essa di qualche punto doppio, e che perciò l'essere la M_k priva di punti doppi sia condizione sufficiente (benchè, probabilmente, non necessaria) perchè ogni sua M_{k-1} ne costituisca l'intersezione completa con una forma. Ma per le superficie è probabile che anche in uno spazio di dimensione ≥ 4 non si possa assolutamente dare del teorema un enunciato più preciso.

La superficie intersezione generale di $r - 2$ forme di S_r avrà pertanto il numero base ρ eguale all'unità (essendo soltanto esclusi i tre casi in cui essa è razionale [1]); e si potrà

---

[1] Questa restrizione conduce ad escludere i tre casi elementari delle superficie di 2° e 3° ordine in S_3, e della F^4 intersezione di due quadriche di S_4. Se invece l'intersezione è una superficie di genere uno (il che av-

determinarne in conseguenza il numero degli integrali doppi di 2ª specie distinti.

2. — Il teorema enunciato si può far discendere per induzione completa dal seguente altro, la cui dimostrazione costituisce la parte essenziale del presente lavoro:

Si abbia in S_r $(r \geq 4)$ *una varietà algebrica* M_3 *priva di punti multipli e completa intersezione di* $r-3$ *forme, della quale sia noto che non contiene altre superficie algebriche all'infuori di quelle che ne sono intersezioni complete con una forma ulteriore.* (Per $r=4$ dunque un'unica forma, per la quale è già noto che la proprietà qui ammessa come ipotesi sussiste effettivamente). *Dico che la superficie generica di un sistema lineare completo qualsiasi sopra tale* M_3 (*ove essa sia di genere* > 0) *contiene a sua volta soltanto curve che sono sue intersezioni complete con una nuova* $[(r-1)^{\text{sima}}]$ *forma.*

Indichiamo con $m_1, m_2, \ldots m_{r-3}$ gli ordini delle forme di cui la M_3 è intersezione; con $m \equiv m_1 m_2 \ldots m_{r-3}$ l'ordine di questa M_3; con $n \equiv m \,.\, m_{r-2}$ l'ordine della superficie F segata sulla M_3 da una forma ulteriore di ordine m_{r-2}.

Si consideri sopra M_3 un fascio generico Φ di superficie F^n, la cui curva base φ sarà irriducibile; e sopra una superficie generica del fascio una curva qualunque γ, anche irriducibile. Questa curva individua sopra F^n il sistema lineare completo $|\gamma|$ che la contiene totalmente, e la cui dimensione (≥ 0) indicheremo con s. Possiamo supporre senza scapito di generalità che il sistema $|\gamma|$ non contenga nemmeno parzialmente la curva φ; in caso diverso basterebbe sostituirgli nelle considerazioni che andiamo ad esporre il sistema residuo di esso rispetto a φ o a una curva convenientemente multipla di φ; sistema residuo le cui curve saranno o non saranno, sopra F^n, intersezioni complete secondo che sono o non sono tali le γ. In questo secondo caso esisterà certo un ultimo sistema residuo non contenente più la φ.

---

viene pure in tre casi; cfr. n° 4) è già noto, in seguito a ricerche recenti dei sig.[ri] ENRIQUES e SEVERI, ch'essa contiene soltanto curve intersezioni complete (ENRIQUES, *Le superficie di genere uno*, " Rend. Acc. di Bologna ", 13 dic. 1908; SEVERI, *Le superficie algebriche con curva canonica di ordine zero*, " Atti Ist. Veneto ", vol. $LXVIII_2$ (1908-09), p. 249).

Sulla curva φ si prendano s punti $A_1\ A_2 \ldots A_s$, certo esistenti, pei quali passi sulla F'' considerata una sola curva γ_0 del sistema $|\gamma|$ (se $s=0$, sarà γ_0 l'unica γ esistente sopra F''); e si faccia poi variare la superficie F'' descrivendo con continuità il fascio Φ, mentre i punti $A_1\ A_2 \ldots A_s$ rimangono fissi e la curva γ_0 segue la F nel suo movimento. Quando F, dopo uno spostamento qualunque nel fascio Φ, ritorna alla posizione iniziale, il sistema $|\gamma|$ e, per conseguenza, la curva γ_0 potranno o riprendere sempre, o anche non riprendere sempre le rispettive posizioni.

Nel primo caso, quando F descrive l'intero fascio Φ, la curva γ_0 descriverà una determinata superficie algebrica Γ, contenuta nella data M_3, e che per l'ipotesi fatta sarà intersezione completa della M_3 con una certa forma. Se questa superficie non passa per la curva φ, la curva γ_0 sarà a sua volta intersezione completa della superficie F colla medesima forma. La superficie Γ potrebbe però contenere la curva φ, perchè il sistema $|\gamma|$, pur non contenendo la φ sopra una F generica del fascio, potrebbe contenerla sopra qualche F particolare; comunque, anche allora γ_0 sarebbe sopra F'' intersezione completa, soltanto con una forma di ordine inferiore.

Se dunque esistono sopra F curve che non sono intersezioni complete, queste curve, nelle circostanze accennate, dovranno variare in modo da assumere sopra F medesima anche posizioni diverse da quelle iniziali.

3. — Supponiamo pertanto che F possa spostarsi nel fascio Φ e tornare alla posizione iniziale in modo che il sistema $|\gamma|$ e per conseguenza la linea γ_0 assumano sopra F medesima posizioni diverse dalle primitive. Dovranno allora esistere sopra F altri sistemi lineari $|\delta|$, $|\epsilon|$,... composti di curve di egual ordine e aventi i medesimi caratteri di $|\gamma|$; sistemi che saranno però certo in numero finito, perchè l'insieme di tutte le curve aventi lo stesso ordine delle γ e contenute in F'' deve essere un sistema algebrico, perciò composto di un numero finito di sistemi continui completi; e, essendo F superficie regolare, i sistemi lineari $|\gamma|$, $|\delta|$,... sono essi stessi completi anche come sistemi continui.

In questo caso, quando F descrive l'intero fascio Φ, la

curva γ_0 descriverà bensì una superficie Γ che sarà intersezione completa della data M_3 con una certa forma; ma questa forma segherà sopra F una curva $\gamma + \delta + \epsilon + \ldots$ Il sistema lineare $|\gamma|$ descriverà, corrispondentemente, una varietà algebrica ∞^1, di genere ≥ 0; e in questa varietà i gruppi di sistemi lineari $|\gamma|$, $|\delta|$, $|\epsilon|$,... appartenenti a una stessa F^n, formeranno una serie ∞^1 in corrispondenza biunivoca col fascio Φ, e perciò razionale. Questa *serie lineare* avrà certo dei gruppi con un elemento doppio (o comunque multiplo); esisteranno dunque certo nel fascio Φ delle superficie F^n sulle quali due dei sistemi lineari $|\gamma|$, $|\delta|$,... vengono a coincidere. E poichè, se il fascio Φ è stato scelto nella M_3 in modo generale, nessuna sua superficie può avere punti multipli all' infuori eventualmente di un solo punto doppio, così anche le particolari F^n sulle quali due fra i sistemi lineari $|\gamma|$, $|\delta|$,... coincidono potranno avere al più un punto doppio (conico).

Per vedere dunque se e quando possano esistere sopra F^n altre curve, all'infuori di quelle che sono sue intersezioni complete con forme di S_r, dovremo esaminare le conseguenze che discendono dall' esistenza sopra F^n, ossia sopra ogni superficie del fascio Φ, di due o più sistemi lineari completi $|\gamma|$, $|\delta|$,..., fra loro distinti e aventi gli stessi caratteri; e dal fatto che sopra alcune particolari F^n del fascio, aventi al più un punto doppio conico e non altri punti multipli, due di questi sistemi lineari vengono a coincidere.

È appunto questo che avviene quando la superficie F^n generica è razionale. Una quadrica di S_3, acquistando un punto doppio, diventa un cono, e allora coincidono i suoi due sistemi di rette (e, per conseguenza, anche altre coppie di sistemi lineari); e similmente sopra una superficie generale di 3° ordine l'acquisto di un punto doppio conico fa sì che 12 rette coincidano a due a due. Escluderemo pertanto d'ora in poi (come già nell'enunciato del n° 2) che F sia una superficie razionale; poichè l'ordine $\sum_1^{r-2} m_i - r - 1$ delle forme che segnano sopra F^n, in generale, il sistema canonico deve in tal caso risultare negativo, ossia deve essere $\sum_1^{r-2} m_i \leq r$, ciò sarà possibile soltanto nei due casi testè indicati e quando F sia l'intersezione di due qua-

driche di S_4. Esclusi questi casi, la F^n generica sarà una superficie regolare di genere $p_a = p_g = P > 0$.

4. — Dimostriamo anzitutto che sulla superficie generica F^n del fascio Φ non possono esistere due sistemi lineari distinti $|\gamma|$, $|\delta|$ composti di curve dello stesso ordine, aventi lo stesso grado (virtuale) ν, e tali che due loro curve generiche si incontrino pure in ν punti. Se due sistemi così fatti esistessero, nella *matrice discriminante* delle due curve γ e δ [1] sarebbero nulli tutti i determinanti di 2° ordine; le due curve sarebbero perciò legate algebricamente, anzi linearmente (essendo F^n superficie regolare), e esisterebbe perciò un intero minimo i ($\geqq 2$) tale che i sistemi lineari $i\gamma$ e $i\delta$ coincidano ($i\gamma \equiv i\delta$). Si tratta dunque, in altri termini, di dimostrare che *Sulla superficie* F^n *la divisione dei sistemi lineari è operazione univoca* [2].

Ora, se la F^n è di genere $P = 1$ (F^4 di S_3, F^6 di S_4 intersezione di una quadrica e di una varietà cubica, F^8 intersezione di tre quadriche di S_5: i tre casi in cui $\sum_1^{r-2} m_i - r - 1 = 0$), essa ha altresì la curva canonica di ordine zero; e per questo caso è stato già riconosciuto dal Sig. Severi che la divisione dei sistemi lineari è operazione univoca [3]. Possiamo dunque supporre $P > 1$; la superficie F^n avrà allora un sistema canonico $|K|$ di dimensione virtuale P e dimensione effettiva $P - 1$ ($\geq r$, e perciò ≥ 3). Dico che anche in questo caso la divisione dei sistemi lineari è sopra F^n operazione univoca.

Supponiamo che ciò non sia; e indichiamo con σ (> 1) il numero massimo di sistemi lineari distinti che si possono ottenere applicando l'operazione di divisione a un sistema lineare qualsiasi della superficie. Siano inoltre $|\gamma|$, $|\gamma_2|$,... $|\gamma_\sigma|$ sistemi lineari distinti e tali che

$$|i\gamma| \equiv |i\gamma_2| \equiv \ldots \equiv |i\gamma_\sigma|$$

senza che tali relazioni abbiano luogo tutte per un intero $< i$.

---

[1] F. Severi, *Sur la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique*, "Compt. Rend. de l'Ac. d. Sc. „, 6 febbr. 1905; *Sulla totalità delle curve...*, "Math. Ann. „, vol. 62 (1905-06), p. 194.

[2] F. Severi, *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique*, "Ann. Éc. Norm. Sup. „ (3), vol. 25 (1908), p. 449.

[3] F. Severi, *La base minima...*, n° 4.

Esisteranno allora sopra F^n anche i $\sigma - 1$ sistemi:

$$(1) \qquad |K_h| \equiv |K + \gamma - \gamma_h| \qquad h = 2, 3, \dots \sigma$$

tutti distinti fra loro e da $|K|$, e tali che il multiplo secondo i di ognuno di essi coinciderà con $|iK|$, senza che esistano sopra F^n altri sistemi lineari soddisfacenti a queste condizioni. Questi $\sigma - 1$ sistemi avranno, al pari di $|K|$, la dimensione virtuale P; ma avranno dimensione effettiva $\geq P$, non essendo essi *speciali* (cioè contenuti nel sistema canonico). Inoltre le curve di questi sistemi non saranno certo sopra F^n intersezioni complete, perchè sono tali le curve canoniche, le quali hanno lo stesso ordine delle prime e ne sono distinte.

Segue da ciò che, facendo variare F^n nel fascio Φ e tornare nei vari modi possibili alla sua posizione iniziale, i sistemi lineari (1) non potranno assolutamente (cfr. n° 2) riprendere sempre tutti le primitive posizioni; siccome però essi sono sopra F^n i soli sistemi i cui multipli secondo i coincidono con $|iK|$, essi risulteranno soltanto permutati fra loro. Da ciò segue ancora (n° 3) che sopra qualche particolare F^n del fascio due dei sistemi (1), p. e. $|K_h|$ e $|K_l|$, dovranno coincidere. E sopra questa stessa F^n il sistema $|K + K_h - K_l| \equiv |K - \gamma_h + \gamma_l|$, che è ancora uno dei sistemi (1), coinciderà col sistema canonico $|K|$.

Ora ciò è manifestamente assurdo; perchè un sistema lineare il quale sopra una superficie generica del fascio Φ ha dimensione effettiva $\geqq P$ non può ridursi alla dimensione $P - 1$ sopra una superficie particolare di questo fascio. Rimane così dimostrato che sulla F^n la divisione dei sistemi lineari è operazione univoca.

5. — Se la superficie generica F^n del fascio Φ contiene curve che non sono intersezioni complete, e contiene perciò anche (cfr. n° 2) più sistemi lineari $|\gamma|$, $|\delta|$,... di curve di eguale ordine e aventi i medesimi caratteri, in particolare il medesimo grado (virtuale) ν, le curve di due qualunque di questi sistemi si taglieranno reciprocamente, per quanto si è detto, in un numero di punti $\nu' \neq \nu$ (il quale potrà anche cambiare dall'una all'altra coppia di sistemi). D'altra parte sopra qualche particolare superficie del fascio Φ due di quei sistemi, p. e. $|\gamma|$ e $|\delta|$,

devono coincidere; sopra questa superficie la curva virtuale $\gamma - \delta$, di ordine zero e grado virtuale $2(\nu - \nu') \neq 0$, dovrà dunque ridursi a un punto o a un gruppo di punti, i quali saranno punti basi per il sistema con cui $|\gamma|$ e $|\delta|$ sono venuti a coincidere.

Per maggior chiarezza (per quanto ciò non sarebbe necessario) consideriamo ancora sopra F^n il sistema lineare $|\xi|$ segato da tutte le forme di un ordine abbastanza elevato perchè $|\gamma|$ vi risulti parzialmente contenuto. Esisterà allora certo sopra F^n il sistema $|\xi + \delta - \gamma|$, il quale avrà caratteri differenti e in particolare grado differente da quello da $|\xi|$, ma si comporrà di curve del medesimo ordine. Quando $|\gamma|$ e $|\delta|$ vengono a coincidere, dovranno pure coincidere $|\xi|$ e $|\xi + \delta - \gamma|$; e ciò non è assolutamente possibile che in un solo modo: quando cioè il secondo di questi due ultimi sistemi risulti composto, al limite, di quelle curve del primo che passano per certi punti della superficie con determinate multiplicità. La curva virtuale $|\gamma - \delta|$ si sarà dunque ridotta a una " somma di punti ", presi con certe multiplicità. Il grado di una curva virtuale così fatta è indubbiamente negativo; e sarà perciò $\nu' > \nu$.

Siccome poi la superficie F^n, descrivendo il fascio Φ, può soltanto acquistare in posizioni particolari un punto doppio, così quei punti dovranno essere per F^n tutti punti semplici, all'infuori di uno solo al più, che potrà esserne punto doppio (conico). Vedremo subito che si tratterà proprio di un solo punto, il quale sarà doppio per F^n.

Infatti un punto semplice di una superficie, contato p volte, costituisce una curva di grado virtuale $-p^2$ e genere $-\binom{p}{2} - p + 1 = -\binom{p+1}{2} + 1$; aggiungendo questa curva a un sistema lineare di grado ν e genere π, il quale abbia in quel punto la multiplicità i, i caratteri del nuovo sistema diventeranno:

$$\nu_1 = \nu - p^2 + 2ip$$

$$\pi_1 = \pi - \binom{p+1}{2} + ip$$

Similmente, un punto doppio della superficie F^n contato q volte costituisce una curva di grado virtuale $-2q^2$ e genere

$-q^2+1$; aggiungendo questa curva a un sistema lineare che abbia in quel punto la multiplicità l, il sistema somma avrà i caratteri:

$$\nu_2 = \nu - 2q^2 + 2lq$$
$$\pi_2 = \pi - q^2 + lq$$

Ritenuto pertanto che i due sistemi lineari $|\gamma|$ e $|\delta|$, i quali vengono a coincidere a meno di punti basi, hanno lo stesso grado e lo stesso genere, e che di questi punti basi uno solo può essere doppio per la superficie F^n e tutti gli altri sono per essa punti semplici, avremo le due relazioni:

$$\Sigma\,(p^2 - 2ip) + 2q^2 - 2lq = 0$$
$$\Sigma\left(\left[\frac{p+1}{2}\right] - ip\right) + q^2 - lq = 0$$

nelle quali le somme s' intendono estese ai diversi eventuali punti basi che sono semplici per F. Sottraendo la seconda relazione moltiplicata per 2 dalla prima, si ha:

$$\Sigma\, p = 0$$

E siccome le p, per i punti semplici di F che effettivamente concorrono a formare il gruppo di punti limite della curva virtuale $|\gamma - \delta|$, sono necessariamente positive, così di tali punti non ve ne saranno affatto. La coincidenza dei sistemi $|\gamma|$ e $|\delta|$ non potrà dunque aver luogo che sopra le F^n dotate di un punto doppio; e la curva virtuale $|\gamma - \delta|$ dovrà ridursi a questo medesimo punto, contato una o più volte (tante volte — poichè sarà $q = l$ — quant'è la multiplicità del sistema unico $|\gamma| \equiv |\delta|$ in quel punto).

È precisamente questo che avviene quando la superficie F^n generica è razionale. Quando una quadrica di S_3 diventa un cono, la curva virtuale differenza di due generatrici di sistema opposto ($\nu = 0$, $\nu' = 1$) si riduce al punto doppio (vertice). Similmente quando una superficie di 3° ordine acquista un punto doppio (conico) alcune coppie di rette sghembe ($\nu = -1$, $\nu' = 0$) vengono a coincidere in rette che passano semplicemente pel punto doppio; e il sistema delle sezioni piane passanti pel punto

doppio è posizione limite di due reti di cubiche sghembe, la cui differenza virtuale ($\nu = 1$, $\nu' = 5$) si riduce al punto doppio contato due volte ($l = q = 2$). In questi casi, quando la F^n acquista un punto doppio, il suo numero-base ρ *inteso in senso proiettivo* (prescindendo cioè dalla conica infinitesima che costituisce l'intorno del punto doppio) risulta diminuito di un'unità, perchè la coincidenza di due sistemi lineari, prima distinti, dà una relazione lineare tra le curve della base primitiva. Noi faremo vedere ora che questo, invece, non può avvenire quando F^n abbia genere > 0.

6. — Dobbiamo valerci a tal uopo di alcune proprietà degli integrali doppi di 2ª specie appartenenti alle superficie F^n del fascio Φ; integrali la cui teoria generale è stata creata dal Sig. Picard, che vi ha dedicati parecchi lavori, e l'ha poi esposta ordinatamente nel 2° volume del suo trattato delle funzioni algebriche di 2 variabili [1].

Il numero ρ_0 degli integrali doppi di 2ª specie distinti appartenenti a una superficie algebrica e il numero-base ρ di questa superficie [2] sono legati da un'importante relazione, dovuta appunto al Sig. Picard, la quale nel caso di una superficie regolare e introducendo l'invariante relativo I di Zeuthen-Segre assume la forma:

$$\rho_0 + \rho = I + 2 \text{ [3]}$$

Se però il carattere ρ si vuol intendere, come l'intende il Sig. Picard, in senso proiettivo, cioè senza tener conto degli intorni degli eventuali punti multipli isolati della superficie, allora, supponendo che la superficie abbia soltanto d (≥ 0) punti

---

[1] E. Picard et G. Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, 2 vol.; Paris, 1897-1906. In part. vol. 2°, cap. VII e seg.

[2] Numero massimo di curve algebricamente distinte (e, se la superficie è regolare, anche linearmente distinte) esistenti sulla superficie. Cfr. i lavori cit. del Severi, “ Compt. Rend. „, 6 febbr. 1905; “ Math. Ann. „, vol. 62.

[3] In questa relazione ρ_0 è un invariante assoluto della superficie, mentre ρ ed I sono soltanto invarianti relativi, e crescono o diminuiscono entrambi di un'unità per ogni curva eccezionale che compaia in più o scompaia per effetto di trasformazioni birazionali.

doppi conici (ed è appunto il caso che a noi interessa), la stessa relazione dovrà scriversi:

$$\rho_0 + \rho + d = I + 2 \tag{1}$$

Sarà bene ricordare brevemente la via per la quale il Sig. Picard è giunto a questa relazione. — Supponendo che si tratti di una superficie $f(x\,y\,z) = 0$ dello spazio S_3, quale sarebbe ad es. la proiezione più generale della nostra F^n, il Sig. Picard ha determinato in primo luogo il numero dei periodi distinti, assegnabili ad arbitrio, e relativi a cicli a due dimensioni situati al finito dell'integrale doppio di 2ª specie

$$\int\int \frac{Q(x\,y\,z)}{f'_z}\,dx\,dy \tag{2}$$

dove Q è un polinomio aggiunto ad f (di grado limitato): numero la cui espressione si riduce a $I - d + 1$; e in secondo luogo il numero, che si trova $= \rho - 1$, delle costanti da cui dipende un integrale doppio a periodi non tutti nulli il quale abbia la forma speciale:

$$\int\int \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right) dx\,dy \tag{3}$$

dove A e B indicano funzioni razionali della superficie. Poichè non si ritengono distinti due o più integrali una cui combinazione lineare sia di quest'ultimo tipo, il numero ρ_0 risulterà dalla differenza $(I - d + 1) - (\rho - 1)$, conforme alla relazione (1).

Le superficie F^n del fascio Φ da noi considerato sono tutte prive di curve eccezionali. Ciò è stato dimostrato dal Sig. Severi [1] per il caso in cui non vi siano punti multipli, ed è pur vero se vi è un punto doppio conico (o un numero finito qualunque di tali punti), perchè il sistema canonico è sempre segato da tutte le forme di un dato ordine, e perciò da un sistema di forme che non ha punti-basi su F. L'invariante I avrà dunque il medesimo valore sopra tutte quante le superficie del fascio.

---

[1] *Su alcune questioni di postulazione*, " Rend. di Palermo ", vol. XVII (1903); in part. n° 12, 13.

Quando la superficie F'', descrivendo il fascio Φ, acquista un punto doppio — prescindendo da altre circostanze eventualmente concomitanti, ma indipendenti dal punto doppio e che in generale non si presenteranno nemmeno [1] — il termine d della relazione (1) crescerà di un'unità; e poichè I rimane invariato, dovrà diminuire di un'unità uno dei caratteri ρ_0 e ρ. Più particolarmente, il numero $(= I - d + 1)$ dei periodi assegnabili ad arbitrio di un integrale doppio di 2ª specie diminuisce di un'unità, e diminuisce perchè due periodi, prima distinti, si sono ora identificati [2]; si perdono di conseguenza quegli integrali relativi a una F^n generica del fascio pei quali questi due periodi hanno valori assegnati, fra loro diversi; p. es. quell'integrale pel quale uno di questi periodi ha un valore assegnato diverso da zero, e gli altri periodi sono tutti nulli [3]. Se nessuno di questi integrali che si perdono aveva la forma (3), risulterà diminuito ρ_0 di un'unità; se invece se ne perdono di quelli aventi questa forma, la diminuzione di un'unità avrà colpito il carattere ρ, inteso sempre in senso proiettivo.

---

[1] Sulla superficie F^n potrebbe cioè comparire, contemporaneamente al punto doppio, qualche nuova curva, prima non esistente su di essa; ma la comparsa di una tal curva farebbe aumentare di un'unità il numero-base ρ e diminuire pure di un'unità il numero ρ_0, senza influire pertanto su quella diminuzione di uno dei due caratteri che è dovuta all'aumento di d.

[2] Infatti sulla superficie $f(x\,y\,z) = 0$ di S_3 proiezione generica di F^n, e che insieme con essa acquisterà un punto doppio isolato, due dei piani $y = b_i$ ad essa tangenti $(i = 1, 2, \ldots, N$, dove N è la classe della superficie) vengono ora a coincidere con quel piano $y =$ cost. che passa nel punto doppio. Perciò di quei certi periodi relativi alle sezioni piane $f(x\,\bar{y}\,z) = 0$ (y parametro) che il sig. Picard indica con $\Omega_i(y)$ e che sono completamente caratterizzati dal loro rispettivo comportamento per $y = b_i$, anche due vengono a coincidere; si identificano quindi due delle relazioni lineari distinte esistenti fra le stesse $\Omega_i(y)$, relazioni che conducono singolarmente ai cicli e periodi sopra nominati (oltre che ai residui nei punti all'infinito della superficie, i quali per un integrale di 2ª specie sono tutti nulli): poichè per ogni relazione $\Sigma\, m_i \Omega_i(y) = 0$, dove le m_i sono interi non tutti nulli, si ha un corrispondente periodo $\Sigma\, m_i \int_{b_i}^{a} \Omega_i(y)\, dy$ (che non dipende dal punto a) — L'identificarsi di due periodi distinti porta naturalmente di conseguenza che il periodo loro differenza, prima arbitrario, si annulla e cessa perciò di essere un periodo.

[3] A questo, e agli integrali che permangono, si riconducono evidentemente tutti gli altri.

D'altra parte, per ragioni di continuità, ogni qualvolta la superficie F^n nella M_3 acquista un punto doppio, dovrà verificarsi sempre lo stesso di questi due casi. E poichè l'acquisto di un punto doppio da parte della F^n è il modo elementare e più generale per mezzo del quale si riduce il numero dei periodi distinti degli integrali doppi di 2ª specie e, conseguentemente, si eliminano di questi integrali, non potrebbe avvenire che questa eliminazione equivalesse sempre a quella di un integrale della forma speciale (3) senza che tutti quanti gli integrali doppi di 2ª specie abbiano tale forma. Ora questo, se la F^n ha genere > 0, non è possibile; perchè essa ad es. possiede certo integrali doppi di 1ª specie, che sono particolari integrali di 2ª specie e non hanno la forma (3). Concludiamo pertanto che l'acquisto di un punto doppio (ove la F^n abbia genere > 0) farà diminuire di un'unità il carattere ρ_0; e allora ρ, inteso proiettivamente, resterà invariato. Ciò equivale a dire che curve, e perciò anche sistemi lineari distinti tra loro sulla F^n generica, devono conservarsi tali sulla F^n con punto doppio, anche a meno del punto doppio (contato una o più volte); contrariamente al risultato a cui eravamo pervenuti al n° **5**, in base all'ipotesi che la F^n contenesse curve che non fossero intersezioni complete.

Il teorema enunciato al n° **2** è dunque completamente dimostrato [1].

---

[1] La dimostrazione che abbiamo data di questo teorema (dal n° 2 in poi) ha probabilmente una portata e un campo di applicabilità più vasto di quanto non appaia dall'enunciato del teorema medesimo. Considerata una M_3 e la superficie generica di un sistema lineare entro di essa, supposto questo sistema di dimensione > 0 e a intersezioni variabili irriducibili, e supposto altresì che quella superficie abbia genere geometrico > 0 (e soddisfi forse a qualche condizione ulteriore), è presumibile che ogni linea algebrica tracciata su questa superficie ne sia l'intersezione completa con un'altra superficie contenuta nella M_3; in particolare che sulla sezione iperpiana generica della M_3 ogni curva algebrica sia a sua volta sezione iperpiana di una superficie contenuta nella M_3. La varietà M_3 avrebbe perciò a comune colla superficie generica di un suo sistema lineare completo — salvo qualche restrizione — il numero-base ρ e il carattere σ (n° 4), come già ha a comune con essa la irregolarità (Castelnuovo ed Enriques, *Sur les intégrales simples de première espèce...*, " Ann. Éc. Norm. Sup. „ (3), vol. 22 (1906), p. 339).

Per le superficie prive di integrali doppi di 2ª specie non aventi la forma (3), in particolare per le superficie razionali, essendo $\rho_0 = 0$, l'aumento di un'unità nel valore di d deve invece di necessità far diminuire di un'unità il carattere ρ, inteso in senso proiettivo; come appunto al nº **5** abbiamo verificato su qualche esempio [1].

7. — Dico ora che *In uno spazio qualunque* S_r $(r \geqq 4)$:

1) *La varietà* M_3 *intersezione generale di* $r - 3$ *forme algebriche di ordini comunque assegnati non contiene altre superficie algebriche all'infuori di quelle che sono sue intersezioni complete con un'ulteriore* $(r-2)^{\text{sima}}$ *forma.*

2) *La superficie intersezione generale di* $r - 2$ *forme di ordini arbitrari non contiene altre curve algebriche all' infuori di quelle che sono sue intersezioni complete con un'ulteriore* $(r-1)^{\text{sima}}$ *forma* (fatta solo eccezione in S_4 per la F^4 intersezione di due quadriche).

Questo doppio teorema è oramai dimostrato per $r = 4$; la prima parte dal lavoro del Severi citato al nº **1**; la seconda parte dalle considerazioni che qui abbiamo svolte ai nⁱ **2-6** [2]. Basterà dunque dimostrare che il teorema è vero per uno spazio qualunque S_r $(r > 4)$ quando lo si supponga già dimostrato per S_{r-1}. E delle due parti basterà dimostrare la prima, perchè la seconda ne seguirà tosto, per ogni singolo spazio, in forza delle stesse nostre considerazioni precedenti.

Si abbia dunque in S_r una M_3^n intersezione generale di $r - 3$ forme algebriche di certi ordini. La sua sezione iperpiana generica sarà una superficie μ^n di S_{r-1}, intersezione generale di $r - 3$ forme di quest'ultimo spazio; e noi possiamo supporre dimostrato ch'essa contiene soltanto curve sue intersezioni complete con una forma ulteriore. Perciò una qualsiasi superficie

---

[1] In senso invariantivo, essendo sempre $\rho_0 + \rho = I + 2$, dovremo dire che sulle F^n di genere > 0 il punto doppio, quando compare, si aggiunge alla base precedente come nuovo elemento in più (conica infinitesima); mentre sulle F^n razionali esso, in un certo senso, " preesisteva già „ allo stato di " curva virtuale „.

[2] Queste stesse considerazioni dànno anche una nuova dimostrazione del teorema di Noether (cfr. nº 1) sulle superficie algebriche di S_3 di ordine $\geqq 4$.

algebrica η contenuta nella M_3^n dovrà segare sulla μ^n una curva di ordine kn (k intero positivo) che sarà in pari tempo intersezione di μ^n con una forma di ordine k. Ciò basta per concludere che nella M_3^n i due sistemi lineari di superficie $|\eta|$ e $|k\mu|$ coincidono (1), ossia che la superficie η è intersezione completa della M_3 con una forma di ordine k, come appunto si voleva dimostrare.

Con ciò il teorema enunciato al nº **1** risulta completamente dimostrato per le superficie e varietà a 3 dimensioni. Esso può estendersi senz'altro alle varietà di dimensione > 3 per mezzo di un ulteriore ragionamento di induzione completa, analogo al precedente; poichè il teorema del Severi di cui ci siamo valsi si estende a sua volta alle varietà di dimensione superiore.

8. — Il genere ($p_a = p_g = P$) della superficie intersezione generale di $r - 2$ forme di S_r degli ordini $n_1, n_2, \ldots n_{r-2}$ è dato dalla formola (2):

$$P = \binom{n_1+n_2+\ldots+n_{r-2}-1}{r} - \Sigma\binom{n_1+n_2+\ldots+n_{r-3}-1}{r}$$
$$+ \Sigma\binom{n_1+n_2+\ldots+n_{r-4}-1}{r} - \ldots + (-1)^{r-3}\Sigma\binom{n_1-1}{r}$$

dove le somme vanno estese a tutte le combinazioni di classe $r - 3$, $r - 4$, ... dei vari indici, colla convenzione di attribuire il valore zero a quei simboli combinatori nei quali il numero degli elementi è $< r$.

La stessa superficie ha il *genere lineare* (genere della curva canonica):

$$p^{(1)} = n_1 n_2 \ldots n_{r-2} (\Sigma n_i - r - 1)^2 + 1;$$

e non contenendo essa curve eccezionali, sussisterà la relazione:

$$p^{(1)} + I = 12 P + 9$$

(1) F. Severi, *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà*, " Atti Ist. Veneto ", vol. LXV$_2$ (1905-06), p. 625; teorema IV, p. 635.

(2) Cfr. ad es. il lavoro cit. del sig. Severi, *Su alcune questioni di postulazione*, " Rend. di Palermo ", vol. XVII (1903); nº 4.

Ricavando di qui I, e sostituendone l'espressione nell'altra relazione:

$$\rho_0 + \rho = I + 2$$

(cfr. n° **6**), nella quale sappiamo doversi porre $\rho = 1$, si trova:

$$\rho_0 = 12\,P - n_1 . n_2 \dots n_{r-2} (\Sigma\, n_i - r - 1)^2 + 9$$

Questo è dunque il numero degli integrali doppi di 2ª specie distinti esistenti sulla superficie di S_r intersezione generale di $r - 2$ forme degli ordini $n_1, n_2, \dots n_{r-2}$.

Torino, aprile 1909.

Ricerca intorno ad un particolare sistema telescopico.

Nota dell'Ing. ENRICO GATTI.

(Con una Tavola).

---

1. — Si abbiano n lenti sferiche $M_1, M_2, \dots, M_n$ immerse nell'aria, centrate, di distanze focali rispettive $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, e poste a distanze fra loro ordinatamente uguali a $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$.

Un punto oggettivo disti della quantità D dal primo piano principale della lente M_1, e sieno $x_1, x_2, \dots, x_n$ le distanze alle quali si formano rispettivamente le successive immagini di tal punto dal secondo piano principale delle lenti $M_1, M_2, \dots, M_n$.

Saranno in generale:

$$x_1 = \frac{D\varphi_1}{D - \varphi_1}, \qquad x_2 = \frac{(\Delta_1 - x_1)\varphi_2}{\Delta_1 - x_1 - \varphi_2}$$

. . . .

$$x_n = \frac{(\Delta_{n-1} - x_{n-1})\varphi_n}{\Delta_{n-1} - x_{n-1} - \varphi_n}$$

i valori di $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Essendo x_n funzione delle distanze $x_{n-1}, \dots, x_1, D$, si avrà:

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial x_n}{\partial D} = -\left(\frac{\varphi_1\,\varphi_2 \dots \varphi_n}{(D - \varphi_1)(\Delta_1 - x_1 - \varphi_2) \dots (\Delta_{n-1} - x_{n-1} - \varphi_n)}\right)^2.$$

L'ingrandimento lineare G del sistema diottrico in esame, detti $G_1, G_2, \ldots, G_n$ gli ingrandimenti dovuti rispettivamente alle lenti $M_1, M_2, \ldots, M_n$, quando si considerino ordinatamente come oggettivi i punti corrispondenti a $D, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, è dato da:

$$G = G_1\, G_2 \ldots G_n.$$

Ma:

$$G_1 = \frac{\varphi_1}{D - \varphi_1} \qquad G_2 = \frac{\varphi_2}{\Delta_1 - x_1 - \varphi_2}$$

. . . .

$$G_n = \frac{\varphi_n}{\Delta_{n-1} - x_{n-1} - \varphi_n}$$

e però:

$$G = \frac{\varphi_1\, \varphi_2 \ldots \varphi_n}{(D - \varphi_1)(\Delta_1 - x_1 - \varphi_2) \ldots (\Delta_{n-1} - x_{n-1}\ \varphi_n)}$$

e quindi per la (1) il valore dell'ingrandimento lineare diviene:

$$G = \pm \sqrt{-\frac{\partial x_n}{\partial D}} \tag{2}$$

e cioè:

in un sistema diottrico centrato a mezzi estremi identici, il valore dell'ingrandimento lineare è determinato dalla radice quadrata della derivata prima, cambiata di segno, della distanza alla quale si forma l'immagine dal secondo piano principale dell'ultima lente che lo compone, presa, tal derivata, rispetto alla distanza dell'oggetto dal primo piano principale della prima lente.

2. — Supposto ridotto il sistema diottrico alle tre lenti M_1, M_2, M_3, si avrà:

$$G = \pm \frac{\varphi_1\varphi_2\varphi_3}{(\Delta_2 - \varphi_3)(D - \varphi_1)\varphi_2 + (\varphi_2 + \varphi_3 - \Delta_2)(D - \varphi_1)\Delta_1 - (\varphi_2 + \varphi_3 - \Delta_2)D\varphi_1} \tag{3}$$

e potrà essere:

$$\frac{\partial G}{\partial D} = 0$$

quando sia:

$$\Delta_1 + \frac{\Delta_2\varphi_2}{\varphi_2 + \varphi_3 - \Delta_2} = \varphi_1 + \frac{\varphi_2\varphi_3}{\varphi_2 + \varphi_3 - \Delta_2}\,. \tag{4}$$

La condizione (4) può essere soddisfatta, in doppio modo, rendendo telescopico il sistema M_1, M_2, M_3 e cioè presupponendo esistente quella uguaglianza senza che sieno nulli i membri di essa, oppure collo ammettere:

$$(5) \qquad \Delta_1 + \frac{\Delta_2\varphi_2}{\varphi_2 + \varphi_3 - \Delta_2} = 0 \qquad \frac{\varphi_2\varphi_3}{\varphi_2 + \varphi_3 - \Delta_2} + \varphi_1 = 0.$$

In questo secondo caso si otterrà il noto sistema telescopico nel quale è:

$$G = 1.$$

Le ascisse dei punti principali del sistema stesso assumono la forma $\frac{0}{0}$, la distanza fra il primo fuoco della lente M_1 ed il secondo del sistema M_2M_3 riesce uguale alla distanza del primo piano principale della lente M_1 al secondo del sistema M_2M_3 e quindi, per la nota proprietà dei sistemi telescopici che essendo a mezzi estremi hanno uguali in valor assoluto le distanze focali dei sistemi componenti, due piani qualunque normali all'asse e posti fra loro alla distanza alla quale risultano il primo piano principale della lente M_1 ed il secondo del sistema M_2M_3, potranno considerarsi come piani principali del sistema stesso.

3. — Si determinino, fra i sistemi di due lenti M_1M_2, quelli i quali possono dar luogo ad un sistema avente una distanza focale φ di segno opposto alla distanza focale φ_3 d'una comune lente M_3 e tali che, costituendo $M_1M_2M_3$ un sistema convergente, si possa in esso rendere uguale a zero la distanza fra i piani principali che determinano la distanza Δ fra il sistema M_1M_2 ed M_3.

Delle lenti M_1, M_2, M_3, si indicheranno rispettivamente con $\begin{matrix} E_1, & E_2, & E_3 \\ E_1^*, & E_2^*, & E_3^* \end{matrix}$ il $\begin{matrix} \text{primo} \\ \text{secondo} \end{matrix}$ punto principale, con $\begin{matrix} N_1, & N_2, & N_3 \\ N_1^*, & N_2^*, & N_3^* \end{matrix}$ il $\begin{matrix} \text{primo} \\ \text{secondo} \end{matrix}$ vertice, ed ordinatamente con $\begin{matrix} E', & E \\ E'^*, & E^* \end{matrix}$ il $\begin{matrix} \text{primo} \\ \text{secondo} \end{matrix}$ punto principale del sistema M_1M_2 e del sistema $M_1M_2M_3$.

Ciò premesso, giova distinguere il caso in cui $\varphi_3 > 0$ da quello nel quale $\varphi_3 < 0$.

A) Si supponga $\varphi_3 > 0$.

Fra i sistemi divergenti di due lenti sono da escludere quelli definiti da due lenti divergenti perchè, come è facile vedere, riuscendo:

$$E' - E_1 > 0 \qquad \text{ed} \qquad E'^* - E_2^* < 0$$

ed essendo ambedue quelle differenze minori di Δ_1 in valore assoluto, i punti principali del sistema composto riescono compresi fra due lenti componenti.

Poichè in generale è:

$$\varphi = \frac{\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta_1}$$

il valore da assegnarsi a Δ_1 perchè la distanza focale di segno opposto a φ_3, propria al sistema M_1M_2, sia φ, sarà:

$$\Delta_1 = \varphi_1 + \varphi_2 + \frac{\varphi_1\varphi_2}{\varphi}\ ; \quad \varphi_1 + \varphi_2 - \Delta_1 < 0 \qquad \varphi_1 > 0,\ \varphi_2 > 0$$

con se

$$\Delta_1 = \varphi_1 - \varphi_2 - \frac{\varphi_1\varphi_2}{\varphi}\ ; \quad \varphi_1 - \varphi_2 - \Delta_1 > 0 \qquad \varphi_1 > 0,\ \varphi_2 < 0$$

Ed allorquando siano appunto	$\varphi_1 > 0 \quad \varphi_2 > 0$	$\varphi_1 > 0 \quad \varphi_2 < 0$
a valori di Δ_1 variabili da	$\varphi_1 + \varphi_2$ a ∞	0 a $\varphi_1 - \varphi_2$
corrisponderanno, in valor assoluto, valori di φ variabili da	∞ a 0	$\frac{\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}$ a ∞

Scambiando verso secondo il quale la luce si intende propagata, si ridurrà il caso in cui $\varphi_1 < 0$, $\varphi_2 > 0$ a quello pel quale sia $\varphi_1 > 0$, $\varphi_2 < 0$.

Dalle note relazioni:

$$E' - E_1 = -\frac{\varphi_1\Delta_1}{\Delta_1-\varphi_1-\varphi_2};\ E'^* - E_2^* = \frac{\varphi_2\Delta_1}{\Delta_1-\varphi_1-\varphi_2} \qquad \varphi_1>0\ \varphi_2>0$$

valevoli per

$$E' - E_1 = \frac{\varphi_1\Delta_1}{\varphi_1-\varphi_2-\Delta_1};\ E'^* - E_2^* = \frac{\varphi_2\Delta_1}{\varphi_1-\varphi_2-\Delta_1} \qquad \varphi_1>0\ \varphi_2<0$$

si trae:

$$(5)\quad E' - E'^* = -\frac{\Delta_1(\varphi_1+\varphi_2)}{\Delta_1-\varphi_1-\varphi_2} - (E_2^* - E_1) \qquad \text{primo caso}$$

nel

$$(6)\quad E' - E'^* = \frac{\Delta_1(\varphi_1-\varphi_2)}{\varphi_1-\varphi_2-\Delta_1} - (E_2^* - E_1) \qquad \text{secondo caso}$$

La relazione (5) mostra che se, come venne ammesso, $\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta_1 < 0$ è sempre $E' - E'^* < 0$.

Nella (6) si osservi che, essendo $\varphi_1 - \varphi_2 - \Delta_1 > 0$, pel valore di φ pel quale riesce $\Delta_1 = 0$ $E' - E'^*$ è negativo, e che sostituendo a Δ_1 il valore $\varphi_1 - \varphi_2$ risulta $E' - E'^* = \infty$; quindi, nel caso che si considera, $E' - E'^*$ potrà assumere valori negativi, nulli o positivi.

Si segnino nelle figure (1-2) le quali contemplano rispettivamente i casi pei quali è $\varphi_1 > 0$, $\varphi_2 > 0$ e $\varphi_1 > 0$, $\varphi_2 < 0$ i punti E', E'^* e si rappresenti in esse la lente M_3 co' suoi punti principali $E_3E_3^*$ disposta così che con opportuno spostamento del sistema M_1M_2 possa aversi $\Delta = 0$.

Per la convergenza del sistema $M_1M_2M_3$ dovrà essere:

$$\varphi_3 - \varphi - \Delta < 0$$

e tanto nell'uno quanto nell'altro caso saranno:

$$E - E' = \frac{\varphi\Delta}{\Delta + \varphi - \varphi_3};\quad E^* - E_3^* = \frac{\varphi_3\Delta}{\Delta + \varphi - \varphi_3}$$

e quindi:

$$E - E^* = \frac{\Delta(\varphi - \varphi_3)}{\Delta + \varphi - \varphi_3} + E' - E_3^*.$$

Indicato con K il valore $E' - E_1$ negativo se $\varphi_1 > 0$ e $\varphi_2 < 0$, positivo quando $\varphi_1 > 0$ e $\varphi_2 < 0$; si avrà la relazione:

$$E - E^* = \frac{\Delta(\varphi - \varphi_3)}{\Delta + \varphi - \varphi_3} + K + E_1 - E_3^*$$

dalla quale potrà dedursi per quali valori di $\varphi - \varphi_3 \gtreqless 0$, sia $E - E^* \gtreqless 0$.

Per $\varphi = \varphi_3$ in valore assoluto, riesce $E - E^* < 0$ se $\varphi_1 > 0$ e $\varphi_2 > 0$, ma potrà essere $E - E^* \gtreqless 0$ quando sia $\varphi_1 > 0$ e $\varphi_2 < 0$.

Indicato con s il segmento $E_3^* N_3^*$ sarà:

$$E^* - E_3^* \gtreqless s \qquad \text{secondochè} \qquad \varphi \lesseqgtr \frac{\Delta\varphi_3}{s} - \Delta + \varphi_3$$

e, poichè nelle comuni lenti è $\frac{\Delta\varphi_3}{s} - \Delta > 0$, così risulterà:

$$\frac{\Delta\varphi_3}{s} - \Delta + \varphi_3 > \varphi_3.$$

Quindi, tanto nell'uno quanto nell'altro caso, sarà sempre possibile disporre le lenti $M_1 M_2$ a distanza tale da ottenere E^* esterno alla lente M_3.

Supposto poi che in valor assoluto sia $\varphi = \varphi_3$ sarà sempre possibile far coincidere E'^* con E_3 nel caso in cui $\varphi_1 > 0$ e $\varphi_2 > 0$ perchè in tale caso è $E'^* - E_2^* > \varphi_2$.

Quando però sia $\varphi_1 > 0$ e $\varphi_2 < 0$ allora divenendo:

$$\Delta_1 = \varphi_1 - \varphi_2 - \frac{\varphi_1\varphi_2}{\varphi_3}$$

risulta:

$$E'^* - E_2^* = \frac{\varphi_3(\varphi_1 - \varphi_2) - \varphi_1\varphi_2}{\varphi_1}$$

nella quale, per quanto già venne avvertito intorno ai valori possibili per φ in tal caso, il secondo membro è positivo.

Fatto ora:

$$E_2^* N_2^* + N_3 E_3 = s'$$

sarà:

$$E'^* - E_2^* \geqq s'$$

secondochè:

$$\varphi_3 \geqq \frac{\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2} + \frac{\varphi_1 s'}{\varphi_1 - \varphi_2} \tag{7}$$

e quindi la possibilità di far coincidere E'^* con E_3 sarà definita dalla condizione (7).

Segnate nelle figure (1, 2) le posizioni assunte da E, E^* per quella distanza fra le lenti $M_1 M_2$ tale che E^* risulti esterno alla lente M_3, si immagini proiettata nel piano principale E l'immagine reale, che si dirà A, d'un oggetto posto nel primo piano d'isometria inversa d'una lente convergente N di distanza focale opportuna ψ.

L'immagine reale capovolta, che il sistema $M_1 M_2 M_3$ darà dell'oggetto, si potrà raccogliere su di uno schermo posto nel piano principale E^*.

Essa immagine sarà d'ugual grandezza dell'oggetto e rimarrà in riposo quando nel far variare Δ_1 si sia raggiunto per φ quel valore per cui risulti in valor assoluto $\varphi = \varphi_3$, e ciò qualunque sia il valore di Δ, perchè in tal caso E^* cadrà nel secondo fuoco di M_3.

Ottenuto con simile esperienza un sistema divergente $M_1 M_2$ avente come valore assoluto della sua distanza focale quella di M_3, e posta l'immagine A nel piano E, si avrà poi $\Delta = 0$ per quella posizione del sistema $M_1 M_2$ per la quale, spostando la lente N coll'oggetto nel verso secondo cui si propaga la luce, si otterranno per ciascuna posizione immagini reali aventi la stessa grandezza dell'oggetto.

Abbiasi in valore assoluto $\varphi = \varphi_3$ e $\Delta = 0$: allora (fig. 3-4) quando l'immagine A dovuta alla lente N cade in E, si formerà in E^* quella determinata dal sistema $M_1 M_2 M_3$ essendo $E' E_3^* = EE^*$ e sarà 2ψ la distanza del secondo piano principale e_1^* della lente N da E. Potendosi poi ritenere nota la distanza H di e_1^* da E_1 se, noti essendo gli elementi delle lenti N ed M_1, verrà misurata la distanza $n^* N_1$ fra i vertici affacciati di quelle due lenti e ricordato che $E'E = \varphi_3$ si potrà scrivere:

$$2\psi = H + \varphi_3 - \frac{\varphi_1 \Delta_1}{\Delta_1 - \varphi_1 - \varphi_2} \qquad \varphi_1 > 0 \text{ e } \varphi_2 > 0$$

nel caso in cui

$$2\psi = H + \varphi_3 + \frac{\varphi_1 \Delta_1}{\varphi_1 - \varphi_2 - \Delta_1} \qquad \varphi_1 > 0 \text{ e } \varphi_2 < 0.$$

Sostituendo nelle relazioni scritte il valore di Δ_1 proprio a ciascun caso si otterrà con

$$\varphi_3 = \pm \frac{\varphi_2}{\varphi_1} (H - \varphi_1 - 2\psi)$$

la relazione da applicarsi per trovare la distanza focale della lente M_3 usando, in detta relazione, il segno positivo o negativo secondochè sarà il valore di φ_2 positivo o negativo.

Indicando con K la distanza $N_3{}^*E^*$ sarà:

$$E_3{}^*N_3{}^* = \varphi_3 - K$$

e portando l'altra faccia della lente M_3 dalla banda di E^* si potrà verificare il valore di φ_3 e trovare E_3N_3.

B) Sia $\varphi_3 < 0$.

Fra i sistemi convergenti di due lenti non sono da considerarsi quelli dovuti a due lenti convergenti perchè non applicabili.

Se $\varphi_1 > 0$ e $\varphi_2 > 0$ sarà infatti:

$$\Delta_1 = \varphi_1 + \varphi_2 - \frac{\varphi_1\varphi_2}{\varphi} \tag{8}$$

il valore da assegnarsi a Δ_1 per ottenere un sistema M_1M_2 di determinata distanza focale $\varphi > 0$.

A valori di Δ_1 variabili da 0 a $\varphi_1 + \varphi_2$ corrisponderanno valori di φ variabili da $\frac{\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2}$ ad ∞.

Si avrà poi:

$$E' - E_1 = \frac{\varphi_1\Delta_1}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta_1} \qquad E_2{}^* - E'^* = \frac{\varphi_2\Delta}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta_1}$$

sicchè, nei limiti dei valori che φ può assumere, sarà positivo tanto $E' - E_1$ quanto $E_2{}^* - E'^*$ e:

$$\begin{matrix} E' - E_1 > \Delta_1 & & \Delta_1 > \varphi_2 & & \varphi > \varphi_2 \\ & \text{se} & & \text{ossia se sarà (8)} & \\ E_2{}^* - E'^* > \Delta_1 & & \Delta_1 > \varphi_1 & & \varphi > \varphi_1. \end{matrix}$$

Introdotta nel sistema M_1M_2 la lente M_3, questa potrà spostarsi, così da ottenere $\Delta = 0$, soltanto a partire da quel valore di φ_3 pel quale, indicato che sia con s il segmento $\begin{matrix} N_3E_3{}^* \\ N_3{}^*E_3 \end{matrix}$

e con h il segmento $\frac{E_1 N_2^*}{N_1 E_2^*}$, risulti $\frac{E' - E_1}{E_2^* - E'^*}$ uguale o maggiore $h + s$

$$\varphi_3 \gtreqless \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2} + \frac{\varphi_2(h+s)}{\varphi_1 + \varphi_2} \tag{9}$$

ossia per

$$\varphi_3 \gtreqless \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2} + \frac{\varphi_1(h+s)}{\varphi_1 + \varphi_2}. \tag{10}$$

Si supponga ora verificata la $\genfrac{}{}{0pt}{}{(9)}{(10)}$: allorchè fosse in valor assoluto $\varphi = \varphi_3$, cadrebbe E nel primo fuoco $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{del sistema } M_1 M_2}{\text{della lente } M_3}$ ed E^* nel secondo fuoco $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{della lente } M_3}{\text{del sistema } M_1 M_2}$. Nel caso in cui fosse $E' - E_1 > h + s$ E^* si formerebbe a sinistra di M_3.

Quando invece si avesse $E_2^* - E'^* > h + s$ allora, poichè l'ascissa F^* del secondo fuoco del sistema $M_1 M_2$ è determinata da

$$F^* - F_2^* = -\frac{\varphi_2^2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta_1}, \quad \text{essendo} \quad F_2^* = E_2^* + \varphi_2,$$

sarà:

$$F^* - E_2^* = \frac{\varphi_2(\varphi_1 - \Delta_1)}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta_1}.$$

Si avrà quindi:

$$F^* - E_2^* \gtreqless 0 \qquad \text{secondochè} \qquad \varphi_1 \gtreqless \Delta_1$$

ossia secondochè $\varphi_1 \gtreqless \varphi_3$.

E siccome i valori di φ_3 ammessi dalla (10) sono maggiori di φ_1, così, per ciascuno dei valori stessi, sarà $F^* - E_2^* < 0$, cioè E^* cadrà a sinistra della lente M_2.

In ogni caso quindi la posizione assunta da E^* non consentirà di verificare se siasi raggiunto quel valore di Δ_1 pel quale appunto sia $\varphi = \varphi_3$.

Potrà invece applicarsi il sistema $M_1 M_2$ quando sia $\varphi_1 > 0$ e $\varphi_2 < 0$ od anche $\varphi_1 < 0$ e $\varphi_2 > 0$ essendo tale secondo caso, come già venne avvertito, riducibile al primo.

Ammesso adunque $\varphi_1 > 0$ e $\varphi_2 < 0$ è subito visto dalla:

$$\varphi = -\frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2 - \Delta_1}$$

che converrà assumere in valore assoluto $\varphi_1 = \varphi_2$ perchè, corrispondentemente a valori di Δ_1 variabili da 0 ad ∞, si hanno per φ valori positivi variabili da ∞ a 0.

Rappresentando in (fig. 5) le lenti M_1, M_2 ed i punti cardinali E' ed E'^* che cadono rispettivamente nel primo e nel secondo fuoco di dette lenti, si segni la lente M_3, a sinistra del sistema M_1M_2, così che spostando la lente stessa verso il sistema possa ottenersi $\Delta = 0$.

Per la convergenza del sistema $M_3M_1M_2$ deve essere:

$$\varphi - \varphi_3 - \Delta < 0$$

e perciò essendo:

$$E - E_3 = \frac{\varphi_3\Delta}{\Delta + \varphi_3 - \varphi} \qquad E^* - E'^* = \frac{\varphi\Delta}{\Delta + \varphi_3 - \varphi}$$

cadranno E ed E^* rispettivamente a destra di E_3 ed E'^*.

Si avrà poi:

$$E^* - E'^* \gtreqless \varphi_1 \quad \text{secondochè} \quad \Delta \gtreqless \varphi_1 \frac{\varphi_3 - \varphi}{\varphi - \varphi_1}.$$

Quando φ e φ_3 riuscissero numericamente uguali, sarebbe $E^* - E'^* = \varphi_3$ e quindi E^* cadrebbe a destra della lente M_2 solo pei valori di $\varphi_3 > \varphi_1$.

Tale sarà la condizione da porre per stabilire quella necessaria per avere $E^* - E'^* > \varphi_1$, nel caso in cui sia φ diverso da φ_3.

Pei valori di $\varphi < \varphi_3$, nessun valore positivo di Δ consente di ottenere $E^* - E'^* > \varphi_1$ se $\varphi \leqq \varphi_1$.

Sarà però soddisfatta simile condizione per

$$(11) \qquad \Delta > \varphi_1 \frac{\varphi_3 - \varphi}{\varphi - \varphi_1} \quad \text{se} \quad \varphi > \varphi_1.$$

Quando poi sia $\varphi > \varphi_3$ sarà:

$$E^* - E'^* > \varphi_1 \quad \text{per} \quad \Delta > -\varphi \frac{\varphi - \varphi_3}{\varphi - \varphi_1}$$

e quindi anche per

$$(12) \qquad \Delta > \varphi - \varphi_3.$$

Allorchè, adunque, si ha $\varphi_3 > \varphi_1$, sempre sarà possibile ottenere un tal valore nella distanza focale φ del sistema $M_1 M_2$, pel quale si giunga a soddisfare l'una o l'altra delle condizioni (11), (12). Si potrà quindi in ogni caso raccogliere, proiettata sul piano E^* esterno al sistema $M_3 M_1 M_2$, la nota immagine A dovuta alla lente già indicata con N.

Raggiunto simile valore per φ, si potrà inoltre cercare, variando opportunamente Δ_1, l'uguaglianza numerica dei valori di φ e φ_3 e tale uguaglianza sarà raggiunta quando, come nel precedente caso, non varierà E^* al variare di Δ.

Si otterrà poi $\Delta = 0$ se, disposta in E l'immagine A, l'immagine di A data dal sistema $M_3 M_1 M_2$ non muterà di grandezza collo spostare A nel verso secondo cui si intende propagata la luce.

Si supponga (fig. 6) raggiunto quel valore di Δ_1 pel quale $\varphi = \varphi_3$ in valor assoluto, e disposta la lente M_3 così che $\Delta = 0$.

Poichè si conoscono gli elementi delle lenti N ed M_2, colla misura dei segmenti $E^* N_2^*$ ed $n^* N_3$ si troveranno pure i valori dei segmenti:

$$E^* E_2^* = h; \qquad E e_1^* N_3 = v$$

e ricordando che $e_1^* E = 2\psi$ si potranno dedurre colle relazioni:

$$\varphi_3 = \varphi_1 + h$$
$$N_3 E_3 = 2\psi - (v + \varphi_3)$$

i valori della distanza focale della lente M_3 e dell'ascissa $N_3 E_3$ d'uno de' suoi punti principali.

Orientando M_3 così che risulti N_3^* affacciato ad n^* si potrà verificare φ_3 e trovare $N_3^* E_3^*$.

Dall'Istituto Omar. Novara, marzo 1909.

Su la rappresentazione approssimata delle funzioni di più variabili reali e delle loro derivate per polinomi trigonometrici.

Nota di FILIPPO SIBIRANI a Milano.

1. — Nella Memoria *Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynomes et des suites limitées de Fourier* (*) il Prof. Ch. J. De la Vallée-Poussin si è occupato della rappresentazione approssimata di una funzione $f(x)$ di una variabile reale, periodica e di periodo 2π, mediante un polinomio trigonometrico P_n, di ordine n, il quale converge per $n = \infty$ in $-\pi ... \pi$ a $f(x)$ ove questa sia continua, mentre le derivate di P_n tendono alle derivate ordinarie, o generalizzate, di $f(x)$, ove queste esistano.

La presente Nota ha per oggetto di far vedere come le considerazioni fatte dal De la Vallée-Poussin siano estendibili alla rappresentazione delle funzioni di più variabili reali. Determineremo un polinomio trigonometrico $S_{n,m}$ d'ordine n in x e d'ordine m in y che rappresenta con approssimazione una funzione $f(x, y)$ periodica, di periodo 2π rispetto ad entrambe le variabili e che per $n = \infty$, $m = \infty$ converge a $f(x, y)$ ove questa sia continua: di più le derivate parziali di $S_{n,m}$ tendono per n ed m infiniti alle derivate omonime di $f(x, y)$, sotto particolari condizioni che saranno enunciate. Per queste ultime considerazioni dovremo nei n[i] 7 e 8 introdurre le definizioni di derivata generalizzata e semigeneralizzata ed esporre qualche loro proprietà.

Nel n° 3, esteso un teorema di Abel alle serie doppie, definiremo un processo di sommazione della serie doppia di Fourier, analogo a quello introdotto, nella citata Memoria, dal De la Vallée-Poussin relativamente alle serie di Fourier di una variabile.

(*) " Bulletin de l'Académie Royale de Belgique „, n° 3, mars 1908.

2. — Sia $f(x, y)$ una funzione delle due variabili x e y reali, periodica rispetto ad entrambe, con periodo 2π: nel quadrato Q definito dalle rette $x = \pm\pi$, $y = \pm\pi$ la $f(x, y)$ sia limitata, sia atta all'integrazione di campo e all'integrazione semplice rispetto a ciascuna delle due variabili; se $f(x, y)$ diventa infinita, lo diventi in modo che esistano finiti i tre integrali $\int_Q |f(x,y)|\, dx\, dy$, $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x, y)|\, dy$ per ogni x compreso fra $-\pi$ e π ed $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x,y)|\, dx$ per ogni y compreso fra $-\pi$ e π.

Allora poniamo

$$I_{n,m} = \frac{h_n h_m}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} \frac{u-x}{2}\, du \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \cos^{2m} \frac{v-y}{2}\, dv$$

ove

$$h_r = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2.4.....2r}{1.3.....2r-1}\,.$$

Noi faremo vedere che questo integrale ha proprietà analoghe a quelle dell'integrale I_n considerato dal De la Vallée-Poussin nel Cap. II della sua Memoria.

Cominciamo collo sviluppare $I_{n,m}$ in un polinomio trigonometrico. A quest'uopo osserviamo che

$$\cos^{2n} \frac{\lambda}{2} \cos^{2m} \frac{\mu}{2} = g_n g_m \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{(n+1)(n+2)...(n+k)} \cos k\lambda + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{m} \frac{m(m-1)...(m-h+1)}{(m+1)(m+2)...(m+h)} \cos h\mu +$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{m} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{(n+1)(n+2)...(n+k)} \cdot \frac{m(m-1)...(m-h+1)}{(m+1)(m+2)...(m+h)} \cos k\lambda \cos h\mu \right\}$$

ove è

$$g_r = \frac{2}{2^{2r}} \cdot \frac{2r(2r-1)\,...\,r+1}{1.\,2.\,...\,r}$$

il cui valore assintotico per $r = \infty$ è $\frac{2}{\sqrt{\pi r}}$ (*).

(*) Vedi Memoria del De la Vallée-Poussin, n° 27.

Se ora si fa $\lambda = u - x$, $\mu = v - y$ e si sostituisce nell'espressione di $I_{n,m}$ si ha

$$I_{n\,m} = \frac{A_{0,0}}{4} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (A_{k,0} \cos kx + A'_{k,0} \operatorname{sen} kx) + \sum_{h=1}^{m} (B_{0,h} \operatorname{sen} hy + A_{0h} \cos hy) +$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{m} (A_{kh} \cos kx \cos hy + B_{kh} \cos kx \operatorname{sen} hy + A'_{kh} \operatorname{sen} kx \cos hy + B'_{kh} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} hy)$$

ove

$$A_{00} = \frac{h_n h_m g_n g_m}{4} \int_{-\pi}^{\pi} du \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) dv$$

$$A_{k0} = \frac{1}{2} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)} \cdot \frac{h_n h_m g_n g_m}{4} \int_{-\pi}^{\pi} dv \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \cos ku\, du$$

$$A'_{k0} = \frac{1}{2} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)} \cdot \frac{h_n h_m g_n g_m}{4} \int_{-\pi}^{\pi} dv \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \operatorname{sen} ku\, du$$

$$B_{0h} = \frac{1}{2} \frac{m(m-1)\ldots(m-h+1)}{(m+1)(m+2)\ldots(m+h)} \cdot \frac{h_n h_m g_n g_m}{4} \int_{-\pi}^{\pi} du \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \operatorname{sen} hv\, dv$$

$$A_{0h} = \frac{1}{2} \frac{m(m-1)\ldots(m-h+1)}{(m+1)(m+2)\ldots(m+h)} \cdot \frac{h_n h_m g_n g_m}{4} \int_{-\pi}^{\pi} du \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \cos hv\, dv$$

$$A_{kh} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)} \cdot \frac{m(m-1)\ldots(m-h+1)}{(m+1)(m+2)\ldots(m+h)} \cdot$$
$$\cdot \frac{h_n h_m g_n g_m}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ku\, du \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \cos hv\, dv$$

$$B_{kh} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)} \cdot \frac{m(m-1)\ldots(m-h+1)}{(m+1)(m+2)\ldots(m+h)} \cdot$$
$$\cdot \frac{h_n h_m g_n g_m}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ku\, du \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \operatorname{sen} hv\, dv$$

$$A'_{kh} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)} \cdot \frac{m(m-1)\ldots(m-h+1)}{(m+1)(m+2)\ldots(m+h)} \cdot$$
$$\cdot \frac{h_n h_m g_n g_m}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} ku\, du \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \cos hv\, dv$$

$$B'_{kh} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)} \cdot \frac{m(m-1)\ldots(m-h+1)}{(m+1)(m+2)\ldots(m+h)} \cdot$$
$$\cdot \frac{h_n h_m g_n g_m}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} ku\, du \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \operatorname{sen} hv\, dv.$$

Ora se osserviamo che il valore assintotico di h_r è $\sqrt{\frac{r}{\pi}}$ (*) e che non si cambia nulla al valore assintotico di $I_{n,m}$ ponendo in luogo di $\frac{h_n h_m g_n g_m}{4}$ il suo valore assintotico $\frac{1}{\pi^2}$, si avrà per $I_{n,m}$ lo sviluppo

$$S_{n,m} = \frac{a_{00}}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} (a_{k0}\cos kx + a'_{k0}\operatorname{sen} kx) +$$

$$+ \sum_{h=1}^{m} \frac{m(m-1)\dots(m-h+1)}{(m+1)(m+2)\dots(m+h)} (b_{0h}\operatorname{sen} hy + a_{0h}\cos hy) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{m} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} \cdot \frac{m(m-1)\dots(m-h+1)}{(m+1)(m+2)\dots(m+h)} (a_{kh}\cos kx \cos hy +$$

$$+ b_{kh}\cos kx \operatorname{sen} hy + a'_{kh}\operatorname{sen} kx \cos hy + b'_{kh}\operatorname{sen} kx \operatorname{sen} hy)$$

ove i coefficienti a, a', b, b' sono i coefficienti della serie di Fourier per due variabili (**)

$$a_{00} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} du \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v)\, dv$$

$$a_{k0} = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} dv \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \cos ku\, du$$

$$a'_{k0} = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} dv \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \operatorname{sen} ku\, du$$

$$b_{0h} = \frac{1}{2\pi^3} \int_{-\pi}^{\pi} du \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \operatorname{sen} hv\, dv$$

$$a_{0h} = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} du \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \cos hv\, dv$$

$$a_{kh} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ku\, du \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \cos hv\, dv$$

$$b_{kh} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ku\, du \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \operatorname{sen} hv\, dv$$

$$a'_{kh} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} ku\, du \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \cos hv\, dv$$

$$b'_{kh} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} ku\, du \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \operatorname{sen} hv\, dv$$

(*) De la Vallée-Poussin, Ibidem, n° 25.

(**) Si cfr. ad es. la nota di Cerni, *Sulla rappresentabilità di una funzione a due variabili per serie doppia trigonometrica*, " Rendiconti dell'Istit. Lombardo di Scienze e Lettere ", 1901.

La somma $S_{n,m}$ non è che la somma dei primi $(n+1)(m+1)$ termini della serie doppia di Fourier, moltiplicati per dei numeri positivi $l_{k,h}(m, n)$ soddisfacenti alle condizioni

$$l_{kh} > l_{kh'} \quad \text{se} \quad h < h', \quad l_{kh} > l_{k'h} \quad \text{se} \quad k < k'$$

e di più tendono crescendo ad 1 quando n ed m vanno, crescendo, all'infinito.

3. — È definito così un modo particolare di sommazione della serie doppia di Fourier.

Possiamo anzi dimostrare una proposizione analoga a quella contenuta nel n° 29 della Memoria più volte citata, quando premettiamo il lemma:

Se la serie doppia

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_{kh}$$

è convergente ed ha per somma A, *si ha pure*

$$\lim_{\beta=\infty,\, \gamma=\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_{kh}\, \varphi_{kh}(\beta, \gamma) = A$$

se per ogni coppia di valori β *e* γ

$$\varphi_{kh} > \varphi_{kh'} \quad se \quad h < h' \quad e \quad \varphi_{kh} > \varphi_{k'h} \quad se \quad k < k'$$

e le φ_{kh} *tendono crescendo ad* 1 *quando* β *e* γ *tendono, crescendo, all'infinito.*

Per la dimostrazione, ricordiamo che condizione necessaria e sufficiente acciò che una serie doppia converga è che convergano tutte le serie semplici salienti in essa contenute (*). Dicesi saliente una serie semplice contenuta la $\sum\sum\alpha_{kh}$ se in ogni suo termine i due indici sono entrambi non inferiori agli indici del termine precedente.

Qualunque serie semplice saliente di $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\alpha_{kh}$ è dunque, per

(*) London, *Ueber Doppelfolgen und Doppelreihen*, "Mathematische Annalen", Bd. 53. — Ripamonti, *Sulle successioni doppie*, "Rendiconti del R. Istituto Lombardo", 1904.

ipotesi, convergente; ma se si considera la serie corrispondente in $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\alpha_{kh}\varphi_{kh}(\beta,\gamma)$ essa è una serie dedotta dalla precedente per la moltiplicazione di numeri che decrescono da un termine al precedente, ma che tendono ciascuno ad 1 quando β e γ vanno, crescendo, all'infinito.

Si ha dunque, quando si indichi con σ, questa serie saliente

$$\lim_{\beta=\infty\ \gamma=\infty} \sigma = s$$

se s è la somma della serie corrispondente in $\sum\sum\alpha_{kh}$, perchè siamo nelle condizioni del teorema di ABEL (*).

Il lemma precedente ci offre immediatamente la dimostrazione del teorema

se la serie doppia di Fourier

$$S = \frac{a_{00}}{4} + \sum_{k=1}^{n}(a_{k0}\cos kx + a_k{}'_0 \operatorname{sen} kx) + \sum_{h=1}^{m}(a_{0h}\cos hy + b_{0h}\operatorname{sen} hy) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{m}(a_{kh}\cos kx\cos hy + b_{kh}\cos kx \operatorname{sen} hy + a'_{kh}\operatorname{sen} kx\cos hy +$$
$$+ b'_{kh}\operatorname{sen} kx\operatorname{sen} hy)$$

è convergente, il limite di $S_{n,m}$ *per* n *ed* m *che tendono all'infinito è* S.

Basta osservare che i numeri $l_{kh}(m,n)$ si comportano come le funzioni $\varphi_{kh}(\beta,\gamma)$ dell'enunciato precedente.

La relazione che abbiamo ora esaminata fra $S_{n,m}$ e la serie di Fourier, si conserva la stessa fra le derivate parziali di $S_{n,m}$ e le derivate parziali omonime della serie di Fourier, per modo che

ove le derivate parziali della serie di Fourier convergono hanno per somma i limiti delle derivate omonime di $S_{n,m}$.

Ma la convergenza di $S_{n,m}$ avviene, come vedremo, in casi in cui manca la convergenza della serie doppia di Fourier: quindi il procedimento introdotto generalizza la sommazione della serie doppia di Fourier.

(*) Vedi Memoria del DE LA VALLÉE-POUSSIN, n° 29.

4. — Il primo ad occuparsi della rappresentabilità di una funzione di due variabili per serie doppia trigonometrica è stato l'Ascoli (*), il quale giunse a questo risultato:

Condizioni necessarie e sufficienti acciò che una funzione $f(x,y)$ doppiamente periodica e di periodo 2π sia esprimibile per una serie doppia trigonometrica $\sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu B_\mu^{(\nu)}$, ove è

$$B_\mu^{(\nu)} = (a_\mu^{(\nu)} \operatorname{sen} \mu x + a_{-\mu}^{(\nu)} \cos \mu x) \operatorname{sen} \nu y +$$
$$(a_\mu^{(-\nu)} \operatorname{sen} \mu x + a_{-\mu}^{(-\nu)} \cos \mu x) \cos \nu y \quad (**)$$

e tale che ogni serie orizzontale ed ogni verticale siano convergenti per ogni punto xy in cui la f è definita sono:

a) che esista una funzione $F(x, y)$ continua che può rendersi doppiamente periodica secondo 2π sottraendo dalla medesima un'espressione della forma

$$\theta(x, y) = B_0^{(0)} \frac{x^2 y^2}{4} - \frac{x^2}{2} \sum_1^\infty{}_t B_0^{(t)} \frac{1}{t^2} - \frac{y^2}{2} \sum_1^\infty{}_t B_t^{(0)} \frac{1}{t^2}$$

ove le serie $\sum B_0^{(t)}$ e $\sum B_t^{(0)}$ convergono uniformemente;

b) che l'integrale

$$-\frac{m^2}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \{F(u, v) - \theta(u, v)\} \cos m(u-x) \frac{d^2}{dv^2} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}(v-y)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(v-y)} \right] du dv$$

tenda ad un valore $\psi_1(m)$ al tendere di n all'infinito qualunque sia m e qualunque sia il punto (x, y);

c) che per ogni n e per ogni punto (x, y) l'integrale

$$-\frac{n^2}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \{F(u,v) - \theta(u, v)\} \cos n(v-y) \frac{d^2}{du^2} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{2m+1}{2}(u-x)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(u-x)} \right] du dv$$

tenda ad un valore $\psi_2(n)$;

d) che

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right] = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] = f(x, y).$$

(*) G. Ascoli, *Sulle serie trigonometriche a due variabili*, " Atti della R. Accademia dei Lincei ", Memorie, Vol. VIII, 1880.

(**) Ho mantenute le notazioni dell'Ascoli.

L'Ascoli fa poi vedere che se $f(x, y)$ è continua e per ciascun valore di y la funzione di x ha un numero finito di massimi e minimi ed altrettanto avviene per ogni valore di x rispetto alla funzione di y che ne risulta, la f è esprimibile per serie doppia trigonometrica convergente in ugual grado a $f(x, y)$.

Picard (*) dimostra la sviluppabilità in serie doppia di Fourier di una funzione periodica con le derivate parziali dei primi quattro ordini continue e periodiche.

Cerni (**) ha dimostrato che ogni funzione continua oscillante riducibile è sviluppabile in serie doppia di Fourier, la quale converge uniformemente al valore della funzione in ogni punto interno al campo in cui essa è definita.

Per funzione oscillante riducibile si intende una funzione con rapporti incrementali parziali (od in particolare derivate prime parziali) minori in modulo di un numero finito assegnabile, la quale coll'aggiungere o togliere una conveniente funzione di primo grado si riduce alla differenza di due funzioni dell'Ascoli della stessa classe. E con quest'ultima denominazione l'A. intende funzioni che crescono nel senso positivo o negativo degli assi: e poichè ciò può accadere, avuto riguardo ai due assi, in quattro modi, si classificano queste funzioni in quattro classi.

Si potrebbe anche alle serie doppie, al pari che alle serie semplici, di Fourier applicare il procedimento di sommazione di Féier. Ciò è stato fatto da E. Gera (***), quantunque, che io sappia, niente si è pubblicato al proposito.

5. — Veniamo ora a studiare la convergenza di $S_{n,m}$, la quale sarà stabilita in casi assai più estesi di quelli ora accennati. E poichè i valori assintotici di $S_{n,m}$ e $I_{n,m}$ per n ed m infiniti sono uguali, prenderemo in esame quest'ultimo integrale.

Ricordiamo la periodicità rispetto ad entrambe le variabili

(*) Picard, *Traité d'Analyse,* Tome I, Ch. X, Paris, 1891.

(**) Cerni, *Sulla rappresentabilità di una funzione a due variabili per serie doppia trigonometrica,* " Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere ,, 1901.

(***) In un lavoro presentato al concorso per il premio Vittorio Emanuele II presso la R. Università di Bologna.

secondo 2π di $f(x, y)$ ed andiamo a stabilire teoremi analoghi a quelli contenuti nei §§ 2 e 3 del Cap. II della citata Memoria del Vallée-Poussin.

a) *Il valore assintotico per* m *ed* n *infiniti di* $\mathrm{I}_{n,m}$ *e di* $\mathrm{S}_{n,m}$ *dipende unicamente dalla natura di* f(x, y) *nelle immediate vicinanze del punto* (x, y).

Supponiamo, dapprima, che x e y non escano dal quadrato di vertici $(-\pi+\epsilon, -\pi+\epsilon)$, $(-\pi+\epsilon, \pi-\epsilon)$, $(\pi-\epsilon, -\pi+\epsilon)$, $(\pi-\epsilon, \pi-\epsilon)$ con ϵ piccolo a piacere.

Cambiando u in $u+x$ e v in $v+y$ e spezzando l'integrale di campo in modo opportuno, si ha

$$I_{n,m} = \frac{h_n h_m}{4}\Big[\int_{-\pi-x}^{\pi-x} \cos^{2n}\frac{u}{2}\,du \int_{-\pi-y}^{-\varepsilon} f(u+x, v+y)\cos^{2m}\frac{v}{2}\,dv +$$

$$+\int_{-\pi-x}^{\pi-x} \cos^{2n}\frac{u}{2}\,du \int_{\varepsilon}^{\pi-y} f(u+x, v+y)\cos^{2m}\frac{v}{2}\,dv +$$

$$+\int_{-\pi-x}^{-\varepsilon} \cos^{2n}\frac{u}{2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u+x, v+y)\cos^{2m}\frac{v}{2}\,dv +$$

$$+\int_{\varepsilon}^{\pi-x} \cos^{2n}\frac{u}{2}\,du \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u+x, v+y)\cos^{2m}\frac{v}{2}\,dv +$$

$$+\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \cos^{2n}\frac{u}{2}\,du \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \cos^{2m}\frac{v}{2} f(u+x, v+y)\,dv\Big].$$

Ma i primi due integrali sono infinitesimi dell'ordine di $\sqrt{m}\cos^{2m}\frac{\epsilon}{2}$ e gli altri due sono infinitesimi dell'ordine di $\sqrt{n}\cos^{2n}\frac{\epsilon}{2}$.

Riferendoci, ad es., al primo integrale si ha

$$\left|\frac{h_n h_m}{4}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}\cos^{2n}\frac{u}{2}\,du \int_{-\pi-y}^{-\varepsilon} f(u+x, v+y)\cos^{2m}\frac{v}{2}\,dv\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{h_n}{2}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}\cos^{2n}\frac{u}{2}\,du\left|\frac{h_m}{2}\int_{-\pi-y}^{-\varepsilon} f(u+x, v+y)\cos^{2m}\frac{v}{2}\,dv\right|\right|$$

Ma

$$\left|\frac{h_m}{2}\int_{-\pi-y}^{-\varepsilon} f(u+x, v+y)\cos^{2m}\frac{v}{2}\,dv\right| < \sqrt{\frac{m+1}{\pi}}\cos^{2m}\frac{\epsilon}{2}\int_{-\pi-y}^{-\varepsilon}|f|\,dv$$

cioè

$$\left|\frac{h_m}{2}\int_{-\pi-y}^{-\varepsilon} f(u+x, v+y)\cos^{2m}\frac{v}{2}\,dv\right|$$

è una quantità positiva infinitesima dell'ordine di $\sqrt{m}\cos^{2m}\frac{\epsilon}{2}$ qualunque sia n. Chiamando Ω un conveniente valore compreso fra il limite superiore e l'inferiore di questo integrale al variare di u da $-\pi-x$ a $\pi-x$, e applicando il teorema della media si ha

$$\left|\frac{h_n h_m}{4}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}\cos^{2n}\frac{u}{2}\,du\int_{-\pi-y}^{-\varepsilon}f(u+x,\,v+y)\cos^{2m}\frac{v}{2}\,dv\right|\leq$$

$$\leq\Omega\left|\frac{h_n}{2}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}\cos^{2n}\frac{u}{2}\,du\right|=\Omega$$

poichè

$$\frac{h_n}{2}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}\cos^{2n}\frac{u}{2}\,du=1\ (*).$$

Ma Ω, come abbiamo visto, è infinitesimo dell'ordine di $\sqrt{m}\cos^{2m}\frac{\epsilon}{2}$ e tale quindi è l'integrale che abbiamo preso in esame.

Riferiamoci al 4° integrale ed in esso invertiamo l'ordine delle integrazioni: s'avrà

$$\left|\frac{h_n h_m}{4}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\cos^{2m}\frac{v}{2}\,dv\int_{\varepsilon}^{\pi-x}\frac{u}{2}f(u+x,\ v+y)\,du\right|\leq$$

$$\leq\left|\frac{h_m}{2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\cos^{2m}\frac{v}{2}\,dv\left|\frac{h_n}{2}\int_{\varepsilon}^{\pi-x}\cos^{2n}\frac{u}{2}f(u+x,\,v+y)\,du\right|\right|.$$

Indicando con Ω' un valore compreso fra il limite superiore e l'inferiore di $\left|\frac{h_n}{2}\int_{\varepsilon}^{\pi-x}\cos^{2n}\frac{u}{2}f(u+x,\,v+y)du\right|$ per v variabile fra $-\epsilon$ ed ϵ, si ha

$$\left|\frac{h_n h_m}{4}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\cos^{2m}\frac{v}{2}\,dv\int_{\varepsilon}^{\pi-x}\cos^{2n}\frac{u}{2}f(u+x,\ v+y)du\right|\leq$$

$$\leq\Omega'.\left|\frac{h_m}{2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\cos^{2m}\frac{v}{2}\,dv\right|\leq\Omega'\left|\frac{h_m}{2}\int_{-\pi-y}^{\pi-y}\cos^{2m}\frac{v}{2}\,dv\right|=\Omega'$$

giacchè coll'avere sostituito nell'ultimo integrale ai limiti $-\epsilon$ ed ϵ i limiti $-\pi-y$ e $\pi-y$ non abbiamo che aggiunti due

(*) Si vegga il n° 25 della citata Memoria.

integrali infinitesimi dell'ordine di $\sqrt{m}\cos^{2m}\frac{\epsilon}{2}$. Ora Ω' è infinitesimo dell'ordine di $\sqrt{n}\cos^{2n}\frac{\epsilon}{2}$.

Procedimenti analoghi portano a conclusioni analoghe per gli integrali secondo e terzo.

Il valore assintotico di $I_{n,m}$ dipende dunque unicamente dall'integrale

$$\frac{h_n h_m}{4}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\cos^{2n}\frac{u}{2}\,du\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\cos^{2n}\frac{v}{2}\,.\,f(u+x,\,v+y)\,dv.$$

6. — Sia ora la funzione $f(x, y)$ limitata nel punto (x, y): allora essendo ϵ arbitrariamente piccolo, si può scegliere in modo che nel quadrato limitato da $u=-\epsilon$, $u=\epsilon$, $v=-\epsilon$, $v=\epsilon$ la f sia finita ed allora indicando con θ un numero compreso fra il limite superiore e l'inferiore di f in detto quadrato, l'integrale sopra scritto diviene

$$\theta\,.\,\frac{h_n h_m}{4}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\cos^{2n}\frac{u}{2}\,du\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\cos^{2m}\frac{v}{2}\,dv$$

che nella ricerca del suo valore assintotico può essere sostituito da

$$\theta\,.\,\frac{h_n h_m}{4}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}\cos^{2n}\frac{u}{2}\,du\int_{-\pi-y}^{\pi-y}\cos^{2m}\frac{v}{2}\,dv$$

poichè le parti di integrale aggiunto sono infinitesime per m ed n infiniti. Ma

$$\frac{h_n h_m}{4}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}\cos^{2n}\frac{u}{2}\,du\int_{-\pi-y}^{\pi-y}\cos^{2m}\frac{v}{2}\,dv=1$$

onde si conclude

il valore assintotico di $I_{n,m}$ *è* θ.

Noi abbiamo supposto che il punto (x, y) non esca dal quadrato limitato da $u=-\pi+\epsilon$, $u=\pi-\epsilon$, $v=-\pi+\epsilon$, $v=\pi-\epsilon$. Se (x, y) è sul contorno del quadrato Q (cfr. n° 1) non si può, fatta la sostituzione di variabili indicate nel principio di questa dimostrazione, fare lo spezzamento dell'integrale $I_{n,m}$ che noi

abbiamo fatto. Per fissare le idee, supponiamo $x = \pi$, $y = \left\{ \begin{matrix} \pi \\ -\pi \end{matrix} \right.$; in questo caso è

$$I_{n,m} = \frac{h_n h_m}{4} \int_{-2\pi}^{0} \cos^{2n} \frac{u}{2}\, du \int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(u + x,\ v + y) \cos^{2m} \frac{v}{2}\, dv =$$

$$= \frac{h_n h_m}{4} \left[\int_{-2\pi}^{0} \cos^{2n} \frac{u}{2} \int_{-\pi-y}^{-\varepsilon} f(u + x,\ v + y) \cos^{2m} \frac{v}{2}\, dv + \right.$$

$$+ \int_{-2\pi}^{0} \cos^{2n} \frac{u}{2}\, du \int_{\varepsilon}^{\pi-y} f(u + x,\ v + y) \cos^{2m} \frac{v}{2}\, dv +$$

$$+ \int_{-2\pi+\varepsilon}^{-\varepsilon} \cos^{2n} \frac{u}{2}\, du \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u + x,\ v + y) \cos^{2m} \frac{v}{2}\, dv +$$

$$+ \int_{-2\pi}^{-2\pi+\varepsilon} \cos^{2n} \frac{u}{2}\, du \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u + x,\ v + y) \cos^{2m} \frac{v}{2}\, dv +$$

$$\left. + \int_{-\varepsilon}^{0} \cos^{2n} \frac{u}{2}\, du \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u + x,\ v + y) \cos^{2m} \frac{v}{2}\, dv \right].$$

Usando del procedimento tenuto dianzi si vede che i primi tre integrali sono infinitesimi per m ed n infiniti e d'altra parte gli ultimi due integrali equivalgono all'integrale

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \cos^{2n} \frac{u}{2}\, du \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u + x,\ v + y) \cos^{2m} \frac{v}{2}\, dv$$

per la periodicità delle funzioni sotto i segni d'integrazione. Ritroviamo così il risultato del n° 5.

Dalla proposizione ora dimostrata si deduce immediatamente il teorema:

b) *Se* f(x, y) *è continua in* (x, y) *il valore di* $I_{n,m}$ *per* m *ed* n *infiniti è* f(x, y).

Invero, potendo essere ε piccolo a piacere ed essendo la $f(x, y)$ continua in (x, y), dovrà essere $\theta = f(x, y)$.

Ripetendo le considerazioni fatte dal Vallée-Poussin al n° 6 si prova che

c) *La convergenza di* $I_{n,m}$ *a* f(x, y) *è uniforme in ogni campo ove* f(x, y) *è continua.*

Ricordando la definizione di θ, si vede subito che

d) *Se in* (x, y) *la* f(x, y) *è discontinua ma limitata, il limite superiore ed inferiore di* $I_{n,m}$ *(o di* $S_{n,m}$*) è compreso nell'intervallo dei limiti superiore ed inferiore di* f(x, y) *nel punto* (x, y).

e) *Se* f(x, y) *è discontinua in* (x, y), *ma se*

$$f(x+h, y+k) + f(x+h, y-k) + f(x-h, y+k) + f(x-h, y-k)$$

tende ad un limite determinato $4a_0$ *quando* h *e* k *vanno a zero, si ha*

$$\lim I_{n,m} = \lim S_{n,m} = a_0.$$

Invero

$$\lim I_{n,m} = \lim \frac{h_n h_m}{4} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \cos^{2n}\frac{u}{2}\, du \left[\int_{-\varepsilon}^{0} f(x+u, y+v) \cos^{2m}\frac{v}{2}\, dv + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\varepsilon} f(x+u, y+v) \cos^{2m}\frac{v}{2}\, dv \right] =$$

$$= \lim \frac{h_n h_m}{4} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \cos^{2n}\frac{u}{2}\, du \int_{0}^{\varepsilon} [f(x+u, y+v) + f(x+u, y-v)] \cos^{2m}\frac{v}{2}\, dv =$$

$$= \lim \frac{h_n h_m}{4} \int_{0}^{\varepsilon} \cos^{2n}\frac{u}{2}\, du \int_{0}^{\varepsilon} [f(x+u, y+v) + f(x+u, y-v) +$$

$$+ f(x-u, y+v) + f(x-u, y-v)] \cos^{2m}\frac{v}{2}\, dv.$$

Applicando il teorema della media si ha:

$$\lim I_{n,m} = \lim \Omega \frac{h_n h_m}{4} \int_{0}^{\varepsilon} \cos^{2n}\frac{u}{2}\, du \int_{0}^{\varepsilon} \cos^{2m}\frac{v}{2}\, dv =$$

$$= \lim \frac{\Omega}{4} \frac{h_n h_m}{4} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} \cos^{2n}\frac{u}{2}\, du \int_{-\pi-y}^{\pi-y} \cos^{2m}\frac{v}{2}\, dv$$

indicando con Ω un valore compreso fra il limite superiore e l'inferiore di

$$\frac{f(x+u, y+v) + f(x+u, y-v) + f(x-u, y+v) + f(x-u, y-v)}{4}$$

nel quadrato limitato da $u = \pm \epsilon$, $v = \pm \epsilon$.

Ma per l'ammessa ipotesi $\lim \frac{\Omega}{4} = a_0$ e

$$\frac{h_n h_m}{4} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} \cos^{2n}\frac{u}{2}\, du \int_{-\pi-y}^{\pi-y} \cos^{2m}\frac{v}{2}\, dv = 1.$$

Onde si conclude che è

$$\lim I_{n,m} = a_0.$$

In particolare si vede che

f) *se* f(x, y) *è in* (x, y) *discontinua, ma* f(x + h, y + k), f(x + h, y — k), f(x — h, y + k), f(x — h, y — k) *al tendere di* h *e* k *a zero tendono a limiti determinati* f(x + 0, y + 0), f(x + 0, y — 0), f(x — 0, y + 0), f(x — 0, y — 0) *si ha*

$$\lim I_{n,m} = \lim S_{n,m} = \frac{f(x+0,y+0)+f(x+0,y-0)+f(x-0,y+0)+f(x-0,y-0)}{4}.$$

7. — Nei paragrafi che precedono abbiamo stabilito come si possa rappresentare con approssimazione la funzione $f(x, y)$ soddisfacente alle condizioni enunciate al n° 2, mediante l'integrale doppio $I_{n,m}$ o il polinomio trigonometrico $S_{n,m}$ il cui limite per m ed n infiniti è appunto $f(x, y)$ in ogni punto di continuità di questa o si comporta come è enunciato nei teoremi *d*) *e*) *f*) in ogni punto di discontinuità per la $f(x, y)$. Per studiare la rappresentazione approssimata delle derivate parziali di $f(x, y)$ ci occorre introdurre in questo paragrafo e nel successivo alcune definizioni e fare qualche considerazione sui nuovi enti definiti.

Se esiste determinato il limite del rapporto

$$(\alpha) \qquad \frac{f(x_0+h, y_0+k) + f(x_0+h, y_0-k) - f(x_0-h, y_0+k) - f(x_0-h, y_0-k)}{4h}$$

per h e k che vanno, indipendentemente l'uno dall'altro ed in ordine qualsiasi, a zero, lo diremo *derivata parziale prima rapporto ad* x *generalizzata di* f(x, y) *in* (x_0, y_0) e l'indicheremo con

$$\left(\frac{\partial_g f(x, y)}{\partial x}\right)_{x_0 y_0}.$$

Il limite del rapporto

$$(\beta) \qquad \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0-h, y_0)}{2h}$$

per $h = 0$, se esiste determinato, lo diremo *derivata parziale prima rapporto ad* x *semigeneralizzata di* f(x, y) *in* (x_0, y_0) e la indicheremo con

$$\left(\frac{\partial_{sg} f(x, y)}{\partial x}\right)_{x_0 y_0}.$$

In modo analogo, se esiste il limite del rapporto

$$\frac{f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0+h,\ y_0-k)+f(x_0-h,\ y_0+k)-f(x_0-h),\ y_0-k)}{4k}$$

per h e k che vanno, indipendentemente l'uno dall'altro ed in ordine qualsiasi, a zero, lo diremo *derivata parziale prima rapporto ad* y *generalizzata di* f(x, y) *in* (x_0, y_0) e l'indicheremo con

$$\left(\frac{\partial_g f(x,y)}{\partial y}\right)_{x_0 y_0}$$

e se esiste il limite per $k=0$ del rapporto

$$\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0-k)}{2k}$$

lo diremo *derivata parziale prima rapporto ad* y *semigeneralizzata di* f(x, y) *in* (x_0, y_0) e la indicheremo con

$$\left(\frac{\partial_{sg} f(x,y)}{\partial y}\right)_{x_0 y_0}.$$

Se la $f(x, y)$ è continua rispetto ad y in un intorno di (x_0, y_0) sulla retta $y=y_0$, la $\left(\frac{\partial_g f(x,y)}{\partial x}\right)_{x_0 y_0}$ coincide con $\left(\frac{\partial_{sg} f(x,y)}{\partial x}\right)_{x_0 y_0}$. Invero si passi dapprima in (α) al limite per $k=0$; il rapporto (α), per l'ammessa ipotesi della continuità, diviene il rapporto (β).

Esista di $f(x, y)$ la derivata parziale prima rapporto ad x semigeneralizzata in tutti i punti di un intorno di $x_0 y_0$ sulla retta $x=x_0$; allora passando al limite in (α) per $h=0$ si ha

$$\lim_{h=0}\frac{f(x_0+h,\ y_0+k)+f(x_0+h,\ y_0-k)-f(x_0-h,\ y_0+k)-f(x_0-h,\ y_0-k)}{4h}=$$

$$=\lim_{h=0}\frac{1}{2}\left[\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0-h,y_0+k)}{2h}+\frac{f(x_0+h,y_0-k)-f(x_0-h,y_0-k)}{2h}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial_{sg} f(x,y)}{\partial x}\right)_{x_0,y_0+k}+\left(\frac{\partial_{sg} f(x,y)}{\partial x}\right)_{x_0,y_0-k}\right].$$

Se ora passiamo al limite per $k=0$

$$\left(\frac{\partial_g f(x,y)}{\partial x}\right)_{x_0 y_0}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial_{sg} f(x,y)}{\partial x}\right)_{x_0,y_0+0}+\left(\frac{\partial_{sg} f(x,y)}{\partial x}\right)_{x_0,y_0-0}\right].$$

Se $\dfrac{\partial_{sg} f(x, y)}{\partial x}$ è continua in $x_0 y_0$ rispetto ad y allora è

$$\left(\frac{\partial_g f(x, y)}{\partial x}\right)_{x_0 y_0} = \left(\frac{\partial_{sg} f(x, y)}{\partial x}\right)_{x_0 y_0} \text{ (*)}.$$

Se esiste di $f(x, y)$ la ordinaria derivata parziale prima rapporto ad x in (x_0, y_0), essa coincide con la derivata parziale prima rapporto ad x semigeneralizzata, nello stesso punto (x_0, y_0).

Se la $f(x, y)$ è continua rapporto ad y in un intorno di (x_0, y_0) sulla retta $y = y_0$ la derivata parziale prima rapporto ad x generalizzata coincide con l' ordinaria derivata parziale in $(x_0 y_0)$, supposta l'esistenza di quest'ultima. Le ipotesi fatte permettono di concludere dall'esistenza di quest'ultima l'esistenza della prima. Tuttavia è a notarsi che ciò non è vero in generale, poichè in un punto $(x_0 y_0)$ può esistere la ordinaria derivata parziale rapporto ad x senza che vi sia la generalizzata.

Ad es., si consideri la funzione che per y razionale coincide con x e per y irrazionale coincide con $-x$. Prendiamo un punto (x_0, y_0) ove, per fissare le idee, si supponga y_0 razionale: il rapporto (α) è qui, se k è razionale

$$\frac{(x_0 + h) + (x_0 + h) - (x_0 - h) - (x_0 - h)}{4h} = 1$$

e se k è irrazionale

$$\frac{-(x_0 + h) - (x_0 + h) + (x_0 - h) + (x_0 - h)}{4h} = -1$$

ed è chiaro che non può esistere un limite per codesto rapporto.

Ma in $(x_0 y_0)$ la ordinaria derivata parziale prima rapporto ad x esiste, essendo il limite per $h = 0$ di

$$\frac{x_0 + h - x_0}{h} = 1.$$

Neanche la continuità rapporto ad y in $(x_0 y_0)$ basta per con-

(*) Ad esempio la funzione che sull'asse delle x è uguale ad x e nel rimanente del piano è uguale a $k + x$, ha in ogni punto le derivate parziali prime rapporto ad x generalizzata e semigeneralizzata. La funzione non è continua sull'asse x, ma ivi (come in ogni altro punto) è continua la derivata semigeneralizzata: le due derivate coincidono ovunque.

cludere che la derivata parziale generalizzata c'è, pur essendoci l'ordinaria derivata parziale rapporto ad x. Basta supporre, nell'esempio precedente, $x_0 = 0$: su l'asse y la funzione è continua rispetto ad y, ma i due rapporti considerati seguitano ad avere i valori 1 e -1.

Se esiste la ordinaria derivata parziale prima rapporto ad x in un intorno di (x_0, y_0) sulla retta $x = x_0$ ed è continua rispetto ad y in (x_0, y_0), ivi è

$$\left(\frac{\partial_g f(x, y)}{\partial x}\right)_{x_0 y_0} = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)_{x_0 y_0}.$$

Se, pur non essendo $\frac{\partial f}{\partial x}$ continua rapporto ad y in $(x_0 y_0)$ esistono determinati i limiti

$$\lim_{k=+0} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)_{x_0, y_0+k} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0, y_0+0}$$

$$\lim_{k=-0} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)_{x_0, y_0-k} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0, y_0-0}$$

si ha

$$\left(\frac{\partial_g f(x, y)}{\partial x}\right)_{x_0 y_0} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0, y_0+0} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0, y_0-0}\right].$$

Se, non esistendo la ordinaria derivata parziale prima rapporto ad x in (x_0, y_0), esistono le derivate parziali prime rapporto ad x a destra e a sinistra $\left(\frac{\partial^+ f}{\partial x}\right)_{x_0, y_0}$, $\left(\frac{\partial^- f}{\partial x}\right)_{x_0, y_0}$, è manifestamente

$$\left(\frac{\partial_{sg} f(x, y)}{\partial x}\right)_{x_0 y_0} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^+ f}{\partial x}\right)_{x_0 y_0} + \left(\frac{\partial^- f}{\partial x}\right)_{x_0, y_0}\right].$$

Se la $\frac{\partial_{sg} f(x, y)}{\partial x}$ è continua in $x_0 y_0$ rispetto ad y, o, più in particolare, se $\frac{\partial^+ f}{\partial x}$, $\frac{\partial^- f}{\partial x}$ sono continue rispetto ad y in (x_0, y_0), ferme restando le ipotesi precedenti, è

$$\left(\frac{\partial_g f(x, y)}{\partial x}\right)_{x_0 y_0} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^+ f}{\partial x}\right)_{x_0 y_0} + \left(\frac{\partial^- f}{\partial x}\right)_{x_0 y_0}\right].$$

Se di $f(x, y)$ esistono le derivate parziali prime rapporto ad x a destra e a sinistra nei punti di un intorno di $(x_0 y_0)$ sopra la

retta $x=x_0$ e $\frac{\partial^+ f}{\partial x}$ e $\frac{\partial^- f}{\partial x}$ non sono continue rapporto ad y in (x_0, y_0), pur esistendo determinati i limiti

$$\lim_{k=+0}\left(\frac{\partial^+ f}{\partial x}\right)_{x_0,y_0+k}=\left(\frac{\partial^- f}{\partial x}\right)_{x_0,y_0+0};\ \lim_{k=+0}\left(\frac{\partial^- f}{\partial x}\right)_{x_0,y_0+k}=\left(\frac{\partial^- f}{\partial x}\right)_{x_0,y_0+0}$$

$$\lim_{k=-0}\left(\frac{\partial^+ f}{\partial x}\right)_{x_0\,y_0+k}=\left(\frac{\partial^+ f}{\partial x}\right)_{x_0,y_0-0};\ \lim_{k=-0}\left(\frac{\partial^- f}{\partial x}\right)_{x_0,y_0+k}=\left(\frac{\partial^- f}{\partial x}\right)_{x_0,y_0-0}$$

si ha

$$\left(\frac{\partial_g f(x,y)}{\partial x}\right)_{x_0 y_0}=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial^+ f}{\partial x}\right)_{x_0,y_0+0}+\left(\frac{\partial^+ f}{\partial x}\right)_{x_0,y_0-0}+\left(\frac{\partial^- f}{\partial x}\right)_{x_0,y_0+0}+\left(\frac{\partial^- f}{\partial x}\right)_{x_0,y_0-0}\right].$$

Se la $f(x, y)$ è discontinua rispetto ad y in un intorno di (x_0, y_0) della retta $y=y_0$, ma esistono determinati i limiti

$$\lim_{k=+0} f(x, y_0+k)=f(x, y_0+0);\ \lim_{k=-0} f(x, y_0+k)=f(x, y_0-0)$$

che sono funzioni di x derivabili in x_0, è

$$\left(\frac{\partial_g f(x, y)}{\partial x}\right)_{x_0 y_0}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial f(x, y_0+0)}{\partial x}\right)_{x_0}+\left(\frac{\partial f(x, y_0-0)}{\partial x}\right)_{x_0}\right]$$

e se non sono derivabili in x_0, ma ivi esistono le derivate a destra e a sinistra, è

$$\left(\frac{\partial_g f(x, y)}{\partial x}\right)_{x_0,y_0}=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial^+ f(x,y_0+0)}{\partial x}\right)_{x_0}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^- f(x,y_0+0)}{\partial x}\right)_{x_0}+\left(\frac{\partial^+ f(x,y_0-0)}{\partial x}\right)_{x_0}+\left(\frac{\partial^- f(x, y_0-0)}{\partial x}\right)_{x_0}\right].$$

Analoghe considerazioni si possono fare sulle derivate parziali prime rapporto ad y generalizzata e semigeneralizzata.

8. — Si consideri il rapporto

$$(\gamma)\quad \frac{f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0+h, y_0-k)-f(x_0-h, y_0+k)+f(x_0-h, y_0-k)}{4hk}.$$

Se di esso esiste un limite determinato al tendere di h e k, indipendentemente l'uno dall'altro ed in un ordine qualsiasi, a

zero, lo chiameremo *derivata parziale mista generalizzata di* f(x, y) *in* $(x_0 y_0)$ e lo indicheremo con

$$\left(\frac{\partial_g^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}\right)_{x_0 y_0}.$$

Il rapporto (γ) può essere scritto

$$\frac{\dfrac{f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0-h,\ y_0+k)}{2h}-\dfrac{f(x_0+h,\ y_0-k)-f(x_0-h,\ y_0-k)}{2h}}{2k}$$

e se in esso passiamo al limite per $h=0$, supposto che la f ammetta la derivata parziale prima rapporto ad x semigeneralizzata in un intorno di $(x_0 y_0)$ sulla retta $x=x_0$, si ha

$$\frac{\left(\dfrac{\partial_{sg} f(x, y)}{\partial x}\right)_{x_0,\, y_0+k}-\left(\dfrac{\partial_{sg} f(x, y)}{\partial x}\right)_{x_0 \cdot y_0-k}}{2k}.$$

Se la $\dfrac{\partial_{sg} f(x, y)}{\partial x}$ ammette la derivata parziale prima rapporto ad y semigeneralizzata in (x_0, y_0), passando al limite per $k=0$, si ha infine

$$\left[\frac{\partial_{sg}}{\partial y}\left(\frac{\partial_{sg} f(x, y)}{\partial x}\right)\right]=\left(\frac{\partial^2_{sg} f(x, y)}{\partial y \partial x}\right)_{x_0 y_0}.$$

Se la f ammette la derivata parziale prima rapporto ad y semigeneralizzata in un intorno di (x_0, y_0) sulla retta $y=y_0$ e la $\dfrac{\partial_{sg}(fx, y)}{\partial y}$ ammette la derivata parziale prima rapporto ad x semigeneralizzata in (x_0, y_0), il rapporto (γ) ha per limite

$$\left[\frac{\partial_{sg}}{\partial x}\left(\frac{\partial_{sg} f(x, y)}{\partial y}\right)\right]_{x_0 y_0}=\left(\frac{\partial^2_{sg} f(x, y)}{\partial x \partial y}\right)_{x_0 y_0}.$$

È chiaro che possono benissimo esistere queste due derivate seconde miste semigeneralizzate ed essere disuguali: ma qualora siano uguali coincidono colla derivata seconda mista generalizzata.

Se esiste nei punti di un intorno di $x_0 y_0$ sulla retta $x=x_0$ la ordinaria derivata parziale prima rapporto ad x la quale abbia alla sua volta la derivata parziale prima rapporto ad y in $x_0 y_0$, è chiaro che è allora

$$\left(\frac{\partial^2_{sg} f(x, y)}{\partial y \partial x}\right)_{x_0, y_0}=\left(\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}\right)_{x_0, y_0}.$$

Analogamente se nei punti di un intorno di $(x_0\, y_0)$ sulla retta $y = y_0$ esiste la derivata parziale prima rapporto ad y la quale abbia in $(x_0 y_0)$ la derivata parziale rapporto ad x, si ha

$$\left(\frac{\partial^2_{sy} f(x, y)}{\partial x \partial y}\right)_{x_0, y_0} = \left(\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}\right)_{x_0, y_0};$$

e se vale la invertibilità delle derivazioni

$$\left(\frac{\partial_g{}^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}\right)_{x_0 y_0} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)_{x_0, y_0} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)_{x_0 y_0}.$$

9. — Riprendiamo l'integrale $I_{n,m}$ e deriviamo rapporto ad x; avremo

$$\frac{\partial I_{n,m}}{\partial x} = \frac{h_n h_m}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{d\,x}\left(\cos^{2n} \frac{u-x}{2}\right) du \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2m} \frac{v-y}{2} f(u, v)\, dv.$$

Ma

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^{2n} \frac{u-x}{2}\right) = -\frac{d}{du}\left(\cos^{2n} \frac{u-x}{2}\right)$$

onde

$$\frac{\partial I_{n,m}}{\partial x} = -\frac{h_n h_m}{4} \int_{-\pi}^{\pi} d\left(\cos^{2n} \frac{u-x}{2}\right) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2m} \frac{v-y}{2} f(u, v)\, dv =$$

$$= -\frac{h_n h_m}{4} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} d\left(\cos^{2n} \frac{u}{2}\right) \int_{-\pi-y}^{\pi-y} \cos^{2m} \frac{v}{2} f(x+u, y+v)\, dv.$$

Nella ricerca del valore assintotico di $\frac{\partial I_{n,m}}{\partial x}$ si può trascurare la parte di integral doppio precedente relativo alla parte esterna al quadrato limitato da $u = \pm \epsilon$; giacchè, fatto lo spezzamento dell'integrale in cinque, come al n° 5, i primi due integrali sono infinitesimi dell'ordine di $n\sqrt{m} \cos^{2m} \frac{\epsilon}{2}$ e gli altri due dell'ordine $m\sqrt{n} \cos^{2n} \frac{\epsilon}{2}$. Per la dimostrazione, osservato che $d\left(\cos^{2n} \frac{u}{2}\right) = n \cos^{2n-1} \frac{u}{2} \operatorname{sen} \frac{u}{2} < n \cos^{2n-1} \frac{u}{2}$, si applicano gli stessi procedimenti tenuti al n° 5 stesso.

Allora

$$\lim \frac{\partial I_{n,m}}{\partial x} = -\lim \frac{h_n h_m}{4} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\left(\cos^{2n}\frac{u}{2}\right) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \cos^{2m}\frac{v}{2} f(x+u,\, y+v)dv =$$

$$= -\lim \frac{h_n h_m}{4} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\left(\cos^{2n}\frac{u}{2}\right) \int_0^{\varepsilon} \{f(x+u, y+v) + f(x+u, y-v)\} \cos^{2m}\frac{v}{2} dv =$$

$$= -\lim \frac{h_n h_m}{4} \int_0^{\varepsilon} \cos^{2m}\frac{v}{2} dv \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \{f(x+u, y+v) + f(x+u, y-v)\} d\left(\cos^{2n}\frac{u}{2}\right) =$$

$$= -\lim h_n h_m \int_0^{\varepsilon} \cos^{2m}\frac{v}{2} dv \int_0^{\varepsilon} \frac{f(x+u,y+v)+f(x+u,y-v)-f(x-u,y+v)-f(x-u,y-v)}{4u} .$$

$$. u\, d\left(\cos^{2n}\frac{u}{2}\right) = -\lim \mu \,.\, h_n h_m \int_0^{\varepsilon} \cos^{2m}\frac{v}{2} dv \int_0^{\varepsilon} u \left(d \cos^{2n}\frac{u}{2}\right)$$

indicando con μ un valore medio del rapporto

$$\frac{f(x+u,\, y+v) + f(x+u,\, y-v) - f(x-u,\, y+v) - f(x-u,\, y-v)}{4u}$$

nel quadrato di vertice inferiore sinistro (0,0) e di lato ϵ.

Ma, per la ragione che si aggiungono parti di integrali infinitesime per m ed n infiniti, noi possiamo anche scrivere

$$\lim \frac{\partial I_{n,m}}{\partial x} = -\lim \mu \frac{h_n h_m}{4} \int_{-\pi-y}^{\pi-y} \cos^{2m}\frac{v}{2} dv \int_{-\pi-x}^{\pi-x} u d\left(\cos^{2n}\frac{u}{2}\right) =$$

$$= \lim \mu \frac{h_n h_m}{4} \int_{-\pi-y}^{\pi-y} \cos^{2m}\frac{v}{2} \left\{ -\left[u \cos^{2n}\frac{u}{2}\right]_{-\pi-x}^{\pi-x} + \int_{-\pi-x}^{\pi-x} \cos^{2n}\frac{u}{2} du \right\} dv =$$

$$= \lim \mu \frac{h_n h_m}{4} \int_{-\pi-y}^{\pi-y} \cos^{2m}\frac{v}{2} dv \int_{-\pi-x}^{\pi-x} \cos^{2n}\frac{u}{2} du \,. = \lim \mu.$$

Ma poichè ϵ è piccolo a piacere il limite di μ è la derivata prima generalizzata di $f(x, y)$ nel punto considerato (xy), supposto che questa esista.

Non c'è che a ripetere le ipotesi sulla f che abbiamo fatte nel paragrafo 7 per vedere le relazioni che esistono fra la derivata $\frac{\partial I_{n,m}}{\partial x}$ e la derivata parziale prima semigeneralizzata e l'ordinaria derivata parziale prima rapporto ad x della funzione $f(x, y)$.

Ad es., supposta la continuità rispetto ad y di f e l'esistenza della derivata parziale semigeneralizzata rapporto ad x in (x, y) si avrà

$$\lim \frac{\partial I_{n,m}}{\partial x} = -\lim \frac{h_n h_m}{2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \cos^{2m} \frac{v}{2}\, dv \int_0^{\varepsilon} \frac{f(x+u, y+v) - f(x-u, v+y)}{2u} \cdot$$

$$\cdot\, ud\left(\cos^{2n}\frac{u}{2}\right) = \lim \overline{\mu}\, \frac{h_n h_m}{2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \cos^{2m} dv \int_0^{\varepsilon} ud\left(\cos^{2n}\frac{u}{2}\right) = \lim \overline{\mu}$$

essendo $\overline{\mu}$ un valore medio di

$$\frac{f(x+u,\ y+v) - f(x-u,\ y+v)}{2u}$$

nel rettangolo limitato da $u = 0$, $u = \epsilon$, $v = \pm\epsilon$: onde

$$\lim \frac{\partial I_{n,m}}{\partial x} = \frac{\partial_{sg} f(x,y)}{\partial x}.$$

10. — Facciamo ora di $I_{n,m}$ la derivata seconda mista: che essa esista indipendentemente dall'ordine di derivazione, è manifesto se si pensa che $I_{n,m}$ non è che un polinomio trigonometrico.

Si ha

$$\frac{\partial^2 I_{n,m}}{\partial x \partial y} = \frac{h_n h_m}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{dx}\left(\cos^{2n}\frac{u-x}{2}\right) du \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{dy}\left(\cos^{2m}\frac{v-y}{2}\right) f(u,v)\, dv.$$

Ma

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^{2n}\frac{u-x}{2}\right) = -\frac{d}{du}\left(\cos^{2n}\frac{u-x}{2}\right)$$

$$\frac{d}{dy}\left(\cos^{2m}\frac{v-y}{2}\right) = -\frac{d}{dv}\left(\cos^{2m}\frac{v-y}{2}\right)$$

onde

$$\frac{\partial^2 I_{n,m}}{\partial x \partial y} = \frac{h_n h_m}{4} \int_{-\pi}^{\pi} d\left(\cos^{2n}\frac{u-x}{2}\right) \int_{-\pi}^{\pi} f(u,v)\, d\left(\cos^{2m}\frac{v-y}{2}\right) =$$

$$= \frac{h_n h_m}{4} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} d\cos^{2n}\frac{u}{2} \cdot \int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(x+u,\ y+v)\, d\cos^{2m}\frac{v}{2}.$$

Nella ricerca del valore assintotico di $\frac{\partial^2 I_{n,m}}{\partial x \partial y}$ possiamo, per le solite ragioni, limitarci alla considerazione dell'integrale

$$\frac{h_n h_m}{4} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\left(\cos^{2n}\frac{u}{2}\right) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+u,\ y+v)\, d\left(\cos^{2m}\frac{v}{2}\right) =$$

$$= h_n h_m \int_0^{\varepsilon} ud\cos^{2n}\frac{u}{2} \int_0^{\varepsilon} \frac{f(x+u,y+v) - f(x+u,y-v) - f(x-u,y+v) + f(x-u,y-v)}{4uv}\, vd\cos^{2m}\frac{v}{2}.$$

Se si indica con μ un valor medio del rapporto

$$\frac{f(x+u,\ y+v)-f(x+u,\ y-v)-f(x-u,\ y+v)+f(x-u,\ y-v)}{4uv}$$

nel quadrato limitato da $u=\pm\epsilon$, $v=\pm\epsilon$, si ha

$$\lim \frac{\partial^2 I_{n,m}}{\partial x \partial y} = \lim \mu\, h_n h_m \int_0^{\varepsilon} u d\cos^{2m}\frac{u}{2} \int_0^{\varepsilon} v d\cos^{2m}\frac{v}{2} =$$

$$= \lim \mu\ \frac{h_n h_m}{4} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} u d\cos^{2n}\frac{u}{2} \int_{-\pi-y}^{\pi-y} v d\cos^{2m}\frac{v}{2} =$$

$$= \lim \mu\ \frac{h_n h_m}{4} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} \cos^{2n}\frac{u}{2}\, du \int_{-\pi\ y}^{\pi-y} \cos^{2m}\frac{v}{2}\, dv = \lim \mu.$$

Ammesso che di f esista la derivata seconda mista generalizzata, è chiaro che, per la piccolezza arbitraria di ϵ, sarà

$$\lim \frac{\partial^2 I_{n,m}}{\partial x \partial y} = \lim \mu = \frac{\partial_g{}^2 f(x,\ y)}{\partial x \partial y}.$$

E per le considerazioni del n° 8 sappiamo già quali relazioni intercedano fra $\lim \frac{\partial^2 I_{n,m}}{\partial x \partial y}$, le derivate miste semigeneralizzate e la ordinaria derivata seconda mista di $f(x,\ y)$.

11. — Supponiamo che la $f(x, y)$ ammetta in un intorno del punto $(x,\ y)$ che si considera la derivata parziale di ordine $r+s-2$, $\frac{\partial^{r+s-2} f}{\partial x^{r-1}\partial y^{s-1}}$, atta all'integrazione di campo e sulle parallele agli assi e dotata di derivata seconda mista generalizzata in (x, y).

Consideriamo allora la derivata parziale di ordine $r+s$ di $I_{n,m}$

$$\frac{\partial^{r+s} I_{n\ m}}{\partial x^r \partial y^s} = \frac{h_n h_m}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^r}{dx^r}\left(\cos^{2n}\frac{u-x}{2}\right) du \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^s}{dy^s}\left(\cos^{2m}\frac{v-y}{2}\right) f(u,\ v)\, dv =$$

$$= (-1)^{r+s}\ \frac{h_n h_m}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^r}{du^r}\left(\cos^{2n}\frac{u-x}{2}\right) du \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^s}{dv^s}\left(\cos^{2m}\frac{v-y}{2}\right) f(u,\ v) dv =$$

$$= (-1)^{r+s}\ \frac{h_n h_m}{4} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} \frac{d^r}{du^r}\left(\cos^{2n}\frac{u}{2}\right) du \int_{-\pi-y}^{\pi-y} \frac{d^s}{dv^s}\left(\cos^{2m}\frac{v-y}{2}\right) f(u,\ v)\, dv.$$

Si potrebbe, come altrove, provare che il valore assintotico

per n ed m infiniti del secondo membro non si altera se si limita l'integrazione al quadrato $u=\pm\epsilon$, $v=\pm\epsilon$; cioè

$$\lim \frac{\partial^{r+s} I_{n,m}}{\partial x^r \partial y^s} = (-1)^{r+s} \lim \frac{h_n h_m}{4} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{d^r \cos^{2n}\frac{u}{2}}{du^r} du \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{d^s \cos^{2m}\frac{v}{2}}{dv^s} f(u, v) dv.$$

Ma

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{d^s \cos^{2m}\frac{v}{2}}{dv^s} f(u, v)\, dv =$$

$$= \sum_{h=0}^{s-2} (-1)^h \left[\frac{\partial^h f}{\partial v^h} \frac{d^{s-h-1} \cos^{2m}\frac{v}{2}}{dv^{s-h-1}} \right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + (-1)^{s-1} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\partial^{s-1} f(u, v)}{\partial v^{s-1}}\, d\left(\cos^{2m}\frac{v}{2}\right).$$

La sommatoria è una somma di $s-1$ addendi infinitesimi per m infinito, onde

$$\lim \frac{\partial^{r+s} I_{n\,m}}{\partial x^r \partial y^s} = (-1)^{r-1} \lim \frac{h_n h_m}{4} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{d^r \cos^{2n}\frac{u}{2}}{du^r} du \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\partial^{s-1} f(u, v)}{\partial v^{s-1}}\, d\cos^{2m}\frac{v}{2} =$$

$$= (-1)^{r-1} \lim \frac{h_n h_m}{4} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\cos^{2m}\frac{v}{2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\partial^{s-1} f(u, v)}{\partial v^{s-1}} \frac{d^r \cos^{2n}\frac{u}{2}}{du^r} du =$$

$$= \lim \frac{h_n h_m}{4} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\cos^{2m}\frac{v}{2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\partial^{r+s-2} f(u, v)}{\partial u^{r-1} \partial v^{s-1}}\, d\cos^{2n}\frac{u}{2}$$

facendo, per ottenere l'ultima eguaglianza, $r-1$ integrazioni per parti analogamente a ciò che abbiamo fatto prima.

Pei risultati del n° 10 possiamo concludere:

Il valore assintotico di $\frac{\partial^{r+s} I_{n,m}}{\partial x^r \partial y^s}$ *è la derivata seconda mista generalizzata di* $\frac{\partial^{r+s-2} f(x, y)}{\partial x^{r-1} \partial y^{s-1}}$: *sotto note condizioni esso coincide con* $\frac{\partial^{r+s} f(x, y)}{\partial x^r \partial y^s}$.

12. — Per le derivate pure, si può dare una definizione di derivate parziali pure semigeneralizzate, analoga a quella che si dà di derivata d'ordine qualunque di una funzione di una variabile.

Se si può scrivere

$$\frac{f(x+h,y)-f(x-h,y)}{2}=ha_{1,0}+\frac{h^3}{3!}a_{3,0}+\ldots+\frac{h^{2n+1}}{2n+1!}(a_{2n+1,0}+\omega)$$

$$\frac{f(x+h,y)+f(x-h,y)}{2}=a_{0,0}+\frac{h^2}{2!}a_{2,0}+\frac{h^4}{4!}a_{4,0}+\ldots+\frac{h^{2n}}{2n!}(a_{2,n0}+\omega)$$

$$\frac{f(x,y+k)-f(x,y-k)}{2}=ka_{0,1}+\frac{k^3}{3!}a_{0,3}+\ldots+\frac{k^{2n+1}}{2n+1!}(a_{0,2n+1}+\eta)$$

$$\frac{f(x,y+k)+f(x,y-k)}{2}=a'_{0,0}+\frac{k^2}{2!}a_{0,2}+\frac{k^4}{4!}a_{0,4}+\ldots+\frac{k^{2n}}{2n!}(a_{0,2n}+\eta)$$

ove le quantità a sono indipendenti da h e k e le ω sono infinitesime con h e le η con k, diremo che $a_{i,0}$ *è la derivata parziale pura d'ordine* i *rapporto ad* x *semigeneralizzata di* f(x, y) e che $a_{0,j}$ *è la derivata pura d'ordine* j *rapporto ad* y *semigeneralizzata di* f(x, y).

Esse coincidono colle ordinarie derivate pure, quando queste esistano. Se la funzione è continua in (x, y) è $a_{00}=a'_{00}$.

Ammessa la integrabilità nel quadrato Q e sulle rette parallele agli assi della derivata pura semigeneralizzata di ordine $r-2\ (r\geq 2)$ rapporto ad x e la sua continuità rispetto ad y, almeno in un intorno del punto (x, y) che si considera, della funzione $f(x, y)$, si possono ripetere le considerazioni fatte dal De la Vallée-Poussin nei n[i] 17-20 della sua Memoria e concludere:

La derivata parziale pura di $I_{n,m}$ *d'ordine* $r\geq 2$ *rapporto ad* x *ha per limite la derivata parziale pura d'ordine* r *rapporto ad* x *semigeneralizzata di* f(x, y) *qualora essa esista e la derivata pura semigeneralizzata di ordine* $r-2$ *sia integrabile in* Q *e sulle rette parallele agli assi e di più continua rispetto ad* y *almeno in un intorno del punto* (x, y) *che si considera.*

Se la derivata pura d'ordine r *di* f(x, y) *esiste in* (x, y), *ferme restando le ipotesi circa la derivata pura d'ordine* $r-2$, *la derivata* $\frac{\partial^r I_{n,m}}{\partial x^r}$ *coincide con* $\frac{\partial^r f}{\partial x^r}$.

Analoga proposizione vale per le derivate pure rapporto ad y di $I_{n,m}$.

Relazioni fra le densità e le costanti cristallografiche in alcuni gruppi di sostanze.

Nota del Dr. LUIGI COLOMBA.
Libero docente di Mineralogia nell'Univ. di Torino.

In una precedente nota (1) ho indicato come in alcuni gruppi di sostanze cristallizzate appartenenti ai sistemi monometrico, romboedrico e dimetrico si possa stabilire tra le densità e le costanti cristallografiche delle singole sostanze una relazione capace di assumere un tipo ben definito per l'intervento di alcune costanti.

Scopo della presente nota è quello di vedere, mediante una serie di esempi, entro quali limiti si possano applicare oppure quali modificazioni debbano subire i concetti da me espressi, in alcuni speciali gruppi appartenenti agli stessi sistemi prima esaminati ma che presentino, dipendentemente dalla loro composizione chimica, qualche difficoltà ad essere del tutto determinate in quegli elementi la cui conoscenza è necessaria onde poter stabilire se anche per esse esistano relazioni del tipo prima accennato.

I.

Fra i vari casi da considerare si ha quello in cui si tratti di composti che contengano sostanze le quali non siano note allo stato libero; tale è il caso dei composti che contengono il protossido di ferro, FeO. Considerando solamente, come già ho fatto nel precedente mio studio, quelle specie le quali presentano formole poco complesse e facendo astrazione da qualsiasi impurità od elemento accessorio, si possono considerare fra le

(1) *Relazioni fra le densità e le costanti cristallografiche, ecc.*, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", (1909), vol. XLIV, p. 399.

specie che contengono il detto protossido alcune appartenenti al gruppo degli spinelli e fra queste in modo speciale la *magnetite* (Fe_3O_4); altre se ne hanno nel gruppo dei titanati e dei manganiti, rappresentate essenzialmente dalla *ilmenite* ($FeTiO_3$) e dalla *bixbyite* ($FeMnO_3$).

Per la determinazione del valore corrispondente all'ipotetico volume molecolare del protossido di ferro, necessario per stabilire il valore di v'' in Σv^n, sono partito dal concetto di ricavarlo da una specie la quale, oltre al presentare grande purezza, appartenesse anche ad un gruppo nel quale si abbiano altre specie note in modo ben determinato, onde poter stabilire da quale equazione dovessi partire.

Tale è appunto la magnetite; considerando la sua densità media uguale a 5,15 ed assumendo l'equazione $c_3 = Q_3 A$ già applicata nella mia precedente nota alle specie appartenenti al gruppo degli spinelli, se si tien conto che

$$A = \frac{\Sigma v^n}{V.m} \qquad \Sigma v^n = v' + v''$$

$$V.m = \frac{P.m}{D} \qquad v' = (v.m) Fe_2O_3 = 30{,}44$$

si ottiene per il volume molecolare v'' del protossido di ferro, essendo il peso molecolare della magnetite pari a 231,70 il seguente valore

$$v'' = \frac{c_3 \,.\, (P.m)}{Q_3 \,.\, D} - v' = \frac{1{,}2246 \,.\, 231{,}70}{1{,}316 \,.\, 5{,}15} - 30{,}44 = 11{,}42 \quad D = 6{,}29.$$

Se si partisse invece dalla ilmenite, considerata come puro titanato ferroso, applicando ad essa l'equazione già impiegata nella nota precedente per i titanati romboedrici $c_3 = \frac{Q_3}{A}$, si ricava per il volume molecolare del protossido di ferro un valore estremamente vicino a quello prima ottenuto. Infatti, considerando la densità media dell'ilmenite uguale a 4,72, essendo in essa $c_3 = 1{,}3845$ ed essendo il volume molecolare del biossido di titanio, come già si vide, pari a 18,82 ed il peso molecolare del titanato ferroso eguale a 151,9, si ottiene per il volume molecolare del protossido di ferro, cioè per v'' il valore

$$v'' = \frac{Q_3 \,.\, (P.m)}{c_3 \,.\, D} - v' = \frac{1{,}316 \,.\, 151{,}9}{1{,}3845 \,.\, 4{,}72} - 18{,}82 = 11{,}76 \quad D = 6{,}13.$$

Assumendo il valore medio 11,59 come valore reale si ottengono per le dette tre specie i seguenti valori, essendo il volume molecolare del biossido di manganese uguale a 17,06:

	Σv^n	c_3	Equazione	A	$V.m$	$P.m$	D_1	D	$D - D_1$
Magnetite	42,03	1,2246	$Q_3 A$	0,93	45,17	231,7	5,13	5,15	$+ 0,02$
Ilmenite	30,45	1,3845	$\frac{Q_3}{A}$	0,95	32,01	151,9	4,73	4,72	$- 0,01$
Bixbyite	28,65	1,2246	$Q_3 A$	0,93	30,80	158,9	5,19	4,95	$- 0,24$

L'unica di queste tre specie che presenti differenze non trascurabili è la bixbyite, ma ciò non deve meravigliare se si considera l'analisi di Penfield e Foote (1) perchè da essa risulta che la bixbyite contiene quantità non trascurabili di impurità le quali hanno, data la loro composizione chimica (SiO_2, MgO, SiO_2, Al_2O_3), certamente per effetto di ridurne la densità.

Ciò che invece è degno di nota nella detta specie si è che il tipo della sua deformazione è corrispondente a quello della braunite con la quale presenta analogie di composizione chimica essendo ambedue da considerarsi come metamanganiti; infatti, se invece di ricorrere alle equazioni parametrali romboedriche, si ricorre per la bixbyite alle dimetriche, occorre partire dalla equazione $C_4 = Q_4 A \sqrt{2}$ che è appunto quella impiegata nella precedente nota per la braunite, per cui quest'ultima rappresenterebbe un caso molto caratteristico di una sostanza dimetrica con simmetria molto approssimata alla monometrica.

L'influenza delle impurità si rende manifesta in modo molto sensibile nella hercinite e nella cromite, volendo restare nel gruppo degli spinelli, le cui specie dànno, come risulta dai vari esempi riportati anche nella precedente nota, risultati molto buoni, quando si tratta di specie pure.

Partendo dalle loro formole tipiche $FeMn_2O_4$ e $FeCr_2O_4$, cioè trascurando tutte quelle impurità che possono contenere e mantenendo per i volumi molecolari dei sesquiossidi di alluminio e

(1) " Amer. Journ. of Science „ (1897), 4, p. 105.

di cromo i valori già fissati 25,55 e 29,25, si ottengono per queste due specie i risultati seguenti, applicando anche ad esse la equazione $c_3 = Q_3 A$:

	$\Sigma v''$	c_3	A	$V.m$	$P.m$	D_1	D	$D - D_1$
Hercinite	37,14	1,2246	0,93	39,93	174,10	4,36	3,95	— 0,41
Cromite	40,84	„	„	43,91	224,50	5,11	4,60	— 0,51

Da questi dati risulta che le densità teoriche sono superiori a quelle sperimentali il che è in accordo col fatto che nelle dette specie le impurità od i componenti accessori hanno appunto per effetto di ridurre le densità.

II.

Non sempre però per il solo fatto della presenza di impurità si hanno differenze così sensibili fra i valori teorici e quelli sperimentali delle densità. Un gruppo nel quale queste differenze appariscono relativamente piccole è quello del granato nel quale, sebbene si possa ammettere la presenza di una determinata serie di varietà chimicamente ben definite, in realtà queste presentano sensibilissime modificazioni nella composizione chimica.

Considerando le dette varietà allo stato di purezza, essi corrispondono alle seguenti composizioni chimiche: *grossularia* ($Ca_3Al_2Si_3O_{12}$); *piropo* ($Mg_3Al_2Si_3O_{12}$); *almandino* ($Fe_3Al_2Si_3O_{12}$); *spessartino* ($Mn_3Al_2Si_3O_{12}$); *andradite* ($Ca_3Fe_2Si_3O_{12}$); *uwarovite* ($Ca_3Cr_2Si_3O_{12}$).

Però le composizioni chimiche, come già ho detto, appariscono molto più complesse per il fatto che tanto i sequiossidi quanto i protossidi si sostituiscono in varia proporzione, per modo che ne risultano valori molto variabili nelle densità, le quali, ad esempio nella grossularia e nel piropo tendono ad aumentare, perchè contengono sempre del ferro, mentre invece nell'almandino e nello spessartino tendono a diminuire.

Ora se si determinano le densità teoriche dei granati, si nota che le differenze che esistono fra queste e quelle speri-

mentali sono in generale poco elevate per modo che si possono senza alcuna difficoltà spiegare come dipendenti essenzialmente dalle differenze di composizione chimica; la sola andradite, come si vedrà in appresso si scosta leggermente da quanto la teoria prevede, senza che nella sua composizione chimica siavi nulla che giustifichi tali spostamenti i quali anzi si manifestano in senso inverso di quanto dovrebbe avvenire.

Considerando i granati come silicati doppi di un sesquiossido e di un protossido si possono, per ottenere nelle singole varietà il valore di Σv^n, considerare come componenti immediati la silice, il sesquiossido ed il protossido, per cui indicando con $(v.m)'$, $(v.m)''$, $(v.m)'''$ rispettivamente i volumi molecolari dei detti gruppi, si avrebbe

$$\Sigma v^n = 3(v.m)' + (v.m)'' + 3(v.m)'''.$$

Per la silice essendo il suo peso molecolare uguale a 60,40 e la densità pari a 2,65 si ottiene $(v.m)' = 22,79$; per gli altri ossidi, assumendo i valori già impiegati nei casi precedenti si ottengono i seguenti valori per $(v.m)''$ e $(v.m)'''$:

Al_2O_3	$(v.m)'' = 25,55$	CaO	$(v.m)''' = 17,40$
Fe_2O_3	„ $= 30,44$	MgO	„ $= 11,16$
Cr_2O_3	„ $= 29,25$	FeO	„ $= 11,59$
		MnO	„ $= 13,65$.

Partendo da questi valori ed applicando l'equazione $c_3 = \frac{Q_3}{A}$ si ottengono per le singole varietà di granato considerate allo stato di purezza i risultati seguenti:

	Σv^n	A	$V.m$	$P.m$	D_1	D
Grossularia .	146,12	1,0746	135,97	451,70	3,32	3,28-3,63
Piropo	127,40	„	118,55	404,48	3,41	3,66-3,86
Spessartino . .	134,93	„	125,56	496,40	3,95	3,97-4,23
Almandino . .	128,75	„	119,81	499,10	4,17	3,99-4,16
Andradite . .	150,87	„	140,39	509,30	3,62	3,64-3,84
Uwarovite . .	149,82	„	139,42	502,10	3,60	3,43-3,51

III.

Un gruppo molto interessante è quello dei carbonati romboedrici; in esso però i dati appariscono molto indeterminati non solo perchè si ha un termine del tutto ignoto rappresentato dal valore che in Σv^n deve corrispondere al volume molecolare dell'anidride carbonica allo stato cristallino, ma pur anche perchè manca ogni elemento per stabilire quale sia l'equazione che deve essere assunta.

Tuttavia si può dimostrare come nel gruppo dei carbonati romboedrici si possa giungere a risultati molto buoni per un determinato valore costante corrispondente a v', quando si ammettano per le specie appartenenti al detto gruppo le attuali costanti cristallografiche, cosa perfettamente logica quando si pensi all'intimo legame che esiste fra le dette costanti e le sfaldature esistenti nelle singole specie.

Considero la calcite e la magnesite; essendo le loro rispettive densità uguali a 2,70 ed a 3, siano A' ed A'' i loro indici di deformazione; ottengo

$$A' = \frac{(\Sigma v^n)'}{(V.m)'} \qquad A'' = \frac{(\Sigma v^n)''}{(V.m)''}$$

se con $(\Sigma v^n)'$, $(\Sigma v^n)''$, $(V.m)'$, $(V.m)''$ indico rispettivamente i valori di Σv^n e di $V.m$ corrispondenti ai due composti considerati.

Date le relazioni che in un composto passano fra Σv^n, $V.m, D,$ se con v' indico in ambedue i casi il volume molecolare dell'anidride carbonica allo stato cristallino e si pongono, come già ho visto, quelli degli ossidi di calcio e di magnesio rispettivamente uguali a 17,40 ed a 11,16, ottengo:

$$\textit{Calcite} \qquad A' = \frac{2{,}70}{100}\,(v' + 17{,}40) = 0{,}4698 + 0{,}0270\, v'$$

$$\textit{Magnesite} \quad A'' = \frac{3}{84{,}30}\,(v' + 11{,}16) = 0{,}39685 + 0{,}03556\, v'.$$

Se nelle dette specie si avesse uguaglianza nelle costanti cristallografiche dovrebbe essere

$$A' = A''$$

ed in tal caso ricavando v' dalle soprascritte equazioni, si avrebbe

$$v' = 8{,}545.$$

Dalle dette equazioni si ricava che a seconda che si abbia

$$v' \gtrless 8{,}545$$

sarà

$$A \lesseqgtr A'.$$

Ora se si ammette che il valore così ottenuto per v' rappresenti il volume molecolare dell'anidride carbonica allo stato solido si giungerebbe, essendo $v' = 8{,}545$, per la sua densità nelle stesse condizioni, ad un valore $d' = 5{,}15$ e quindi certo molto alto; ne risulta la necessità di porre $v' > 8{,}545$ e quindi di ammettere che sia $A' < A''$.

Se ora si considerano le quattro equazioni parametrali romboedriche e si indicano rispettivamente con c_3' e c_3'' le costanti cristallografiche della calcite e della magnesite, essendo $c_3' > c_3''$, si ha che mentre la coppia di equazioni

$$c_3 = Q_3 A \qquad c_3 = \frac{A}{Q_3}$$

porta ad $A' > A''$, invece la seconda

$$c_3 = \frac{Q_3}{A} \qquad c_3 = \frac{1}{Q_3 A}$$

porta ad $A' < A''$.

Conviene quindi assumere questa seconda coppia, nel qual caso sostituendo a c_3' ed a c_3'' i rispettivi valori 0,8543 e 0,8112 e risolvendo le equazioni si ottengono per d' i valori seguenti:

		$c_3 = \frac{Q_3}{A}$	$c_3 = \frac{1}{Q_3 A}$
Calcite	$(V.m = 36{,}90)$	$d' = 1{,}11$	$d' = 2{,}84$
Magnesite	$(V.m = 28)$	$d' = 1{,}27$	$d' = 2{,}89.$

Di qui risulta che mentre la prima equazione porta a valori abbastanza differenti per v', la seconda porta invece a va-

lori talmente prossimi da potersi considerare come identici; assumendo quindi il valore medio uguale a 2,86 si ottiene $v' = 15,38$ che sostituito nei singoli carbonati porta a risultati molto buoni anche per i carbonati misti, i quali sono stati considerati come corrispondenti alle composizioni teoriche date da Dana (1), essendo i valori di v'' per i singoli ossidi basici quelli ottenuti già precedentemente.

I risultati che si ottengono sono riferiti nella seguente tavola:

	c_3	A	$\Sigma v''$	$V.m$	$P.m$	D_1	D estreme	D media	d' reale
Calcite . .	0,8543	0,889	32,78	36,78	100,10	2,72	2,71-2,72	2,71	2,84
Dolomite .	0,8322	0,913	59,33	64,97	184,46	2,84	2,83-2,88	2,85	2,88
Magnesite .	0,8112	0,937	26,54	28,32	84,36	2,94	3,00-3,10	3,00	2,89
Ankerite .	0,8332	0,912	119,07	130,56	400,46	3,07	2,93-3,10	3,05	2,83
Mesitite . .	0,8141	0,933	80,05	85,79	284,62	3,31	3,33-3,36	3,35	2,91
Pistomesite	0,8129	0,934	53,51	57,29	200,26	3,49	3,42	3,42	2,74
Siderite . .	0,8184	0,928	26,97	29,06	115,90	3,98	3,85-3,90	3,88	2,73
Rodocrosite	0,8184	0,928	29,03	31,28	115,00	3,67	3,55-3,65	3,60	2,75
Smithsonite	0,8063	0,943	29,41	31,16	125,40	4,02	4,4-4,5	4,4	3,03
$CdCO_3$ . . .	0,8363	0,909	31,62	34,78	172,40	4,95	4,96	4,96	2,86

Da questi risultati si deduce che l'unica specie in cui i valori sperimentali si allontanano sensibilmente da quelli teorici è la smithsonite; però, come si ricava dai valori di d' ottenuti partendo dalle densità medie dei singoli carbonati, lo scostamento che si osserva nella smithsonite è molto piccolo e non sposta sensibilmente il valore medio di d' che risulta uguale a 2,85.

Un fatto degno di nota poi nei carbonati romboedrici si è che l'equazione che si deve assumere per essi è la stessa impiegata per le specie del gruppo della pirargirite, il che potrebbe forse spiegare le grandi analogie constatate da Q. Sella (2) fra le forme cristalline della calcite e quelle della pirargirite.

(1) *System of Mineralogy*, 1892, p. 261 e seg.

(2) *Sulle forme cristalline della calcite e dell'argento rosso, Quadro riassuntivo.* Torino, Paravia, 1856.

IV.

Un altro gruppo di specie che, per quanto scarso di specie, merita di essere studiato si è quello delle specie contenenti mercurio ed appartenenti al gruppo dei solfuri, ecc.

Qui pure, se si considerano solamente le specie che sono cristallograficamente ben determinate, cioè il *cinabro*, la *metacinnabarite* e la *tiemannite* si può giungere per il volume molecolare del mercurio ad un valore medio che può abbastanza bene servire per le dette specie, quando però si tenga conto del fatto che nella metacinnabarite la densità presenta oscillazioni molto grandi che vanno da 7,11 a 7,80 per cui devesi solo rispetto ad essa accontentare di risultati approssimati.

Assumendo per il mercurio allo stato solido cristallino una densità pari a 16 e quindi poco superiore ai massimi determinati dai vari autori, si ottiene per il suo volume molecolare il valore 12,50; essendo il volume molecolare del solfo pari a 16,41 si ottengono per il cinabro i risultati seguenti se si ammette di partire dall'equazione $c_3 = \frac{A}{Q_3}$ corrispondente a quella impiegata per la wurtzite, la greenockite e per il solfuro di magnesio:

	$\Sigma v''$	$P.m$	D estreme	D media	$V.m$	A	c_3
Cinabro	28,90	232	8-8,10	8,06	28,78	1,0042	0,763

Il valore così ottenuto per la costante cristallografica del cinabro non corrisponde a quello attuale pari a 1,145; corrisponde invece esattamente all'attuale $20\bar{2}3$; ora questa sostituzione di costante non solo non ha nulla di straordinario per il fatto che la forma suddetta è abbastanza comune nel cinabro e fu anzi osservata come prevalente nei cristalli di New Idria in California la sua inversa $02\bar{2}3$ (1), ma presenta il vantaggio

(1) Melville e Lindgren: " United States Geological Surveys Bull. ", 61 (1890), 1.

di stabilire una relazione abbastanza definita fra i quattro solfuri di magnesio, di zinco (*wurtzite*), di cadmio e di mercurio (*cinabro*).

Infatti, se si considerano le densità dei rispettivi metalli ed i valori delle costanti ottenute in tutte le specie partendo dall'equazione $c_3 = \frac{A}{Q_3}$, si hanno i seguenti risultati:

MgS	$d(Mg) = 1,65$	$A = 1,612$	$c_3 = 1,2246$
ZnS	$d(Zn) = 6,80$	„ $= 1,073$	„ $= 0,8165$
CdS	$d(Cd) = 8,60$	„ $= 1,022$	„ $= 0,8063$
Hgs	$d(Hg) = 16,00$	„ $= 1,005$	„ $= 0,7633$

vale a dire i valori di A e c_3 decrescono col crescere delle densità dei metalli e se si portano le densità stesse ed i valori di c_3 su due assi ortogonali si nota che essi determinano una curvatura di tipo iperbolico molto regolare.

Applicando lo stesso valore del volume molecolare così ottenuto per il mercurio alla metacinnabarite ed alla tiemannite, partendo dall'equazione $c_3 = Q_3 A$ e tenendo conto del valore 18,80 già ammesso per il volume molecolare del selenio, si ottengono i risultati seguenti essendo in esse $A = 0,93$.

	$\Sigma v''$	$V.m$	$P.m$	D_1	D	
					estreme	media
Metacinnabarite	28,90	31,07	232	7,46	7,11-7,80	7,45
Tiemannite . .	31,30	33,65	279	8,29	8,20	8,20

V.

Fra i composti che meritano pure di essere considerati sono degni di interesse quelli la cui formola può considerarsi come risultante dall'unione di un numero variabile di molecole costituenti ognuna un composto ben definito: a questo tipo di composti appartengono, ad esempio, quelli che hanno comunemente il nome di *prodotti di addizione* i quali sono caratterizzati dal fatto che tanto le specie componenti quanto la specie ri-

sultante presentano lo stesso tipo cristallografico, essendo in tali casi costantemente la densità di quest'ultima uguale alla media della densità dei componenti. Si hanno però anche altre specie che a tutta prima sembrano avere grandi analogie con i prodotti di addizione ma ne differiscono perchè il tipo cristallografico che esse presentano non ha nulla di comune con quelli dei componenti.

In questi casi si nota pure che manca qualsiasi relazione fra le singole densità dei componenti e del composto risultante.

Il modo più semplice di spiegare questo speciale tipo di composti a formola multipla, si è quello di supporre che la loro formazione dipenda da una legge analoga a quella che, secondo quanto si è osservato negli esempi precedenti, regola l'andamento delle deformazioni nei sali, cioè che in essi le sostanze che funzionano da componenti abbiano subìto, nel dar luogo al nuovo composto più complesso, una seconda deformazione la quale, potendo essere differente da quelle a cui erano stati sottoposti i componenti, sia per l'intensità sia per il tipo, verrebbe necessariamente a dar luogo ad un tipo cristallografico del tutto indipendente da quello dei componenti.

Esempi di questi composti a deformazione multipla si hanno nella *pentlandite* e nella *calcopirite* che si possono rispettivamente considerare come solfuri doppi di nichelio e ferro e di rame e ferro.

Ammesso che in queste specie il monosolfuro di ferro comparisca allo stato di pirrotite, il che sarebbe confermato dal fatto che si hanno delle varietà di pirrotite, come quella di Tavetzthal analizzata da Gutknecht (1), che corrispondono a detta formola, le due specie considerate si potrebbero supporre rispettivamente derivate dall'unione della pirrotite con la millerite o con la covellite e la necessità di ammettere l'esistenza di una seconda deformazione risulterebbe dal fatto che partendo da specie romboedriche si giunge a due specie, l'una monometrica e l'altra dimetrica; tale ipotesi è perfettamente concordante con quanto si osserva.

---

(1) *Ueber Topas, Pyrrhotin und Pseudobrookit*, " Neu Jahr. für Min. ecc. „, 1880, I, Brief. Mitth., p. 164.

Assumendo per il monosolfuro di ferro una densità uguale a quella determinata da Rose e Rammelsberg e che in media è uguale a 4,70, si ottiene per il volume molecolare del detto composto, essendo il suo peso molecolare pari a 87,9, il valore 18,70.

Determinando Σv^n in funzione di questo valore e di quelli corrispondenti ai volumi molecolari del monosolfuro di nichelio e del solfuro ramico, rispettivamente uguali a 17 ed a 20,10, si ottengono per le dette specie i risultati seguenti, se si parte per ambedue dallo stesso tipo di equazione dimetrica

$$C_4 = \frac{Q_4 \sqrt{2}}{A}:$$

	C_4	A	Σv^n	$V.m$	$P.m$	D_1	D	$D-D_1$
Calcopirite	0,984	0,9166	38,80	42,33	183,20	4,32	4,25	—0,07
Pentlandite	1,00	0,93	35,70	38,38	176,7	4,60	4,60	—

VI.

Da questi nuovi esempi si può desumere che il principio fondamentale da me stabilito nella precedente Nota ha una estensione non troppo limitata; e ciò è pure provato dal fatto che anche in molti altri casi si avverano le relazioni a cui ho accennato, quando si assumano convenientemente le forme fondamentali e senza che le differenze fra i risultati teorici e sperimentali escano dai limiti di quell'approssimazione che non manca mai nelle leggi naturali, anche in quelle che dovrebbero avere un andamento meno soggetto ad oscillazioni.

Come si è visto però si hanno di quando in quando alcune sostanze per le quali le discordanze assumono un'ampiezza molto maggiore e che si debbono quindi considerare come anomale.

Talvolta però queste discordanze non si manifestano in modo arbitrario ma hanno qualche cosa di regolare nel loro modo di presentarsi, e non è raro il caso in cui in determinati gruppi di sostanze esse si manifestino in ciò che nelle sostanze stesse è

necessario di modificare in modo più o meno grande uno dei valori richiesti ma in modo del tutto uniforme per ogni singola specie esaminata.

Un esempio caratteristico lo si ha nel gruppo dei bisolfuri monometrici: *pirite*, *hauerite*, *laurite*. Considerando le densità di queste specie si nota subito come le deformazioni, pur essendo sempre positive, debbano avere un valore molto differente nelle singole specie, essendo molto più alte nella pirite e nella laurite che non nella hauerite, per cui essendo le dette specie monometriche, si può ammettere che nelle prime si abbia $A = 1{,}612$ e nell'ultima $A = 1{,}0746$.

Se ora si ammettono per il ferro, il manganese ed il rutenio i dati seguenti;

Fe	$p.a = 55{,}9$	$d = 7{,}80$	$v.a = 7{,}14$
Mn	„ $= 55{,}0$	„ $= 7{,}40$	„ $= 7{,}40$
Ru	„ $= 101{,}7$	„ $= 12{,}26$	„ $= 8{,}30$

essendo il volume atomico del solfo pari a 16,41, si ottengono, partendo dalle equazioni convenienti, rispettivamente per i corrispondenti bisolfuri densità uguali a 4,85; 3,15; 6,60 e quindi inferiori a quelle reali che sono rispettivamente uguali a 5-5,10; 3,30-3,46; 6,90.

Per rendere concordanti queste due serie di valori basta modificare leggermente il volume atomico del solfo, uguagliando questo volume a 15,61 il quale si ottiene ponendo nel solfo la densità uguale a 2,06, valore che è ancora nei limiti delle densità presentate dal solfo.

Invero, partendo da questo valore di v' si ottengono i risultati seguenti:

	$\Sigma v''$	A	$V.m$	$P.m$	D_1	D
Pirite . .	38,36	1,612	23,79	119,9	5,03	5-5,10
Laurite .	39,45	„	24,47	165,7	6,77	6,90
Hauerite	38,62	1,0746	35,93	119	3,31	3,36-3,46

È da notarsi come la modificazione che deve ammettersi nel volume atomico del solfo per giungere ai suddetti valori, è molto piccola, per cui se si assumesse per il solfo una densità pari a 2 e che corrisponde alla sua densità media, ottenendosi in tal modo un volume atomico uguale a 16, si otterrebbero, applicando questo valore tanto ai monosolfuri visti nella nota precedente quanto ai bisolfuri, risultati che differirebbero da quelli ottenuti partendo rispettivamente dai valori 16,41 e 15,61 di pochissimo, per modo che le differenze verrebbero ad essere nella massima parte dei casi completamente trascurabili.

Tali discordanze poi sembrano mancare del tutto nei poliarseniuri.

Infatti, considerando la *sperrilite* ($PtAs_2$) e la *skutterudite* ($CoAs_3$), ed assumendo per il volume atomico dell'arsenico il numero già ottenuto 13,03 (che porta a $v'=26,06$ ed a 39,09 rispettivamente nelle due specie) e per quelli del platino e del cobalto rispettivamente i valori 9 e 7 risultanti dalle loro densità uguali a 21,50 ($p.a.=194,4$) ed a 8,9 ($p.a.=59$) si ottengono, quando si parta dall'equazione $c_3=\frac{Q_3}{A}$, i seguenti risultati, essendo $A=1,0746$:

	Σv^n	$V.m$	$P.m$	D_1	D
Sperrilite . .	35,06	32,59	344,50	10,57	10,60
Skutterudite	46,09	42,83	284,00	6,63	6,72

Nei casi invece della smaltite e della cloantite le grandissime differenze che si osservano nelle loro composizioni non permettono di ottenere determinazioni sicure; solo si può arguire in esse una tendenza molto marcata ad un tipo di deformazione equivalente a quello della sperrilite.

E questo ci spiega l'andamento delle deformazioni nelle specie appartenenti al gruppo della cobaltite; considerando queste specie come corrispondenti alle formole:

Cobaltite	$CoS_2 . CoAs_2$
Gersdorffite	$NiS_2 . NiAs_2$
Ulmannite	$NiS_2 . NiSb_2$

e determinando i loro volumi molecolari partendo dalle loro densità medie ed i loro valori di Σv^n partendo dagli elementi che entrano a costituirle, si ottengono per esse i risultati seguenti per gli indici di deformazione:

	P.m	*D*	*V.m*	Σv^n	*A*
Cobaltite . .	332,0	6,20	53,54	72,88	1,36
Gersdorffite	331,4	6,20	53,45	71,96	1,34
Ulmannite .	421,4	6,90	61,07	82,26	1,34

Si hanno cioè valori che sono molto prossimi a quelli che si otterrebbero supponendo che i loro indici di deformazione fossero intermedî fra 1,0746 e 1,612.

Ora questo fatto risulta perfettamente logico se si ammette che, analogamente a quanto si nota nella pirite e nella smaltite e cloantite, nei solfuri di nichelio e cobalto e nei corrispondenti biarseniuri e biantimoniuri, i quali tutti debbono considerarsi come riferibili al sistema monometrico, le deformazioni siano rispettivamente uguali a 1,612 ed a 1,0746, poichè, allora considerando le dette specie come prodotti di addizione di un bisolfuro con un biarseniuro od un biantimoniuro, il loro indice di deformazione A dovrebbe essere uguale alla media degli indici corrispondenti all'una od all'altra serie di composti, e quindi si dovrebbe avere in tutte

$$A = \frac{1,612 + 1,0746}{2} = 1,343$$

valore, come si vede che molto si avvicina a quelli che realmente si ottengono per le dette specie.

Istituto Mineralogico dell'Università di Torino.

Una curiosa **alterazione anatomica-istologica** *in un Lombrico dovuta a* **Nematodi** *parassiti.*

Nota del Dr. LUIGI COGNETTI DE MARTIIS.
Assistente al R. Museo Zoologico di Torino.

(Con una Tavola).

È nota da tempo la presenza di Nematodi nel corpo dei lombrichi, sia liberi nella cavità celomica o intestinale che compresi nei tessuti di svariati organi. Alcuni dati " On the Nematodes parasitic in the Earthworm „ vennero coordinati da A. E. Shipley in una nota pubblicata alcuni anni or sono negli " Archives de Parasitologie „ (1). Una revisione il più possibile completa di quanto i varii autori, a partire da Wagler e da Goeze fino ai giorni nostri, scrissero su questo soggetto non sarebbe cosa lieve, ma l'utilità sua sarebbe senza dubbio riconosciuta dagli studiosi; tengasi conto del fatto che in taluni casi i lombrichi sono ospiti temporanei di Nematodi i quali raggiungeranno lo stato adulto nel corpo di altri animali che di lombrichi si nutrono. Basti ricordare ad esempio il *Syngamus trachealis* (v. Sieblod) e la *Spiroptera turdi* Molin (2).

Aprendo un lombrico o esaminandone gli organi in sezioni al microscopio v'è quasi certezza di scoprirvi almeno qualche larva di Nematode.

Nelle piccole forme delle famiglie Aelosomatidae, Naididae, Lumbriculidae, ed Enchytraeidae tale reperto è più raro. Ma

---

(1) Vol. VI, pag. 619-623, ann. 1902.

(2) Cfr. fra altro: H. D. Walker. The Gape Worm of Fowls (*Syng. tr.*); the Earth-Worm (Lumbricus terrestris), its original host. Bull. Buff. Soc. Nat. Sci., vol. V, 1886, pag. 47; C. J. Cori. Beitrag zur Biologie von *Spiroptera turdi* Molin. Ueber das Vorkommen der Jugendstadien dieses Nematoden im Bauchgefässe des Regenwurmes. S. B. Deutsch. naturw.-medicin. Ver. für Böhmen, Prag 1898, pag. 23.

nei lombrichi si trovano pure — almeno nella cavità celomica — dei Nematodi adulti, come io stesso ebbi talvolta occasione di accertare. E ciò fa supporre l'esistenza di speciali rapporti biologici fra quei Nematodi e i loro ospiti Oligocheti: questi ultimi sarebbero allora ospiti definitivi, oppure ospiti ricercati (o raggiunti a caso) dalle femmine di Nematodi onde deporvi le uova.

Un campo affatto ignoto o quasi è quello dell'anatomia patologica dei lombrichi in rapporto alla presenza nei loro tessuti di Nematodi parassiti. È particolarmente in questo campo che intendo portare un piccolo contributo con questa nota, presentando un caso occorsomi durante lo studio d'una collezione di lombrichi africani.

Un grosso esemplare di *Dichogaster itoliensis* (Michlsn), proveniente dalle colline di Toro presso Fort-Portal nel gruppo montuoso del Ruwenzori, mi apparve stranamente anomalo nei caratteri delle spermateche. Tali organi, formati d'un'ampolla continuata in un robusto e breve canale muscolare, possiedono un diverticolo compreso nella parete muscolosa del canale, presso il limite fra questo e l'ampolla (1). Le quattro spermateche mostrano nell'esemplare suddetto un corrugamento più o meno accentuato, accompagnato da ipertrofia della parte, nella regione occupata dal diverticolo (Tav., figg. 2 e 3).

Le spermateche normali, quali potei osservare in altri esemplari, hanno superfice liscia, e presentano al più una lieve emergenza che rivela il diverticolo compreso nello spessore della parete (Tav., fig. 1).

L'esame di alcune serie di sezioni al microscopio mi dimostrò chiaramente uno stretto rapporto fra l'alterazione superficiale sopra detta e un'anormale struttura della parete dell'organo. Questa mostra in quella regione un forte aumento in spessore causato dalla presenza di molte cavità di forma svariatissima, contenenti giovani larve di Nematodi (Tav., fig. 4, *p. p.*).

La diversa forma delle cavità consegue alla disposizione e

---

(1) Per una descrizione particolareggiata rimando al lavoro di Michaelsen: Regenwürmer, in: " Deutsch-Ost-Africa ", vol. IV, 1895; Die Thierwelt Ost-Afrikas (pag. 27); e al mio lavoro: Lombrichi del Ruwenzori e dell'Uganda, in: " Il Ruwenzori ". Risultati scientifici, vol. I, Hoepli, Milano, 1909.

alla contrazione delle trabecole connettivo-muscolari che le separano, ma si nota per lo più uno sviluppo maggiore in senso parallelo alla superficie esterna dell'organo infestato. I diametri delle cavità variano tra 50 e 750 μ, o superano di poco questi termini. Dette cavità si sovrappongono in due o tre strati, rimanendo però in generale più prossime alla superficie che al lume del canale della spermateca. Parecchie sollevano lo strato connettivo-peritoneale determinando il caratteristico corrugamento sopra ricordato. Talvolta infine le cavità, singole o in piccoli gruppi, sono comprese in una sorta di appendici di varia lunghezza, più o meno nettamente peduncolate, che sporgono nella cavità del corpo (Tav., fig. 5, *p.*).

La periferia delle cavità non è delimitata da una speciale parete essenzialmente diversa per natura dai tessuti circostanti: sono questi medesimi tessuti che circoscrivono le cavità.

La sottile lamina peritoneale che ricopre le spermateche, e riveste pure le appendici sopra ricordate, non è per solito a contatto diretto col lume delle cavità più superficiali, ma s'interpone uno straterello più o meno sottile di connettivo (Tav., figg. 6 e 7), formato da cellule ramificate, a plasma non granuloso. La lamina peritoneale è riconoscibile pel plasma leggermente e finamente granuloso delle sue cellule (Tav., fig. 6, *pe.*), ma ben spesso la sua sottigliezza è tale ch'essa appare in sezione come una linea interrotta da dilatazioni corrispondenti ai nuclei (Tav., fig. 7, *pe.*). Differenze notevoli fra i nuclei delle cellule peritoneali e i nuclei delle sottostanti cellule connettive non vi sono (1); tuttavia i primi sono quasi costantemente schiacciati in senso parallelo alla superfice delle spermateche, mentre i secondi sono tondeggianti o allungati, e, per solito, più piccoli (fig. 7, *c.*). Gli uni e gli altri mancano di nucleolo e hanno scarsa dote di granuli cromatinici, specialmente quelli delle cellule connettive. Facendo uso di una doppia colorazione con emallume acido e eosina (2) il citoplasma delle cellule peritoneali resta tinto leggermente in azzurro, mentre quello delle

(1) Il materiale studiato era fissato e conservato in alcool, ma in condizioni assai buone, tali da permettermi una sicura deduzione di dati comparativi anche nel campo isto-citologico.

(2) Avvertendo di decolorare per qualche tempo con soluzione acquosa di allume potassico (1 : 100) dopo aver fatto agire l'emallume.

sottostanti cellule connettive trattiene l'eosina assumendo un tenue color roseo.

Commiste intimamente alle cellule connettive si trovano le cellule muscolari, sempre più copiose nelle parti profonde dell'organo, in vicinanza dell'alto epitelio che tappezza il lume del canale della spermateca e del suo diverticolo.

Le cellule connettive e muscolari che circoscrivono ogni cavità parassitaria non mostrano un limite netto verso la cavità stessa, e appaiono lì accanto unite fra loro in coalescenza; onde il loro citoplasma si dispone a formare una specie di alone di spessore disuguale all'ingiro di ogni cavità (figg. 6, 7, 8).

Il lume delle cavità è occupato quasi per intero da un fitto e fino reticolo a maglie irregolarmente poligonali o tondeggianti (figg. 6, 7, 9, *r.*). I filamenti del reticolo mostrano maggior affinità per l'eosina che per l'emallume, onde appaiono colorati come l'alone periferico; essi hanno inoltre con quest'ultimo stretti rapporti di continuità, e può ben dirsi che l'alone degrada direttamente nel reticolo. Nell'alone si trovano rari nuclei ancora normali nella forma e nella struttura (fig. 7, *c.*), riferibili la maggior parte a cellule connettive.

La coalescenza delle cellule è indubbiamente causata dall'azione patogena dei Nematodi parassiti contenuti nelle cavità. In seguito a tale azione il plasma si gonfia a formare l'alone suddetto e infine subisce molto verosimilmente una degenerazione grassa. I globuli di grasso, asportati dai solventi (alcool, xilolo) sarebbero rivelati appunto dalle maglie del reticolo che occupa il lume di ogni cavità. Esaminando i piccoli Nematodi entro le cavità, si riconosce sempre attorno ad essi un'area affatto incolora, priva di reticolo (Tav., fig. 8): ora questa dimostrerebbe un accumulo di grasso più abbondante attorno al corpo del parassita. L'azione degenerativa prenderebbe origine a contatto del parassita per irradiarsi nei tessuti circostanti a formare le cavità — virtuali — sopra descritte.

In coteste cavità oltre ai Nematodi e al reticolo plasmatico si trovano sempre varî corpi tondeggianti, o di rado deformati, che, isolati o contigui, stanno in intimo contatto col reticolo oppure con l'alone plasmatico della parete delle cavità (figg. 7, 8, 9, 10). Tali corpi hanno valore di nuclei ma mostrano più o meno avanzati i fenomeni della degenerazione. Gli ele-

menti istologici cui vanno riferiti sono le cellule muscolari coinvolte nella degenerazione determinata dai parassiti.

La musculatura della parte infestata — tratto prossimale del canale della spermateca — è costituita prevalentemente di fibre trasverse (Tav., fig. 5), la cui azione complessiva è pari a quella di un muscolo sfintere. Le fibre sane lasciano facilmente riconoscere la sostanza muscolare, tinta in rosa dall'eosina o in nero violaceo dall'ematossilina ferrica, disposta in lunghe fibrille parallele, nastriformi o cilindriche, comprese in una esigua massa di sarcoplasma omogeneo, dotata di scarsissima affinità sia per l'eosina che per l'emallume. Il sarcoplasma è accumulato prevalentemente in una regione laterale della fibra a formare un'escrescenza in cui è allogato il nucleo (Tav., fig. 11, *a* e *b*). Le fibre muscolari in questione corrispondono dunque al *tipo laterale* di Prenant, Bouin, e Maillard (1). I loro nuclei appaiono più o meno depressi ed espansi parallelamente all'asse maggiore delle fibre (fig. 11, *b*), assumendo quindi l'aspetto di un disco se esaminati secondo il loro piano più ampio (2), ovvero mostrano una forma tondeggiante, specialmente quando il sarcoplasma s'accumula in maggior copia attorno ad essi (? in rapporto alla contrazione della sostanza muscolare) (fig. 11, *a*). Comunque il massimo diametro di cotesti nuclei normali è compreso fra μ 6,6 e 8,3. La cromatina vi si contiene in mediocre quantità, in parte addensata a formare un grosso granulo eccentrico, spesso μ 1,2 a 1,6, e in parte sparsa sotto forma di minuti cariosomi.

I nuclei contenuti nelle cavità parassitarie sono un po' più grossi, misurando in diametro μ 8,3 a 10; la loro forma è ordinariamente subsferica, la membrana apparendo un po' increspata, sollevata lievemente nei punti ove s'attaccano ad essa i filamenti del reticolo plasmatico. La sostanza cromatica è per intero addensata in un unico granulo (o in due), a limite un po' sfumato, spesso μ 1,6 a 2,4, compreso in una sostanza subgranulare, tinta in rosa dall'eosina. Questo fenomeno, corrispon-

---

(1) Cfr. Traité d'Histologie, Tome I. Cytologie générale et spéciale Paris 1904 (pag. 447).

(2) In tale posizione possono esaminarsi soltanto in sezioni condotte tangenzialmente, quale quella rappresentata nella figura 5.

dente a quanto suol designarsi col nome di picnosi, e ancora l'inturgidimento del nucleo sono indici di necrobiosi. È dunque certo che a formare il caratteristico reticolo delle cavità parassitarie prendono parte, previa degenerazione grassa, anche e specialmente il sarcoplasma e la sostanza fibrillare delle fibre muscolari oltre alle cellule connettive. Invero trovai spesso delle porzioni ancora omogenee di sostanza fibrillare dentro a quelle cavità. L'uso come colorante dell'ematossilina ferrica le pone in evidenza assai bene, e molte volte si trovano in vicinanza immediata dei nuclei necrobiotici.

I grossi nuclei necrobiotici corrispondono in parte a nuclei di cellule connettive? Ciò non si può nè affermare nè escludere con certezza. Il loro numero non molto forte, e la loro mole, quasi m'inclinano all'esclusione. Probabilmente le cellule connettive precedono le muscolari nella *completa* dissoluzione.

Posso escludere assolutamente che i nuclei necrobiotici corrispondano a linfociti immigrati dalla cavità celomica. Questi ultimi si trovano frequentemente attaccati alle spermateche o compresi nelle loro pieghe superficiali (Tav., fig. 12), e mostrano caratteri strutturali affatto diversi: citoplasma omogeneo, con qualche vacuolo (? occupato da corpi grassi), nucleo tondeggiante con cariosomi subeguali, sparsi senza ordine.

La degenerazione grassa provocata dai parassiti s'estende anche ai vasi capillari sanguigni, ma dei piccoli nuclei delle cellule formanti i vasi non trovai traccia nelle cavità parassitarie.

Trovai i giovani Nematodi in numero di uno, raramente di due, per cavità. Queste ebbero molto probabilmente all'inizio origine distinta in rapporto ai singoli parassiti, ma estendendosi, in seguito al processo degenerativo, quelle contigue possono essersi fuse per distruzione dei tessuti interposti.

Invero si nota talvolta una sorta di lamina esilissima, formata di elementi connettivi e muscolari, che dalla parete d'una cavità s'addentra nel lume: essa rappresenta il residuo di un tramezzo completo che separava precedentemente due cavità più piccole. Non escludo però che in qualche caso due giovani Nematodi, trovatisi accanto fin dal primo introdursi nella parete dell'organo infestato, abbiano provocato assieme la formazione di un'unica cavità.

La determinazione dei giovani parassiti è affatto impossibile. Nel loro interno non v'è ancora traccia di organi formati, pur potendosi ravvisare un avanzato differenziamento cellulare. Tengasi presente che le piccole larve misurano appena circa 230 μ in lunghezza e 10 a 12 μ in spessore.

Il loro parassitismo, dai fatti sopra esposti, risulta essere intercellulare, ma non è tuttavia da escludere che preceda uno stadio intracellulare, durante il quale le larve giovanissime si allogherebbero dentro alle fibre muscolari. Il diametro di queste riconobbi essere su per giù pari a quelle delle larve osservate, la loro lunghezza assai maggiore.

Nulla di sicuro m'è dato di affermare riguardo all'immigrazione delle giovani larve negli organi in cui le trovai così copiose. Vi giunsero dall'esterno attraverso ai pori delle spermateche oppure dalla cavità celomica? Tali larve raggiungono lo stato adulto *in situ* oppure debbono passare nella cavità celomica o all'esterno o in un altro ospite? Verosimilmente le giovani larve osservate provengono da una generazione compiutasi già nel corpo del lombrico infestato.

Quanto alle cavità in cui le rinvenni esse non rappresentano delle cavità cistiche dotate di parete propria, sicchè per questo e per altri fatti non sono paragonabili alle capsule di *Trichinella*.

Il caso di parassitismo da me osservato mi pare ravvicinabile a quello descritto nel 1904 da Schuberg e Schröder (1) nella *Nephelis vulgaris*, Moq. Tand. [= *Herpobdella atomaria* (Carena)]. Il parassita — *Myenchus bothryophorus* Schu. e Schr. — venne però scoperto allo stato larvale entro le cellule muscolari dalle quali passerebbe nel tessuto connettivo (pag. 517) per giungere a maturità sessuale in seguito a una o più mute.

(1) In: Zeitschrift für wiss. Zool. vol. 76, pag. 509, e tav. 30.

Dichogaster itoliensis (Michlsn).

Fig. 1. Le due spermateche di destra, normalmente sviluppate, disegnate in situ (× 2; esemplare di Ibanda sul M. Ruwenzori; *div.* = emergenza a superficie liscia corrispondente al diverticolo).

„ 2. Spermateca del primo paio infestata da larve di Nematodi (× 2; esemplare di Toro sul M. Ruwenzori; *a.* = ampolla strozzata in corrispondenza del dissepimento ch' essa attraversa; *c.* = canale; *dsp.* = dissepimento 7-8; *e.* = escrescenza prodotta dai parassiti).

„ 3. Id. del secondo paio, id. id. (× 2; lo stesso esemplare della figura precedente; *dsp.* = dissepimento 8-9).

„ 4. Sezione longitudinale della spermateca rappresentata dalla fig. 2 (× 10; *a* = ampolla; *ch.* = rivestimento chitinoso del canale; *cm.* = canale muscolare; *div.* = loculi del diverticolo intraparietale; *dsp.* = dissepimento; *p.* = cavità contenente i parassiti).

„ 5. Sezione dell'escrescenza d'una spermateca condotta tangenzialmente senza raggiungere il lume dell'organo (× 42; *p.* = cavità contenenti i parassiti, parecchie di esse comprese in appendici sporgenti nella cavità del corpo: *s.* = vaso sanguigno. L'area centrale della figura è occupata dalla musculatura circolare del canale della spermateca).

„ 6. Tratto periferico d'una cavità parassitaria superficiale (× 800; *pe.* = lamina parietale; *r.* = reticolo plasmatico che occupa il lume della cavità).

„ 7. Porzione di cavità parassitaria sporgente nella cavità celomica (× 800: *c.* = nucleo di cellula connettiva; *pe.* = nucleo della lamina peritoneale; *r.* = reticolo plasmatico).

„ 8. Sezione d'una cavità contenente un giovane Nematode (× 220; *cm.* = stroma connettivo muscolare della parete del canale spermatecale).

„ 9. Gruppo di nuclei degeneranti compresi nel reticolo plasmatico di una cavità parassitaria (× 800).

„ 10. Due nuclei degeneranti c. s. (× 800).

„ 11, *a* e *b*. Due tratti di fibre muscolari col nucleo contenuto in una gibbosità laterale (× 800).

„ 12. Linfocito contenuto in una piega della superficie di una spermateca (× 800).

Tutte le figure vennero disegnate facendo uso della camera lucida Abbe; per le figure 6, 7, 9, 10, 11, e 12 mi valsi dell'obbiettivo a immersione omogenea Zeiss, apocrom. 1,5 mm. combinato coll'oculare Zeiss compens. 4.

Geodetica d'una superficie di rivoluzione.

Nota del Dott. G. PAGLIERO.

La geodetica d'una superficie di rivoluzione è determinata dal teorema di Clairaut (" Mémoires de l'Académie royale des Sciences ", a. 1733, pag. 409-10): " *les sinus des angles que la* " *courbe fait avec les Méridiens sont toujours en raison renversée* " *des ordonnées de ces Méridiens* ".

La superficie di rivoluzione sia generata dalla rotazione attorno all'asse oz d'una curva (meridiano), la cui ordinata variabile r (raggio del parallelo) sia funzione continua, colla sua derivata, dell'ascissa z. Allora l'arco di meridiano, preso a partire da un'origine fissa, avrà una lunghezza determinata e finita x; e la r sarà funzione continua, insieme alla sua derivata, di x. Sia y l'angolo di rotazione, o longitudine. Un punto della superficie di rivoluzione avrà per coordinate x ed y. Supposto ora y funzione di x, con derivata continua, il punto descrive un arco di curva sulla superficie, la cui lunghezza è data da:

$$s = \int_a^b \sqrt{[1 + r^2 (\mathrm{D}y)^2]}\, \mathrm{d}x$$

essendo a e b i valori di x a cui corrispondono gli estremi dell'arco.

Il teorema di Clairaut dice che, affinchè l'integrale s sia minimo, deve essere $r^2 \mathrm{d}y/\mathrm{d}s =$ costante. Invero $r\mathrm{d}y/\mathrm{d}s =$ seno dell'angolo della curva col meridiano.

Il teorema precedente sulla geodetica d'una superficie di rivoluzione fu già dato sotto forma analitica da Jacobo Bernoulli nel 1698, " Acta eruditorum " di Lipsia, pag. 226. Sostituendo alle lettere usate dall'autore quelle della presente nota, il passo citato diventa: Posto $t = r\mathrm{d}x : \mathrm{d}r$, cioè lunghezza della tangente al

meridiano fino all'asse di rivoluzione, e $y = \int ctdr : r^2 \sqrt{r^2 - c^2}$, e $s = \int tdr : \sqrt{r^2 - c^2}$, la curva " *talis est, ut quaelibet eius portio* " *omnium aliarum, in eadem superficie ductarum, et iisdem punctis* " *interceptarum, curvarum sit brevissima* ".

Dalle due ultime equazioni si ricava appunto $r^2 \mathrm{d}y/\mathrm{d}s = c$; e viceversa da questa si deducono quelle.

Bernoulli non dà dimostrazione. La dimostrazione di Clairaut è molto nebulosa; siamo invero agli inizii del calcolo delle variazioni. Le regole di questo calcolo sono esposte sotto forma chiara da Eulero, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes,* a. 1744 (Vedi il " Formulario Mathematico ", t. V, pag. 449); ivi, a pag. 42, è detto che se Z è una funzione di x, y e p, ove y è funzione di x, e p è la derivata di y rispetto ad x, quella fra tutte le curve contermini alla y che rende massimo o minimo l'integrale di $Z\mathrm{d}x$ soddisfa all'equazione:

$$N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = 0$$

ove N è la derivata parziale di Z rispetto ad y, P è la derivata parziale di Z rispetto a p.

Nel nostro caso, $p = \mathrm{D}y$; la funzione integranda $Z = \sqrt{1 + r^2 p^2}$; quindi N vale 0, P vale $r^2 p/Z$; così l'equazione di Eulero diventa:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(r^2 p/Z) = 0$$

cioè $r^2 p/Z =$ costante, ossia $r^2 \mathrm{d}y/\mathrm{d}s =$ costante.

***

Scopo della presente nota è di dimostrare il teorema di Clairaut senza far uso del calcolo delle variazioni; o meglio di tradurre in linguaggio accessibile a chiunque conosce gli elementi del calcolo infinitesimale la dimostrazione data col calcolo delle variazioni.

Sia y una funzione di x definita ed avente derivata continua nell'intervallo da a a b, rappresentante una curva per cui non sia $r^2 \mathrm{d}y/\mathrm{d}s =$ costante.

Chiamo h una funzione che si annulli agli estremi dell'intervallo, ed in tutto l'intervallo abbia il segno della derivata rispetto ad x di $r^2 \mathrm{d}y/\mathrm{d}s$, derivata che per l'ipotesi fatta non sarà costantemente nulla. Ad es. pongo:

$$h = (x - a)(b - x)\mathrm{D}(r^2 \mathrm{d}y/\mathrm{d}s).$$

Considero la funzione:

$$z = y + th;$$

essa è pure definita ed ha derivata continua nell'intervallo da a a b, e, qualunque sia t, rappresenta sempre una curva i cui estremi coincidono con quelli della curva y; per $t=0$ la curva z coincide colla curva y.

Calcolo la lunghezza della nuova curva z, lunghezza che dipende da t, e quindi chiamo Ft:

$$Ft = \int_a^b \sqrt{[1 + r^2(\mathrm{D}z)^2]}\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{[1 + r^2(\mathrm{D}y + t\mathrm{D}h)^2]}\mathrm{d}x.$$

Calcolo ora $\mathrm{D}F0$, derivata della funzione F per il valore 0; applicando la derivazione sotto il segno integrale (Vedi il “ Formulario Mathematico „, t. V, pag. 438), si ha che la derivata della funzione F per il valore t vale:

$$\mathrm{D}Ft = \int_a^b \frac{r^2(\mathrm{D}y + t\mathrm{D}h)\mathrm{D}h}{\sqrt{1 + r^2(\mathrm{D}y + t\mathrm{D}h)^2]}}\mathrm{d}x$$

e quindi, per $t = 0$:

$$\mathrm{D}F0 = \int_a^b \frac{r^2\mathrm{D}y\mathrm{D}h}{\sqrt{[1 + r^2(\mathrm{D}y)^2]}}\mathrm{d}x = \int_a^b (r^2\mathrm{d}y/\mathrm{d}s)\,\mathrm{d}h.$$

Integro per parti, prendendo $\mathrm{d}h$ come fattore ad integrarsi; poichè la funzione h si annulla agli estremi dell'intervallo d'integrazione, la parte integrata, cioè l'incremento da a a b del prodotto delle due funzioni $r^2\mathrm{d}y/\mathrm{d}s$ ed h, è nulla, e si ha:

$$\mathrm{D}F0 = -\int_a^b h\mathrm{d}(r^2\mathrm{d}y/\mathrm{d}s)$$

ossia, sostituendo ad h la sua espressione:

$$\mathrm{D}F0 = -\int_a^b (x-a)(b-x)[\mathrm{D}(r^2 \mathrm{d}y/\mathrm{d}s)]^2 \mathrm{d}x.$$

Dunque, nell'ipotesi fatta relativamente alla funzione y, è $\mathrm{D}F0 < 0$, cioè Ft è decrescente per $t = 0$, e quindi attribuendo a t un valore positivo sufficientemente piccolo si ha: $Ft < F0$; ma $F0$ è la lunghezza dell'arco di curva y, Ft è la lunghezza dell'arco di una curva contermine alla y; per cui $F0$ non è il minimo arco che unisce i due punti.

Segue così che se y è l'ordinata della geodetica, deve essere necessariamente $r^2 \mathrm{d}y/\mathrm{d}s =$ costante.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 16 Maggio 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Manno, Direttore della Classe, Rossi, Graf, Ruffini, Stampini, Sforza e De Sanctis, Segretario. — Scusano l'assenza i Soci D'Ercole e Brondi.

Viene approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, 2 maggio 1909.

Il Presidente comunica che il Socio straniero G. Maspero ha scritto ringraziando d'essere stato delegato a rappresentare la nostra Accademia al Congresso Archeologico internazionale tenutosi al Cairo e informando d'aver partecipato la nostra adesione all'ufficio del Congresso.

Si legge pure il telegramma d'adesione inviato per le onoranze a Nicola Gogol in occasione della inaugurazione del monumento eretto a Mosca in onore del Gogol (9 maggio).

Il Socio Sforza offre a nome dell'Autore, Socio corrispondente dell'Accademia, il volume *Patria Italiana* di Isidoro Del Lungo (Bologna, Zanichelli, 1909) dando un breve cenno del contenuto.

Il Socio De Sanctis presenta a nome dell'Autore Prof. Luigi Pernier la pubblicazione intitolata: *Il disco di Phaestos con ca-*

ratteri pittografici (estratto da " Ausonia „, a. III, 1908); e rileva l'importanza della scoperta di questo antichissimo documento della scrittura in Europa.

È presentata per gli *Atti* dal Socio GRAF una Nota del Prof. Annibale PASTORE, *Sopra un punto essenziale del neohegelismo contemporaneo.*

Il Socio SFORZA dà comunicazione di un suo lavoro intitolato: *Carteggio dell' Amministrazione generale del Piemonte con Carlo Botta e Gio. Giulio Robert, suoi agenti presso il Governo Francese a Parigi.* La Classe con pienezza di voti segreti ne delibera la inserzione nelle *Memorie* accademiche.

Il Segretario DE SANCTIS, a nome del collega D'ERCOLE assente, a cui si associa egli stesso, presenta un lavoro del Dr. Cesare TRAVAGLIO, *Della vera conoscenza secondo Plotino.* Il Presidente delega i Soci D'ERCOLE e DE SANCTIS a riferirne in una prossima adunanza.

LETTURE

Sopra un punto essenziale del neohegelismo contemporaneo.

Nota di ANNIBALE PASTORE.

Poichè, nel fervore di risurrezione dell'hegelismo da cui sono presi attualmente in Italia parecchi cultori di filosofia, si cerca di dar nuova vita non solo a quei principî hegeliani che furono ingiustamente abbandonati " dopo il primo periodo naturale della loro fortuna „ (1), ma anche ad alcuni altri che un'impropria interpretazione ha attribuito al pensiero hegeliano e non resistono alla prova della critica, pare ottimo consiglio prendere ad esplicare, uno per uno, tutti i punti che conducono a conclusioni contradittorie. Ad esplicare, s'intende, non a combattere, perchè la critica polemica non è che un momento transitorio e non libero della critica speculativa.

Cominciamo ad esaminare la questione della " intrinseca medesimezza „, " speculativamente necessaria „, " della filosofia con la storia della filosofia „ (2).

Questo principio non hegeliano, ma comunemente attribuito ad Hegel, è stato ripreso in modo particolare dal Croce nei suoi *Lineamenti di una logica come scienza del concetto puro* del 1905 e più recentemente in un suo libro su Hegel: *Ciò che è vivo e ciò che è morto della filosofia di Hegel* del 1907 ove, fra l'altro, si dice: " Lo spirito è svolgimento, è storia, e perciò essere e non essere, divenire; ma lo spirito *sub specie aeterni*, che la filosofia considera, è *storia ideale eterna*, extratemporaria: è la serie delle forme eterne di quel nascere e morire, che, come Hegel diceva, esso stesso non nasce e non muore mai. Questo è punto essenziale: se lo si trascura, si cade nell'equivoco, toccato una volta argutamente dal Lotze, quando scrisse: che non perchè

(1) G. Gentile, *Critica* II, 29.

(2) G. Gentile, *Il circolo della filosofia e della storia della filosofia. Critica* VII, 143-149.

il servitore cava gli stivali al padrone, il concetto di servitore seguita a cavar gli stivali al concetto di padrone! „ (p. 91). A questa tesi intorno al carattere intimo ed allo sviluppo storico della filosofia sottoscrisse poi anche il Gentile, il quale, nella breve *Varietà* della *Critica* citata, dichiara: " L'intrinseca medesimezza della filosofia e della sua storia, — uno dei principii fondamentali della storia hegeliana della filosofia, — è una conseguenza necessaria, come credo di avere altrove dimostrato (si veda la mia prolusione: *Il concetto della storia della filosofia*, in " Rivista filosofica „, fasc. settembre-ottobre, 1908), dello stesso concetto della verità nella filosofia moderna in opposizione al concetto antico, specialmente platonico, della sua trascendenza assoluta. Se la verità è sviluppo, se, come diceva G. B. Vico, la scienza è unità della filosofia e della filologia, la filosofia non si può realizzare se non nella sua storia „ (p. 143).

Ora è da vedere come e perchè questo principio dell'identità dell'origine e dello svolgimento della storia della filosofia e della filosofia che è essenziale al neohegelismo contemporaneo, sia inaccettabile, sia dal punto di vista logico, sia dal punto di vista hegeliano.

***

Dal punto di vista logico, quanto al concetto vero e proprio di storia di qualsivoglia ordine di fatti, per giudizio unanime degli storici e dei filosofi, non si può negare che esso includa necessariamente nella sua definizione il concetto di tempo. Per conseguenza, ogni serie storica o cronologica, è da considerarsi come una successione inalterabile di momenti diversi. Inalterabile perchè il fatto storico è un compiuto, e la sua collocazione nella serie storica è eguale per tutti gli spiriti e determinata una volta per sempre.

Quanto al concetto di filosofia, o che si ammetta col Croce che " lo spirito *sub specie aeterni* che la filosofia considera „ è serie " extratemporaria „ (1), o che si ammetta col Gentile che " il processo filosofico „ è " assolutamente a priori e sopramondano, come diceva Hegel „ (2), in ogni caso non si può negare

(1) Cfr. il passo citato anteriormente: *Ciò è vivo* ecc., p. 91.
(2) Cfr. *Critica* VII, p. 146.

che, per la corrente di neohegelismo rappresentata da questi autori, esso includa necessariamente, nella sua definizione, il concetto di processo extratemporario.

Che cosa bisogna concludere di necessità?

Che il concetto di storia in genere non è il concetto di filosofia. Così stando le cose, l'identificazione assoluta della filosofia (processo extratemporario) e della storia della filosofia (processo temporario) è un'idea contradittoria.

A questi pochi punti si può restringere tutta la discussione logica sopra l'intrinseca medesimezza della filosofia con la storia della filosofia.

Mettersi a contrastare con la tesi della distinzione radicale della filosofia e della storia della filosofia, obiettando che, se la filosofia non è storia (cronologica e mondana), tuttavia essa è storia (ideale, eterna, extratemporaria, logica e sopramondana) è abbandonarsi a giuochi di parole (1).

* * *

Ma la tesi della distinzione radicale della filosofia e della storia della filosofia può ricevere un'illustrazione maggiore quando

(1) Invano si aggiunge il rilievo seguente: " Ma la sopramondanità hegeliana, a differenza della extramondanità platonica, non esclude infatti le determinazioni empiriche della storia, come non esclude il determinismo storico in generale. Il sistema filosofico, in quanto momento storico che è pure momento logico della verità in divenire, va considerato come una sintesi *a priori* di cui i dati storici sono la materia, il principio filosofico la forma. Ora a chi abbia penetrata la natura della sintesi *a priori*, è noto, che in essa la forma crea la materia che presuppone, così nel sistema filosofico il principio crea i dati su cui si esercita " (Gentile, *Critica*, VII, 146). Infatti, pur così stando le cose, se è vero che nel sistema filosofico il principio crea i dati su cui si esercita, siccome è evidente che il principio non esclude le determinazioni empiriche della storia ma le pensa facendole oggetto della sua nozione formale, così segue che il sistema filosofico non ha più niente di cronologico cioè di storico nella sua intima natura essendo esso essenzialmente di natura speculativa. Se i dati restano investiti dall'attività speculativa del principio che li illumina, se, in altri termini, il principio filosofico comunica ai dati l'eternità o sopramondanità " extratemporaria " della sua virtù speculativa, è chiaro che nel sistema filosofico non si produce la medesimezza della serie cronologica, ma piuttosto l'inveramento del concetto di questa serie, cioè della sua storia.

si consideri la questione dal punto di vista hegeliano. Sentiamo a punto che cosa dica Hegel a questo proposito in quella *Enciclopedia delle scienze filosofiche in compendio* che fu tradotta in modo così perspicuo dal Croce.

" L'origine e lo svolgimento della filosofia vengono esposti nella forma peculiare di *storia esterna* come *storia di questa scienza*. Questa forma presenta i gradi di svolgimento dell'Idea come una successione *accidentale* e una semplice *diversità* dei principii e dei loro svolgimenti nei rispettivi sistemi filosofici. Ma l'artefice di questo lavoro di millennii è quell'Uno spirito vivente, la cui natura pensante consiste nel recarsi alla coscienza *ciò ch'egli è*, e, fatto di questo il suo oggetto, sollevarsi più su e costituire in sè un grado più alto. La *Storia della filosofia* mostra, da una parte, che le filosofie, che sembrano diverse, sono una medesima filosofia in diversi gradi di svolgimento; dall'altra, che i *principii* particolari, di cui ciascuno è a fondamento di un sistema, non sono altro che rami di un solo e medesimo tutto. La filosofia, che è ultima nel tempo, è insieme il risultato di tutte le precedenti e deve contenere i principii di tutte: essa è perciò, — beninteso, se è davvero una filosofia, — la più sviluppata, ricca e concreta „ (*Introd.*, § 13).

" Il medesimo svolgimento del pensiero, che è rappresentato nella Storia della filosofia, è rappresentato anche nella filosofia, ma libero dalle esteriorità storiche, *puro nell'elemento del pensiero*. Il libero e vero pensiero è in sè *concreto*; quindi è *idea*; e, in tutta la sua universalità, è l'*Idea* o l'*Assoluto*. La scienza di esso è essenzialmente *sistema*, perchè il vero, come *concreto*, è solo in quanto si svolge in sè e si raccoglie e mantiene in unità, cioè come *totalità*, e solo mediante il differenziarsi e la determinazione delle sue differenze, può costituire la necessità di esse e la libertà del tutto „ (*Introd.*, § 14).

È evidente che il § 13 determina il concetto della storia della filosofia, mentre il § 14 determina quello della filosofia. Qual'è il pensiero di Hegel? È chiarissimo. Hegel sostiene che vi sono due modi di rappresentare il medesimo svolgimento del pensiero: il primo ha luogo nella storia della filosofia, il secondo nella filosofia (Cfr. il primo periodo del § 14). Si può parlare, secondo Hegel, di intrinseca medesimezza, speculativamente necessaria, di questi due modi? Tutt'altro. Hegel dichiara, anzi, esplicitamente:

a) che il primo modo (storia della filosofia) " presenta i gradi di svolgimento dell'idea come una *successione accidentale* e una *semplice diversità* dei principii e dei loro svolgimenti nei rispettivi sistemi filosofici „ sebbene l'artefice di questo lavoro non sia che quell'*Uno spirito vivente*, ecc. (§ 13);

b) che il secondo modo (filosofia) invece rappresenta il medesimo svolgimento del pensiero " ma come libero dalle esteriorità storiche, *puro nell'elemento del pensiero*, ecc. „ (§ 14).

Per togliere ogni dubbio egli aggiunge: " Il libero e vero pensiero è in sè concreto, quindi è idea „ anzi " l'Idea o l'Assoluto „. " La scienza di esso è essenzialmente *sistema* „. E si intende che il proprio del primo modo è di essere essenzialmente *storia*.

Dov'è il caso di parlare di medesimezza? Soltanto nello svolgimento del pensiero, non già nei due modi di rappresentarlo. Infatti Hegel dice: " Il medesimo svolgimento del pensiero „ (ecco la medesimezza di svolgimento) " che è rappresentato nella storia della filosofia „ (ecco un primo modo di rappresentazione, modo storico) " è rappresentato anche nella filosofia „ (ecco un secondo modo di rappresentazione, modo filosofico); ma i due modi sono affatto diversi.

Dunque il concludere, come fanno questi neohegeliani, che " l'intrinseca medesimezza della filosofia e della sua storia „ è " uno dei principii fondamentali della storia hegeliana della filosofia „ è, per lo meno, un voler essere più hegeliano di quell'Hegel che scrisse l'*Enciclopedia delle scienze filosofiche in compendio*.

Ma consultiamo anche per un più ampio sviluppo l'opera *Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie*. Si viene a sapere che anche l'esplicazione dei sistemi filosofici nel corso del tempo si effettua mediante il logico e sistematico processo dell'idea, o, in altri termini, che anche la storia della filosofia è l'esplicazione delle categorie logiche dell'idea (1).

---

(1) Riporto qui in nota i passi più significativi del § 3° (*Resultate für den Begriff der Geschichte der Philosophie*) del Cap. A (*Begriff der Gesch. d. Philos.*). " So ist die Philosophie System in der Entwickelung, so ist es auch " die Geschichte der Philosophie; und diess ist der Hauptpunkt, der Grund- " begriff, den diese Abhandlung dieser Geschichte darstellen wird. Um diess " zu erläutern, muss zuerst der Unterschied in Ansehung der Weise der " Erscheinung bemerklich gemacht werden, der Statt finden kann. Das

Questo concetto della *Gesch.* è indubbiamente diverso da quello esposto nella *Enc.*

Invero nella *Enc.* Hegel accetta e presenta i gradi di svolgimento dell'idea nella forma peculiare di storia esterna come una *successione accidentale* e una *semplice diversità* (cronologica) di principî e conferisce la sistemazione logica della serie cronologica al puro libero e vero pensiero della filosofia. Nella *Gesch.* invece, avvertendo che passa una certa congruenza tra l'idea cronologica (storica) e l'idea logica (filosofica) e che, in un ordine larghissimo, il tempo della natura e il tempo dell'idea non discordano a tal segno da dover astrarre affatto i sistemi *veri* della filosofia dall'ordine cronologico perchè sono una sola e stessa cosa nell'idea concreta cioè nell'astrazione ideale delle astrazioni, conclude che il sillogismo assoluto dell'idea che si esplica logicamente è offerto anche dalla sua storia, ossia che la storia della filosofia mostra le categorie logiche che si producono sistematicamente dal logo implicito.

Ma giova avvertire, in primo luogo, che l'opposizione fra

“ Hervorgehen der unterschiedenen Stufen im Fortschreiten des Gedankens “ kann nämlich mit dem Bewusstseyn der Nothwendigkeit, nach der sich “ jede folgende ableitet, und nach der nur diese Bestimmung und Gestalt “ hervortreten kann: oder es kann ohne diess Bewusstseyn, nach Weise “ eines natürlichen, zufällig scheinenden Hervorgehens geschehen „. Cfr. *Gesch. d. Philos.*[2], I, 42). “ Die Eine Weise dieses Hervorgehens, die Ableitung “ der Gestaltungen, die gedachte, erkannte Nothwendigkeit der Bestim- “ mungen darzustellen, ist die Aufgabe und das Geschäft der Philosophie “ selbst „ (Op. cit., I, 42). “ Die andere Weise aber, dass die Unterschie- “ denen Stufen und Entwickelungsmomente in der Zeit, in der Weise des “ Geschehens, an diesen besondern Orten, unter diesem und jenem Volk, “ unter diesen politischen Umständen und unter diesen Verwickelungen mit “ denselben hervortreten, kurz unter dieser empirischen Form: die ist das “ Schauspiel, welches uns die Geschichte der Philosophie zeigt „ (43). “ Nur “ so als durch die Vernunft begründete Folge der Erscheinungen, welche “ selbst das, was die Vernunft ist, zu ihrem Inhalte haben und es enthüllen, “ zeigt sich diese Geschichte selbst als etwas Vernünftiges; sie zeigt, dass “ sie eine vernunftige Begebenheit „ (44-45). “ Denn die Idee, in ihrer Ruhe “ gedacht, ist wohl zeitlos „ (46). “ Die erste Folge aus dem Gesagten ist “ diese, dass das Ganze der Geschichte der Philosophie ein in sich noth- “ wendiger, consequenter Fortgang ist, der in sich vernünftig und durch “ seine Idee *a priori* bestimmt ist; diess hat die Geschichte der Philosophie “ als Beispiel zu bewähren „ (50).

coteste due interpretazioni del primo modo di rappresentare il medesimo svolgimento del pensiero (modo storico) è superabile essendo dialettica, perchè l'una pone l'accidentalità (cronologica) l'altra oppone la necessità (logica) dei gradi dell'idea ed entrambe si compongono in un concetto più elevato che si attua nella storia medesima della filosofia; in secondo luogo che, come cotesta opposizione non esce fuori dal campo di quel primo modo di rappresentare lo svolgimento del pensiero che costituisce la storia della filosofia, così non giunge a identificare i due modi di rappresentare il medesimo svolgimento del pensiero, facendo sì che l'idea filosofica tragga e confonda la sua sanzione solo da e con quella dei momenti esteriori dell'idea storica, perchè Hegel mantiene sempre la distinzione (*Unterschied*) fondamentale fra lo svolgimento del pensiero stesso (medesimezza di svolgimento) e i due modi (*Weise*) di rappresentarlo, e sempre afferma che l'ordine cronologico della storia esteriore deve essere *subordinato* all'intimo logo dialettico dell'idea.

Da questo punto di vista, l'enunciato di Hegel, nella sua più ampia generalità, significa solo che la nozione nei momenti della sua distinzione non separa la propria unità, ma non già che dei tre momenti dialettici, il primo o il secondo (sistemazione storica delle categorie che può essere tale o tale) si identifichino, in guisa speculativamente necessaria, col terzo (sistemazione filosofica di quella sistemazione storica delle categorie). Il terzo momento assume in sè, riformandoli, i suoi precedenti momenti astratti, ma non si identifica con ciascuno di essi, singolarmente preso, perchè li sopprimerebbe nel loro valore dialettico e si sopprimerebbe nella sua ragione logica, distruggendo la processuosità esplicativa della nozione. Il vero è che si concepisce come sistema concreto in sè e così li supera assolutamente.

Infine è da deplorare che l'indicato progresso dialettico compiuto da Hegel sul concetto della storia della filosofia non sia stato compreso a dovere dalla maggior parte dei suoi interpreti, i quali, perduti di vista i due lati opposti che si compongono in una sola nozione, non tennero conto che d'un momento parziale o dei momenti antagonistici del suo pensiero.

Infatti l'opinione più diffusa è precisamente che la storia della filosofia, secondo Hegel, sia solo un sistema logico in sè. Contro questo incompleto apprezzamento del pensiero hegeliano

— sul ristretto campo della storia della filosofia — s'è già rivolto, per esempio, lo stesso Ceretti per giustificare la sua uscita dal sistema hegeliano. Affichè il lettore che se ne interessa possa vedere come il Ceretti più precisamente si distingua da questo punto da Hegel, riferirò anche l'apprezzamento di Pasquale D'Ercole e, nella nota, alcuni passi del *Pasaelogices specimen* tradotto in cui se ne tratta. " Quanto al concetto della storia della filosofia, accoglie in genere il concetto hegeliano che essa sia l'esplicazione delle categorie logiche dell'idea mediante i sistemi filosofici nel corso del tempo; ma pensa però che tale esplicazione non si effettui mediante un logico e sistematico processo dell'idea, ma piuttosto in modo saltuario ed erratico, com'ei dice. La sistemazione della storia filosofica, secondo lui, non è attuabile nella storia istessa, ma nella logica „ (1).

Vedrà bene il lettore come questi giudizî del Ceretti sul concetto della storia della filosofia convengano colle conclusioni tratte sopra dal punto di vista logico, ma è chiaro che neppur egli tiene a bastanza conto dello svolgimento dialettico del pensiero hegeliano; onde anche il suo apprezzamento dev'essere considerato come unilaterale. Nondimeno, quali che siano le ragioni dell'inesatta interpretazione hegeliana che s'è diffusa nella critica, o che dipenda dall'incongrua considerazione dei termini separati, o dall'oscurità inerente nel sistema, quel che in fondo importa ritenere è che, sia tale o tal'altra, cioè logica o non logica, l'apparizione del pensiero nel corso del tempo, sempre faccia d'uopo

---

(1) P. D'Ercole, *Notizia degli scritti e del pensiero filosofico di Pietro Ceretti,* Torino U. T. Ed., 1886, Introd., CIV. Ecco ora alcuni brani del Ceretti che chiariscono l'idea per la storia della filosofia: " La storia della filosofia contiene le categorie logiche che si esplicano a vicenda, ma riflesse in un piano instabile e controverso in modo che se vogliamo trarre dalla storia stessa la *progenesi sistematica della logica,* bisogna prima di tutto sovvertire in qualche modo l'ordine cronologico „ (*Saggio circa la ragione logica di tutte le cose,* I, Proleg., parte seconda, p. 643). " Così noi riformiamo la profonda idea hegeliana circa la storia della filosofia, cioè poniamo che la storia della filosofia non presenti il vero sistema logico, ma i sillogismi astratti (sistemi) d'esso, i quali colla elaborazione categorica intima dell'idea possono essere coorganati nell'unità del sistema logico. La sistemazione logica della storia della filosofia non spetta alla storia stessa, ma alla trattazione logica „ (*Ibid.*, p. 644).

comprenderne la totalità, in una rappresentazione libera e pura nell'elemento del pensiero e in sè concreta, se si voglia fare vera e propria filosofia.

E così, dal duplice punto di vista logico ed hegeliano, siamo condotti alla stessa conclusione circa la tesi della medesimezza della filosofia e della storia della filosofia.

* * *

Riassumendo, la tesi dell' intrinseca medesimezza della filosofia e della storia della filosofia è contradittoria e non hegeliana:

a) contradittoria, perchè quella esclude e questa include necessariamente il concetto di tempo;

b) non hegeliana, perchè, secondo Hegel, la storia della filosofia è solo un modo di rappresentare lo svolgimento sia accidentale (*Enc.*) sia dialettico (*Gesch.*) del pensiero, mentre la filosofia è un altro modo di rappresentare questo medesimo svolgimento e cioè essenzialmente pensiero del pensiero; e, quanto più lo spirito acquista una nozione profonda di sè, tanto più egli conosce che il sistema ideale, in cui si avvera, si presenta distinto nella trinità dei suoi momenti astratti, ed essenzialmente costituito nella sua concreta ed extratemporaria unità.

Aosta, aprile, 1909.

L'Accademico Segretario
GAETANO DE SANCTIS.

Torino — VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e dei RR. Principi.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 23 Maggio 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO

PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: NACCARI, Direttore della Classe, SPEZIA, JADANZA, SEGRE, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA, MATTIROLO, SOMIGLIANA, FUSARI e CAMERANO Segretario.

Si legge e si approva l'atto verbale della seduta precedente.

Scusa l'assenza il Socio FOÀ.

Il Presidente presenta le opere seguenti giunte in omaggio alla Classe:

a) dall'Accademia politecnica di Porto e dall'autore: *Obras sobre mathematica* do Dr. F. Gomes TEIXEIRA; 3 vol. in-4°;

b) dal prof. R. PIROTTA, Socio corrispondente dell'Accademia: *La chimica fisica e la biologia vegetale*;

c) dal prof. E. BERTINI, Socio corrispondente dell'Accademia: *Sopra la teoria dei moduli di forme algebriche.*

Il Socio PARONA presenta in omaggio a nome del professore F. SACCO otto note di argomento geologico.

Vengono presentati per l' inserzione negli *Atti* i lavori seguenti:

1° Ing. G. ABATE-DAGA: *Sulla compensazione di un punto trigonometrico mediante la figura d'errore,* dal Socio JADANZA;

2° Dr. Gabriel Lincio, *Sulla baritina dello scavo Cungiaus, miniera di Monteponi, Sardegna,* dal Socio Spezia;

3° Dr. G. Piolti, *Sull'oncosina di Variney (Valle d'Aosta),* dal Socio Spezia;

4° Dr. A. Roccati, *Il supposto porfido rosso della Rocca dell'Abisso (Alpi marittime),* dal Socio Spezia;

5° *Esperienze sull'evaporazione,* nota del Socio Naccari.

Il Socio Mattirolo presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* il lavoro del Dr. A. Casu, intitolato: *Salsola Kali L. e Salsola tragus L. specie critiche.* Il Presidente nomina i Soci Mattirolo e Parona all'esame della Memoria.

Il Socio Camerano, a nome anche del Socio Fusari, legge la relazione intorno alla memoria del Dr. E. Zavattari, intitolata: *Ricerche morfologiche intorno ai muscoli ioidei dei Sauri, in rapporto con i muscoli ioidei degli altri vertebrati.* Parte 1ª.

La relazione che conchiude favorevolmente all'inserzione della Memoria è approvata alla unanimità e pure a voti unanimi la Classe approva la stampa della Memoria del Dr. E. Zavattari nei volumi delle *Memorie.*

LETTURE

Sulla compensazione di un punto trigonometrico mediante la figura d'errore.

Nota dell'Ing. GIUSEPPE ABATE-DAGA.

Quando un punto trigonometrico viene determinato con un numero di direzioni osservate considerevolmente maggiore di quello strettamente necessario, la compensazione con il procedimento generale della teoria dei minimi quadrati riesce assai laboriosa.

In tal caso si giunge a determinare più speditamente la posizione più plausibile del punto ricorrendo ad un procedimento grafico. Si costruisce cioè la figura d'errore e nella medesima si determina la posizione che soddisfa alla condizione dei minimi quadrati.

A questo scopo vennero ideati dal Bertot e dal Puller due diversi procedimenti entrambi basati sui principî della Statica. Il problema si può però risolvere con semplici considerazioni geometriche. Tale è lo scopo della presente nota.

Supponiamo che si tratti di determinare un punto P della rete catastale italiana, collegato a punti trigonometrici dell'Istituto Geografico Militare $A_1\,(x_1 y_1)$, $A_2\,(x_2 y_2)$, ... per mezzo di direzioni azimutali osservate nei punti stessi e in quello da determinare.

La figura d'errore viene riferita ad un sistema di assi ortogonali passanti per una posizione approssimativa $P_0\,(X_0 Y_0)$ del punto P, e si costruisce calcolando da prima le ascisse $X_1\,X_2$ ... dei punti $A'_1\,A'_2$ ... in cui le direzioni azimutali medie al punto P risultanti dalle osservazioni fatte nei punti $A_1\,A_2$ ... intersecano l'asse x_0.

A ciò serve l'equazione:

(1) $$X_i = x_i + [Y_0 - (y_i + C_y)]\cot.\alpha_i + C_x$$

in cui

$$C_y = -\frac{(X_0 - x_i)^2 y_i}{2r^2} - \frac{1}{3}\frac{(X_0 - x_i)^2 (Y_0 - y_i)}{2r^2}$$

$$C_x = \frac{(X_0 - x_i) Y_0^2}{2r^2} - \frac{1}{3}\frac{(X_0 - x_i)(Y_0 - y_i)^2}{2r^2}$$

ove α_i è l'azimut medio osservato della direzione da A_i a P, ed r è il raggio terrestre medio ($r = \sqrt{\rho N}$) nella zona che si considera.

L'equazione (1) si ricava dalle formole di Soldner per il calcolo delle coordinate sferiche nel sistema di proiezione adottato per il Catasto italiano (*).

I termini di correzione C_y e C_x, che risultano in generale di pochi centimetri, si calcolano speditamente o con tavole numeriche o con un semplice diagramma che fornisca i valori dei prodotti della forma $pq^2 \frac{1}{2r^2}$.

Determinati così i punti $A'_1\, A'_2 \ldots A'_e$ per le e direzioni esterne osservate, si tracciano le rette $a_1, a_2 \ldots a_e$ facenti con l'asse x_0 gli angoli $\alpha_1, \alpha_2 \ldots. \alpha_e$.

Per ciascuna coppia distinta di direzioni osservate in P si costruisce poi la relativa *visuale equivalente*, ossia la tangente in P all'arco di circonferenza capace dell'angolo misurato e costruito sulla base che congiunge i due punti fissi osservati.

A tale scopo, mediante l'angolo misurato fra le direzioni ai punti $A_i\, A_j$ e mediante l'azimut α_i corrispondente alla retta a_i, si ottiene l'azimut α_j della direzione PA_j e si costruisce come sopra la corrispondente retta a_j. La visuale equivalente sarà la retta a_{ij} che passa per il punto di intersezione delle rette $a_i\, a_j$ e fa con la retta a_i l'angolo $PA_j A_i$ dalla parte opposta del punto A_j rispetto alla retta a_i. — La lunghezza di questa visuale equivalente sarà $\frac{PA_i\, PA_j}{A_i A_j}$.

(*) V. G. B. Maffiotti, *I sistemi di proiezione nei rilevamenti catastali moderni* (Torino, 1900 - C. Clausen).

Il numero delle visuali equivalenti sarebbe $\frac{i(i-1)}{2}$, eguale cioè al numero di angoli che si può formare con le i direzioni interne osservate in P. Ma soltanto $i - 1$ di queste sono distinte e corrispondono agli $i - 1$ angoli distinti che si possono formare con le i direzioni. Gli altri angoli si ottengono da questi per addizione o per sottrazione e non forniscono elementi in più per la determinazione del punto: ma soltanto elementi di controllo.

Affinchè la determinazione avvenga nelle migliori condizioni possibili si introducono pertanto le $i - 1$ visuali equivalenti di lunghezza minore.

La figura di errore sarà così costituita da $n = e + i - 1$ rette.

Se si ammette che tutte le osservazioni fatte abbiano eguale peso, le rette $a_1\, a_2 \ldots$ rappresenteranno altrettanti luoghi geometrici dei punti P, ai quali spetteranno rispettivamente i pesi $\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2} \ldots$ essendo $d_1\, d_2 \ldots$ le lunghezze dei lati $PA_1\, PA_2 \ldots$ e delle visuali equivalenti agli angoli misurati in P.

Siano ora $s_1\, s_2 \ldots$ i segmenti che le rette $a_1\, a_2 \ldots$ tagliano sull'asse x_0, ed $m_1\, m_2 \ldots$ le lunghezze delle perpendicolari abbassate sulle rette $a_1\, a_2 \ldots$ da un punto qualunque $P(x\,y)$ del piano $x_0\, y_0$.

Si avrà:

$$
(2) \quad
\begin{aligned}
m_1 &= y \cos \alpha_1 - x \operatorname{sen} \alpha_1 + s_1 \operatorname{sen} \alpha_1 \\
m_2 &= y \cos \alpha_2 - x \operatorname{sen} \alpha_2 + s_2 \operatorname{sen} \alpha_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
m_n &= y \cos \alpha_n - x \operatorname{sen} \alpha_n + s_n \operatorname{sen} \alpha_n .
\end{aligned}
$$

Dividendo la prima di queste equazioni per d_1, la seconda per $d_2 \ldots$ l'n^{ma} per d_n, quadrando e sommando membro a membro si avrà:

$$
(3) \quad \left[\frac{m}{d} \cdot \frac{m}{d}\right] = K_1 x^2 + K_2 y^2 + 2K_3 xy + 2K_4 x + 2K_5 y + K_6
$$

in cui:

$$
(4)\quad
\begin{aligned}
K_1 &= \frac{1}{d_1^2}\operatorname{sen}^2\alpha_1 + \frac{1}{d_2^2}\operatorname{sen}^2\alpha_2 + \ldots + \frac{1}{d_n^2}\operatorname{sen}^2\alpha_n\\
K_2 &= \frac{1}{d_1^2}\cos^2\alpha_1 + \frac{1}{d_2^2}\cos^2\alpha_2 + \ldots + \frac{1}{d_n^2}\cos^2\alpha_n\\
K_3 &= -\frac{1}{d_1^2}\operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha_1 - \frac{1}{d_2^2}\operatorname{sen}\alpha_2\cos\alpha_2 - \ldots - \frac{1}{d_n^2}\operatorname{sen}\alpha_n\cos\alpha_n\\
K_4 &= -\frac{s_1}{d_1^2}\operatorname{sen}^2\alpha_1 - \frac{s_2}{d_2^2}\operatorname{sen}^2\alpha_2 - \ldots - \frac{s_n}{d_n^2}\operatorname{sen}^2\alpha_n\\
K_5 &= \frac{s_1}{d_1^2}\operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha_1 + \frac{s_2}{d_2^2}\operatorname{sen}\alpha_2\cos\alpha_2 + \ldots + \frac{s_n}{d_n^2}\operatorname{sen}\alpha_n\cos\alpha_n\\
K_6 &= \frac{s_1^2}{d_1^2}\operatorname{sen}^2\alpha_1 + \frac{s_2^2}{d_2^2}\operatorname{sen}^2\alpha_2 + \ldots + \frac{s_n^2}{d_n^2}\operatorname{sen}^2\alpha_n.
\end{aligned}
$$

Se si assume come terzo asse z_0 la perpendicolare al piano $x_0\, y_0$ nel punto P_0, e nella equazione (3) si pone:

$$
(5)\qquad \left[\frac{m}{d}\cdot\frac{m}{d}\right] = z
$$

si otterrà l'equazione:

$$
(6)\qquad K_1x^2 + K_2y^2 + 2K_3xy + 2K_4x + 2K_5y + K_6 = z
$$

nella quale i coefficienti $K_1\, K_2\, K_6$ sono sempre positivi, e si ha: $K_1\, K_2 - K_3^2 > 0$: come si deduce facilmente dalle equazioni (4).

Questa equazione (6) rappresenta pertanto un paraboloide ellittico. L'asse del medesimo è evidentemente parallelo all'asse coordinato z_0.

Rimane così dimostrato che se su un punto qualunque del piano $x_0\, y_0$ si innalza perpendicolarmente al piano stesso un segmento z eguale alla somma dei quadrati delle distanze del punto stesso delle singole rette della figura d'errore divise per le lunghezze delle rispettive visuali, le estremità di questi segmenti giaciono su un paraboloide ellittico avente l'asse perpendicolare al piano $x_0\, y_0$.

Il valore minimo di questa somma di quadrati si avrà per-

tanto nel punto in cui l' asse del paraboloide interseca il piano $x_0\, y_0$.

E cioè se X, Y, Z sono le coordinate del vertice del paraboloide rispetto agli assi $x_0\, y_0\, z_0$, X, Y saranno le coordinate della posizione più plausibile del punto P, e Z sarà eguale alla somma minima dei quadrati $\frac{m^2}{d^2}$.

Trasportiamo gli assi coordinati parallelamente a sè stessi in modo che la nuova origine cada nel predetto punto di coordinate $X\, Y\, Z$.

È noto che una siffatta trasformazione fa variare l'equazione generale delle superficie di 2° ordine in modo che i coefficienti dei termini al 2° grado restano invariati; quelli dei termini al 1° grado diventano eguali alle derivate parziali della funzione rispetto alle singole variabili, nelle quali siano sostituite alle variabili le coordinate $X\, Y\, Z$ della nuova origine; e il termine indipendente dalle variabili diventa eguale alla intera funzione, nella quale alle variabili siano sostituite le coordinate stesse $X\, Y\, Z$ della nuova origine.

Dopo tale trasformazione i coefficienti $K_4\, K_5\, K_6$ della equazione (6) diverranno pertanto:

$$\begin{aligned} & K_4' = K_1 X + K_3 Y + K_4 \\ (7)\quad & K_5' = K_2 Y + K_3 X + K_5 \\ & K_6' = K_1 X^2 + K_2 Y^2 + 2K_3 XY + 2K_4 X + 2K_5 Y + K_6 - Z. \end{aligned}$$

Se, oltre a ciò, facciamo rotare entrambi gli assi $x_0\, y_0$ di uno stesso angolo φ, mediante le note relazioni:

$$x = x' \cos\varphi - y' \operatorname{sen}\varphi$$
$$y = y' \cos\varphi + x' \operatorname{sen}\varphi$$

varieranno anche i coefficienti $K_1\, K_2\, K_3$; e precisamente si avrà:

$$(8)\quad \begin{cases} K_1' = K_1 \cos^2\varphi + K_2 \operatorname{sen}^2\varphi + 2K_3 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \\ K_2' = K_1 \operatorname{sen}^2\varphi + K_2 \cos^2\varphi - 2K_3 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \end{cases}$$

$$(9)\quad K_3' = (K_2 - K_1) \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi + K_3 (\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi)$$

dalle quali si ricava facilmente:

$$(10) \qquad \begin{aligned} K_1' + K_2' &= K_1 + K_2 \\ K_1'K_2' - K_3'^2 &= K_1K_2 - K_3^2 \end{aligned}$$

relazioni note della teoria degli invarianti.

Se l'angolo φ viene scelto in modo che i nuovi piani coordinati zx, zy vengano a coincidere con i piani diametrali principali del paraboloide, l'equazione (6) dopo le due accennate trasformazioni di assi coordinati dovrà ridursi a:

$$(11) \qquad K_1' x'^2 + K'_2 y'^2 = z.$$

Dovranno cioè risultare nulli i coefficienti K_3' K_4' K_5' K_6'. Dalle equazioni (7) e (9) si ricaverà pertanto:

$$(12) \qquad \begin{cases} K_1X + K_3Y + K_4 = 0 \\ K_3X + K_2Y + K_5 = 0 \end{cases}$$

$$(13) \qquad K_1X^2 + K_2Y^2 + 2K_3XY + 2K_4X + 2K_5Y + K_6 - Z = 0$$

$$(14) \qquad (K_2 - K_1) \operatorname{sen} 2\varphi + 2K_3 \cos 2\varphi = 0.$$

Le equazioni (12) forniranno le coordinate XY del punto del piano x_0y_0 per il quale risulta minima l'ordinata $z = \left[\frac{m}{d} \cdot \frac{m}{d}\right]$; forniranno cioè la posizione più plausibile cercata del punto P. L'equazione (13) fornirà questo valore minimo di z, e con l'equazione (14), che si riduce a

$$(15) \qquad \operatorname{tang}. 2\varphi = 2 \frac{K_3}{K_1 - K_2}$$

si otterrà l'angolo φ che i piani diametrali principali del paraboloide fanno con gli assi coordinati z_0x_0, z_0y_0, elemento che verrà utilizzato in seguito.

I coefficienti K_1' K_2' della equazione (11) si ottengono con le equazioni (8), oppure si ricavano dalle equazioni (10) avvertendo che $K_3' = 0$ e ottenendo così:

$$
(16) \quad
\begin{aligned}
K_1' &= \frac{1}{2}\left(K_1 + K_2 + \sqrt{(K_1 + K_2)^2 - 4(K_1K_2 - K_3^2)}\right) \\
K_2' &= \frac{1}{2}\left(K_1 + K_2 - \sqrt{(K_1 + K_2)^2 - 4(K_1K_2 - K_3^2)}\right).
\end{aligned}
$$

I coefficienti stessi si possono anche ottenere con la nota costruzione grafica mediante la quale si determinano due segmenti dei quali sono date la somma $(K_1 + K_2)$ e la media geometrica:

$$\sqrt{K_1'K_2'} = \sqrt{K_1K_2 - K_3^2}.$$

I coefficienti $K_1\ K_2\ K_3\ K_4\ K_5\ K_6$ che entrano nelle equazioni (12), (13), (15) si possono ottenere rapidamente.

Se S è il punto in cui una qualunque a_i delle rette $a_1 a_2 \ldots$ incontra l'asse x_0, si porti sulla medesima $SD = \frac{1}{d_i^2}$ e si abbassino le perpendicolari DF su x_0 e FE su a_i.

Sarà

$$ED = \frac{1}{d_i^2} \operatorname{sen}^2 \alpha_i$$

$$ES = \frac{1}{d_i^2} \cos^2 \alpha_i$$

$$EF = \frac{1}{d_i^2} \operatorname{sen}\alpha_i \cos\alpha_i.$$

La somma aritmetica di tutti i segmenti ED ottenuti per le singole rette della figura d'errore fornirà il valore di K_1; quella dei segmenti ES fornirà K_2; e la somma algebrica dei segmenti EF (i quali sono positivi se α è nel 1° o nel 3° quadrante, negativi negli altri casi) fornirà K_3.

Si avrà un controllo avvertendo che deve essere:

$$K_1 + K_2 = \Sigma \frac{1}{d^2}$$

come si deduce dalle equazioni (4).

I coeficienti $K_4 K_5 K_6$ si otterranno speditamente col regolo calcolatore osservando che, secondo le equazioni (4)

$$\begin{aligned} K_4 &= -\Sigma s \,.\, ED \\ K_5 &= -\Sigma s \,.\, EF \\ K_6 &= \Sigma s^2 \,.\, ED. \end{aligned} \tag{17}$$

Può succedere che qualcuna, a_j, delle rette $a_1\, a_2 \ldots$ non intersechi sul disegno dell'asse x_0. Si misurerà allora il segmento r che essa taglia nell' asse y_0, ed essendo $s = -r \cot. \alpha$, le tre ultime delle equazioni (4) diventeranno:

$$\begin{aligned} K_4 &= \frac{r_1}{d_1^2} \operatorname{sen}\alpha_1 \cos\alpha_1 + \ldots + \frac{r_n}{d_n^2} \operatorname{sen}\alpha_n \cos\alpha_n \\ K_5 &= -\frac{r_1}{d_1^2} \cos^2\alpha_1 - \ldots - \frac{r_n}{d_n^2} \cos^2\alpha_n \\ K_6 &= \frac{r_1^2}{d_1^2} \cos^2\alpha_1 + \ldots + \frac{r_n^2}{d_n^2} \cos^2\alpha_n. \end{aligned} \tag{4)'$$

Con costruzione analoga alla precedente si avranno per queste rette i segmenti $D'E'$, $E'R$, $E'F'$ (v. fig.) da sommarsi rispettivamente con i segmenti SE, ED, FE costruiti per le altre, per ottenere i valori di $K_1\, K_2\, K_3$. E si avrà analogamente alle equazioni (17):

$$\begin{aligned} K_4 &= -\Sigma r \,.\, E'F' \\ K_5 &= -\Sigma r \,.\, E'D' \\ K_6 &= \Sigma r^2 \,.\, E'D'. \end{aligned} \tag{17)'$$

Ottenuti i coefficienti dell'equazione (6) si possono costruire sul disegno le due rette individuate dalle equazioni (12). Il loro punto d'intersezione avrà per coordinate $X\, Y$ e sarà il punto più plausibile cercato.

Queste rette incontrano l'asse x_0 alle ascisse $-\frac{K_4}{K_1}, -\frac{K_5}{K_3}$ rispettivamente, e l'asse y_0 alle ordinate $-\frac{K_4}{K_3}$ e $-\frac{K_5}{K_2}$ e fanno con l'asse x_0 gli angoli ψ e ψ' dati da

$$\text{tang. } \psi = -\frac{K_1}{K_3},$$

$$\text{tang. } \psi' = -\frac{K_3}{K_2}.$$

Sono pertanto, in ogni caso, di facile costruzione.

Del resto se si vuole evitare la costruzione grafica, si possono calcolare numericamente le coordinate $X\,Y$, ricavando dalle equazioni (12):

$$(18)\qquad X = \frac{K_2K_4 - K_3K_5}{K_3^2 - K_1K_2}$$

$$Y = \frac{K_1K_5 - K_3K_4}{K_3^2 - K_1K_2}.$$

Determinata così la posizione più plausibile del punto P, si misurano sulla figura d'errore le lunghezze dei segmenti m per tale punto, e si calcolano le correzioni $\frac{m}{d \operatorname{sen} 1''}$ spettanti a ciascuna direzione esterna ed a ciascun angolo misurato in P.

La somma $\left[\frac{m}{d} \cdot \frac{m}{d}\right]$ dovrà risultare eguale al valore di z fornito dalla equazione (13). Si ha così un comodo controllo dei calcoli.

L'errore medio di ciascuna direzione sarà, come è noto:

$$\mu'' = \pm \sqrt{\frac{Z}{(n-2) \operatorname{sen}^2 1''}}.$$

Gli errori medî delle coordinate, $M_x M_y$, si trovano immaginando che ciascuno degli azimut osservati $\alpha_1\ \alpha_2$ ... subisca una variazione eguale a μ'' e determinando la variazione che ne consegue alle coordinate della posizione più plausibile fornite dalle equazioni (18).

A tali variazioni degli azimut corrispondono nella figura

d'errore, spostamenti laterali paralleli delle rette $a_1\ a_2$ ... eguali rispettivamente a μd_1 sen $1''$, μd_2 sen $1''$, ...

La nuova posizione del punto sarà fornita da due equazioni analoghe alle (18), nelle quali i coefficienti $K_1\ K_2\ K_3$ rimarranno gli stessi poichè dipendono soltanto dalle distanze $d_1\ d_2$ ... e dagli angoli che le rette $a_1\ a_2$ ... fanno con l'asse x_0, i quali rimangono invariati, essendo le nuove rette parallele alle prime.

I nuovi coefficienti $K_4'\ K_5'$ si otterranno ponendo nelle corrispondenti equazioni (4):

$$s_1' = s_1 \pm \mu'' \frac{d_1}{\text{sen}\alpha_1} \text{sen}1''$$

$$s_2' = s_2 \pm \mu'' \frac{d_2}{\text{sen}\alpha_2} \text{sen}1''$$

$$\dots\dots\dots$$

da cui si ricava:

$$(s_1' - s_1)^2 = \mu^2 \frac{d_1^2}{\text{sen}^2\alpha_1} \text{sen}^2 1''$$

$$(s_2' - s_2)^2 = \mu^2 \frac{d_2^2}{\text{sen}^2\alpha_2} \text{sen}^2 1''$$

$$\dots\dots\dots$$

Dalle equazioni (4), per legge di propagazione degli errori, si avrà pertanto:

$$(19)\qquad \begin{aligned} (K_4' - K_4)^2 &= \mu^2 \left(\frac{d_1^2 \,\text{sen}^4 \alpha_1}{d_1^4 \,\text{sen}^2 \alpha_1} + \dots \right) = K_1 \mu^2 \\ (K_5' - K_5)^2 &= \mu^2 \left(\frac{d_1^2 \text{sen}^2\alpha_1 \cos^2\alpha_1}{d_1^4 \text{sen}^2\alpha_1} + \dots \right) = K_2 \mu^2. \end{aligned}$$

Queste differenze sono dello stesso ordine e della stessa natura di μ. Quindi sottraendo le equazioni (18) dalle nuove equazioni:

$$(18)'\qquad \begin{aligned} X' &= \frac{K_2 K_4' - K_3 K_5'}{K_3^2 - K_1 K_2} \\ Y' &= \frac{K_1 K_5' - K_3 K_4'}{K_3^2 - K_1 K_2} \end{aligned}$$

quadrando e tenendo conto delle (19), si ottiene:

$$(20) \qquad \begin{aligned} M_x^2 &= (X' - X)^2 = \mu^2 \frac{K_2}{K_1 K_2 - K_3^2} \\ M_y^2 &= (Y' - Y)^2 = \mu^2 \frac{K_1}{K_1 K_2 - K_3^2}. \end{aligned}$$

L'errore medio M del punto sarà pertanto dato dalla equazione:

$$(21) \qquad M^2 = M_x^2 + M_y^2 = \mu^2 \frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2 - K_3^2}$$

la quale confrontata con le equazioni (10) dimostra che tale errore medio è indipendente (come deve essere) dagli assi coordinati.

Se nella equazione (11) si suppone:

$$z = z_i = \text{costante}$$

si ottiene il luogo geometrico dei punti del piano $x_0\, y_0$ per i quali è costante ed eguale a z_i la somma dei quadrati $\frac{m^2}{d^2}$.

Tale luogo è costituito dalla linea di intersezione del paraboloide col piano $z = z_i$; cioè è una ellisse, la quale, come risulta dalla equazione (11), ha per semiassi $\sqrt{\frac{z_i}{K_1'}}$ e $\sqrt{\frac{z_i}{K_2'}}$, e i medesimi sono disposti secondo direzioni facenti rispettivamente con gli assi coordinati $x_0 y_0$ l'angolo φ dato dalla (15).

La (15) dimostra che quest'angolo φ è indipendente da z. Ne consegue, come è noto, che i punti per i quali è uguale il valore di z sono situati su ellissi simili e similmente poste; ellissi che sono le intersezioni del paraboloide considerato con i piani paralleli al piano $x_0\, y_0$.

Al valore particolare: $z = \mu^2$ corrisponde quella che venne da Helmert denominata *ellisse dell'errore medio*, i semiassi A, B, della quale, per l'equazione (11), sono:

$$(22) \qquad A = \mu \sqrt{\frac{1}{K_1'}}\,; \quad B = \mu \sqrt{\frac{1}{K_2'}}$$

e soddisfano alla equazione:

$$A^2 + B^2 = M^2.$$

Costruita questa ellisse, si può tracciare la corrispondente curva luogo geometrico dei piedi delle perpendicolari abbassate da P sulle tangenti alla ellisse stessa; curva che taglia su un sistema qualunque di assi coordinati, con centro in P, segmenti eguali ai corrispondenti errori medi delle coordinate: ossia fornisce l'errore medio del punto per le singole direzioni.

La costruzione della ellisse dell'errore medio serve a fornire un concetto assai chiaro dell'errore che si può temere nella determinazione fatta; la quale avviene nelle migliori condizioni quando tale ellisse si riduce ad un cerchio, ossia quando risulta $K_1' = K_2'$ e i due semiassi A, B risultano sufficientemente piccoli.

Ma un criterio per giudicare delle condizioni in cui avviene la determinazione si può ottenere anche senza spingere le ricerche fino alla costruzione della ellisse dell'errore medio.

L'espressione (21) dimostra che l'errore medio M si può considerare costituito dal prodotto dell'errore medio μ per il fattore:

$$L = \sqrt{\frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2 - K_3^2}}\,.$$

L'errore medio μ dipende essenzialmente dalla approssimazione con la quale sono state fatte le osservazioni azimutali per la determinazione del punto, e si può considerare come costante in costanti condizioni di osservazioni.

Invece il fattore L dipende dalla forma e dalle dimensioni della figura d'errore.

La determinazione avverrà pertanto in tanto migliori condizioni quanto più piccolo risulterà questo fattore L, che potrebbe essere chiamato *lato medio equivalente*, e deve mantenersi entro i limiti di lunghezza dei lati della triangolazione di cui fa parte il punto P.

Applicazione pratica.

Come applicazione del procedimento sopra esposto riportiamo il calcolo del punto trigonometrico *Monteluro* determinato in provincia di Pesaro in sostituzione di un punto disperso di 1° ord. dell'I. G. M.

Questo punto venne collegato ai punti trigonometrici dell'I. G. M.

A_1 L'Imperiale

A_2 M. Giove

A_3 Beato Sante

A_4 Mondaino

A_5 M. Colbordolo

A_6 Novilara

osservandolo dai punti A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 e osservando nel punto stesso le direzioni ai punti A_1 A_3 A_4 A_6.

Da ciascuno dei punti fissi si sono osservati oltre al punto P, due o più punti trigonometrici della rete dell'I. G. M., e come azimut medî osservati α_1 α_2 α_3 α_4 α_5 si sono assunte le medie aritmetiche dei valori risultanti dalle osservazioni.

Mediante l'azimut approssimativo α_4 così ottenuto e gli angoli β misurati nel punto si calcolarono gli azimut approssimativi α_1, α_3 (ottenendo valori alquanto differenti da quelli corrispondenti ottenuti dalle osservazioni esterne) e si formò l'azimut α_6.

Assunte come coordinate approssimate dal punto P_0

$$x_0 = + 20446.00$$

$$y_0 = + 11122.00$$

si calcolarono, con gli azimut così determinati, le coordinate X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_1' X_3' X_6 dei punti $A_1' A_2' A_3'$ ... di intersezione delle singole visuali con l'asse x_0. In figura questi punti vennero per semplicità designati soltanto con i loro indici 1. 2. 3. 4. 5. 1'. 3'. 6.

I calcoli di cui sopra sono raggruppati nel quadro seguente:

VISUALI	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$a_{4\cdot1}$	$a_{4\cdot3}$	$a_{4\cdot6}$
Punti fissi dai quali venne osservato P A_i	A_1 L'Imperiale	A_2 M. Giove	A_3 Beato Sante	A_4 Mondaino	A_5 M. Colbordolo			
Punti fissi fra i quali venne mis. l'ang. in P A_i						A_4 Mondaino A_1 L'Imperiale	A_4 Mondaino A_3 Beato Sante	A_4 Mondaino A_6 Novilara
Azimut approssim. α_j Angolo in P β						54°.36'.23" 206 .19 .53	54°.36'.23" 277 .33 .31	54°.36'.23" 238 .39 .29
Azimut medio osserv. α_i	260°.56'.17"	302°.05'.24'	332°.09'.57"	54°.36'.23"	24°.15'.20"	260 .56. 16	332 .09 .54	293 .15 .52
$\frac{m}{d \operatorname{sen} 1''}$	— 4.8"	+ 0.5	0.0	— 0.6	+ 2.8	— 0.6	— 0.6	— 0.6
$\frac{m}{d' \operatorname{sen} 1''}$						— 3.0	+ 3.2	+ 5.5
Azimut compens. α_i'	260.56.12	302.05.25	332.09.57	54.36.22	24.15.23	260.56.12	332.09.57	293.15.57
Y_0 $-y_i$ $-C_y$	+11122.00 —19528.79 0.00	+11122.00 —27168.80 + 0.04	+ 11122.00 — 18111.24 + 0.04	+11122.00 — 2823.94 + 0.01	+ 11122.00 — 6337.82 + 0.01			+ 11122.00 — 23677.07 + 0.01
$Y_0-(y_i+C_y)=\Delta y$	— 8406.79	—16046.76	+ 6989.20	+ 8298.07	+ 4784.19			— 12555.06
log. Δy log. cot. α_i	3.9246302 9.2027416	4.2053874 9.7973061	3.8444275 0.2773640	3.9189771 9.8515613	3.6798084 0.3462244	3.9246302 9.2027551	3.8444275 0.2773487	4.0988188 9.6334003
log. Δx	3.1273718	4.0026935	4.1217915	3.7705384	4.0260328	3.1273853	4.1217762	3.7322191

Δx	− 1340.82	+10062.21	+ 13237.06	+ 5895.74	+ 10617.76	− 1340.87	+ 13236.59	+ 5397.83
x_i	+21787.50	+10384.16	+ 7209.36	+14550.72	+ 9828.42	+ 21787.50	+ 7209.36	+ 15048.25
C_x	0.00	+ 0.01	+ 0.02	+ 0.01	+ 0.01	0.00	+ 0.02	+ 0.01
X_i	+20446.68	+20446.44	+ 20446.44	+20446.47	+ 20446.19	+ 20446.63	+ 20445.97	+ 20446.09
$+\frac{\Delta x \,.\, y_i^2}{2r^2}$	0.00	+ 0.01	+ 0.02	+ 0.01	+ 0.01			+ 0.01
$-\frac{\Delta x \,.\, \overline{\Delta y}^2}{6r^2}$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00
C_x	0.00	+ 0.01	+ 0.02	+ 0.01	+ 0.01			+ 0.01
$-\frac{\overline{\Delta x}^2 \,.\, y_i}{2r^2}$	0.00	− 0.04	− 0.04	− 0.01	− 0.01			− 0.01
$-\frac{\overline{\Delta x}^2 \,.\, \Delta y}{6r^2}$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00
C_y	0.00	− 0.04	− 0.04	− 0.01	− 0.01			− 0.01
in decine di Km. $d = PA_i$	0.85	1.89	1.50	1.02	1.16	1.02	1.02	1.02
PA_j						0.85	1.50	1.37
A_iA_j						1.82	1.70	2.09
$d' = \frac{PA_i . PA_j}{A_iA_j}$						0.48	0.90	0.67
in metri m	0.20	0.05	0.02	0.03	0.16	0.07	0.14	0.18

Con un rapportatore si tracciarono di poi le rette $a_1\, a_2\, a_3$ $a_4\, a_5\, a_1'\, a_3'\, a_6$ passanti per i punti $A_1'\, A_2'$ ... e facenti con l'asse x_0 gli angoli $\alpha_1\, \alpha_2$ ...

Per il punto d' intersezione delle rette $a_4\, a_1'$ si tracciò la visuale equivalente $a_{4.1}$ facente con la retta a_4 l'angolo PA_1A_4 e con la retta a_1' l'angolo PA_4A_1. Analogamente si tracciarono le altre due visuali equivalenti $a_{4.3}\, a_{4.6}$.

Si ottenne così la figura d'errore costituita dalle otto rette $a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_{4.1}\, a_{4\,3}\, a_{4.6}$.

Costruiti allora i segmenti ED, ES, EF (vedi linee punteggiate della figura nella quale vennero omesse per chiarezza le lettere E, D, S) si formarono i coefficienti $K_1\, K_2\, K_3$, e poi, misurati sulla figura o dedotte dalle coordinate $X_1\, X_2 \ldots$ i segmenti s, si calcolarono con le (17) i coefficienti $K_4\, K_5\, K_6$, come nel quadro seguente:

Visuali	$\frac{1}{d^2}$	ED	ES	EF		s metri	$-s.ED$		$-s.EF$		$s^2.ED$	Δ^2
		+	+	+	−		+	−	+	−	+	″
a_1	1.38	1.34	0.04		0.22	+0.68		0.91	0.15		0.620	23.0
a_2	0.28	0.18	0.10	0.11		+0.38		0.07		0.04	0.026	0.3
a_3	0.44	0.10	0.34	0.18		+0.44		0.04		0.08	0.019	0.0
a_4	0.96	0.64	0.32		0.46	+0.47		0.30	0.22		0.141	0.4
a_5	0.74	0.13	0.61		0.27	+0.19		0.02	0.05		0.005	7.9
$a_{4\cdot1}$	4.33	3.78	0.55		1.46	+0.56		2.12	0.82		1.181	9.0
$a_{4\cdot3}$	1.23	1.23	0.00	0.05		+0.33		0.41		0.02	0.134	10.3
$a_{4\cdot6}$	2.23	2.15	0.08		0.38	+0.29		0.62	0.11		0.181	30.5
	11.59	9.55	2.04	0.34	2.79			−4.49	1.35	0.14	2.307	81.4
					0.34				0.14			
		$=K_1$	$=K_2$	$K_3=$	−2.45			$=K_4$	+1.21	$=K_5$	$=K_6$	$=[\Delta.\Delta]$

Con le equazioni (18) si potè allora ottenere:

$$X = +\,0.47$$
$$Y = -\,0.04.$$

Il calcolo venne controllato con la costruzione delle rette di equazioni (12) le quali però per chiarezza della figura non vengono riportate.

Le coordinate compensate risultarono così

$$x = +\,20446.47$$
$$y = +\,11121.96.$$

Disegnato sulla figura il punto P, si misurarono le distanze m dalle singole rette della figura d'errore, si calcolarono le correzioni $\frac{m}{d \operatorname{sen} 1''}$ spettanti a ciascuno degli azimut approssimativi $\alpha_1 \alpha_2 \ldots$ e si ottennero così gli azimut compensati $\alpha_1' \alpha_2' \ldots$

Gli azimut compensati $\alpha'_{1'}$ $\alpha'_{3'}$, ottenuti con le visuali equivalenti risultarono eguali agli azimut corrispondenti $\alpha_1' \alpha_3'$ delle visuali esterne, offrendo così il dovuto controllo.

La somma dei segmenti

$$\Delta^2 = \frac{m^2}{d^2 \operatorname{sen}^2 1''}$$

risultò, come dal quadro sopra riportato:

$$[\Delta . \Delta] = 81.4.$$

Calcolata la stessa somma mediante l'equazione (13) si ottenne:

$$[\Delta . \Delta] = 82.5$$

con una differenza trascurabile (che scomparirebbe se si facessero i calcoli con tutta precisione anzichè semplicemente col regolo calcolatore).

Si ottenne poi l'errore medio di ciascuna direzione:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{82}{6}} = \pm 3.69''$$

e con le equazioni (20) gli errori medi

$$M_x = \pm 0.07\ m$$
$$M_y = \pm 0.15\ m$$

e l'errore medio del punto (eq. 21)

$$M = \pm 0.166\ m.$$

Con le equazioni (16) si calcolarono i coefficienti K_1' K_2' della equazione (11)

$$K_1' = 10.25$$
$$K_2' = 1.35$$

e con le (22) i semiassi della ellisse dell'errore medio

$$A = 0.055\, m$$

$$B = 0.155\, m.$$

Come controllo si ottenne

$$M = \sqrt{A^2 + B^2} = 0.164 \text{ m.}$$

che concorda sufficientemente col valore di M trovato sopra.

Con l'equazione (15) si calcolò:

$$\text{tang. } 2\,\varphi = -0.652$$

$$\varphi = -16^{\circ}33'.$$

Con gli elementi φ, A, B venne costruita l'ellisse dell'errore medio e la relativa curva-piede, la quale fornisce l'errore medio nelle singole direzioni. Verificati con la medesima i valori M_x M_y trovati sopra, si constatò la dovuta corrispondenza.

Il *lato medio equivalente* risultò

$$L = 9{,}2\, Km,$$

lunghezza ammissibile trattandosi di un punto di rete avente un lato medio di 10 Km. circa.

Per esigenze tipografiche la figura a pag. 18 è ridotta alla scala di 1 : 11,1. La precisione è quella che si può pretendere da un *cliché* tipografico del genere.

Sull' oncosina di Variney
(Valle d'Aosta).

Osservazioni del Dr. GIUSEPPE PIOLTI.

Li 21 agosto 1908 percorrevo lo stradone Aosta-Valpelline. A pochi minuti di cammino dal villaggio di Variney ed a sinistra della strada mi venne fatto di osservare una cava, da

cui si estraeva un calcare per inghiaiamento, ed in attività di coltivazione. Ivi attirarono la mia attenzione piccole masserelle compatte d'un bel color verde che spiccavano sul grigio della roccia. Credetti in sulle prime si trattasse di *cossaite*, ma, come vedremo in seguito, il minerale era invece *oncosina*.

Raccolsi un buon numero di campioni e dal loro esame mi risultò che il colore di questo minerale varia gradatamente da un verdognolo pallidissimo, quasi bianco cereo, ad un bel verde schietto.

Esso giace nella *dolomite* mista a *calcite* e questi due minerali alla loro volta stanno in un calcare dolomitico che è appunto quello adoperato per l'inghiaiamento.

Fonde facilmente con ribollimento in uno smalto bianco e questo carattere mi permise subito di escludere che il minerale fosse *cossaite*, perchè questa fonde a stento e senza ribollimento.

La durezza è di 2,5, analoga a quella dell'oncosina di Tamsweg, analizzata dal Kobell (1), la quale precisamente, secondo detto autore, ha una durezza che sta frammezzo a quella dell'*halite* e della *calcite*.

Il peso specifico è uguale a 2,819 alla temperatura di $+16°C$; Kobell aveva trovato 2,80 alla temperatura di $+13°R$.

I saggi qualitativi mi dimostrarono la presenza della silice, dell'allumina, del protossido di ferro, della magnesia, della potassa e dell'acqua; e tali saggi feci su frammenti accuratamente scelti uno per uno colla lente, per scartare quelli che contenevano impurità; poichè mi accorsi che qualche rarissimo frammento conteneva *pirite*. Altri portavano appiccicate esilissime lamine di *calcite*.

E quindi ritenni necessario, prima di procedere all'analisi quantitativa, di trattare la polvere del minerale con acido cloridrico diluito al 10 %, cioè con un grado di diluzione tale da esser sicuro che non venisse intaccata, anche in minima pro-

---

(1) Dalla cortesia del Prof. Icilio Guareschi ebbi in comunicazione il volume del " Journal für praktische Chemie " (vol. 2°) del 1834, in cui a p. 295 trovasi il lavoro originale del Kobell.

porzione, la parte destinata all'analisi, di cui i risultati sono i seguenti:

SiO^2	=	50,98
Al^2O^3	=	25,63
FeO	=	0,35
MgO	=	6,31
K^2O	=	12,32
Li^2O	=	tr.
H^2O	=	4,14
		99,73

valori che corrispondono approssimativamente a quelli dati dalle sole tre analisi che finora esistono (per quanto io sappia) dell'oncosina, che qui riporto:

	Tamsweg (1)	Fenestrelle (2)	Salzburger Alpen (3)
SiO^2	52,52	47,96	45,48
Al^2O^3	30,88	31,03	38,15
FeO	0,80	—	—
MgO	3,82	3,42	0,17
CaO	—	1,07	0,76
K^2O	6,38	10,44	9,25
Na^2O	—	4,08	1,12
H^2O	4,60	2,41	4,69
	99,—	100,41	99,62

Essendo l'*oncosina* una varietà di *muscovite* è naturale che queste quattro analisi presentino differenze che stanno nei limiti di quelle che si incontrano nelle analisi delle comuni muscoviti. Osservo inoltre che l'elevata proporzione di potassa (12,32 $^0/_0$) nell'*oncosina* di Variney si scosta di poco dal valore teorico (11,8 $^0/_0$) dato dal Dana (4) per tale composto, dedotto dalla

(1) Kobell, Loco citato.

(2) Cossa, *Ricerche chimiche e microscopiche su rocce e minerali d'Italia.* Torino, 1881, p. 81.

(3) Rammelsberg, *Handbuch der Mineralchemie*, Zweite Auflage, II, Specieller Theil. Leipzig, 1875, p. 513.

(4) Edward Salisbury Dana, *Descriptive Mineralogy*, Sixt Edition. London, 1892, p. 617.

formola ottenuta mediante le numerose analisi che si conoscono della *muscovite.*

In quanto alla proporzione di magnesia superiore nell'*oncosina* di Variney alle proporzioni indicate per le altre località summentovate, osservo che in una *leucofillite* (varietà di *muscovite*) menzionata dal Dana (1), in cui il rapporto fra la silice e l'allumina è poco diverso dal rapporto fra tali due composti trovato nell'*oncosina* di Variney, come appare dal seguente confronto:

	SiO^2	Al^2O^3
Leucofillite	52,81	23,21
Oncosina di Variney	50,98	25,63

la magnesia raggiunge l'8,90 %.

D'altronde chiunque esamini le molte analisi della *muscovite* deve riconoscere quanto sia esatta la seguente osservazione fatta l'anno scorso dal Le Chatelier: “ Toute recherche chimique “ sur les silicates qui n'est pas accompagnée d'un examen “ optique est sans valeur. Une partie de la confusion que les “ études des minéralogistes ont laissé subsister sur la nature “ des silicates provient de ce que trop souvent ils ont procédé “ à leur analyse chimique sans prendre la peine de vérifier “ l'homogénéité des échantillons étudiés „ (2).

Siccome poi la *cossaite* (varietà di *paragonite*) può scambiarsi per l'aspetto coll'*oncosina*, così credo opportuno di riassumere le differenze che permettono facilmente di distinguere un minerale dall'altro, senza ricorrere all'analisi.

	Cossaite	Oncosina
Colore	Verde-azzurrognolo	Verde
Fusibilità . . .	Fonde difficilmente	Fonde facilmente con rigonfiamento
Peso specifico	2,95 (3)	2,80 (4).

(1) Manuale citato, p. 619.

(2) “ Revue scientifique „, 1908, T. X, N. 22, p. 677.

(3) Media dei valori dati dal Cossa per le cossaiti di Borgofranco e del Colle Blaisier e di quello dato da me per la cossaite del Colle di Bousson.

(4) Media dei valori dati uno dal Kobell, l'altro dallo Schwarz per l'oncosina delle Salzburger Alpen e l'altro da me.

Sulla baritina dello scavo Cungiaus, miniera di Monteponi, Sardegna.

Nota di GABRIEL LINCIO.

(Con una Tavola).

La baritina qui studiata si trova in forma di esili tavolette disseminata sopra calamina ricca d'ossido di ferro e proviene dall'ammasso calaminare incluso nel calcare metallifero dello scavo Cungiaus di Monteponi. Essa venne raccolta in detta località e gentilmente messa a mia disposizione per uno studio cristallografico dal Prof. C. Viola, al quale pregiomi di rendere qui pubbliche grazie.

L'ammasso del minerale calamina (così denominato volgarmente sul posto) è costituito in gran parte da carbonato di zinco, smitsonite, da piccole quantità di silicato di zinco, calamina, e da limonite. La baritina si trova sparpagliata sulla superficie del minerale là dove esso è più friabile, corroso e ricco di limonite. Per quanto io mi sappia, al Cungiaus la baritina è solo di generazione recente, è cristallizzata, limpida, incolora o tutt'al più gialliccia, perchè impolverata di limonite: la generazione più antica, altrove quasi generalmente caratterizzata da color latteo o rossastro, ricca d'inclusioni, talora anche compatta o spatica, pare manchi affatto al Cungiaus.

Riguardo alla genesi della baritina in genere, pare che essa venga nel maggior numero dei casi determinata dall'azione reciproca, diffusa e lenta tra una soluzione acquosa diluita di un sale di bario, cloruro o bicarbonato, ed una soluzione di un solfato di zinco, calcio, ferro, ecc., ovvero essa dipenderebbe dal modo di comportarsi di un'unica soluzione acquosa, che contiene ad una certa temperatura, insieme con altro, il solfato di bario disciolto e lo deposita per cambiamento della temperatura ed anche per altre cause sotto forma di cristalli, appena raggiunto il periodo di soprasaturazione rispetto al solfato di bario medesimo, che è pochissimo solubile.

La genesi della baritina pare rappresenti una delle ultime fasi della genesi del giacimento calaminare del Cungiaus. In origine il solfuro di zinco, blenda, dovette trovarsi anche nelle parti superficiali del giacimento, ove, essendo esposto all'azione delle acque circolanti ed agli agenti atmosferici, si ossidò dando luogo alla formazione di solfato di zinco, che è assai solubile e che, venuto a contatto col calcare includente, si trasformò in carbonato di zinco formando a sua volta solfato di calcio. Quest'ultimo per la sua solubilità venne asportato dalle acque. Sovente si trovano ancora dei pezzi di minerale che nell'interno contengono delle ossature di calcare rimasto intatto.

In soluzione insieme col solfato di calcio ed aventi forse la stessa origine di esso, possono essersi trovate le piccole quantità di solfato di bario, le quali, secondo l'ipotesi della soluzione unica, si sarebbero depositate quali sottili tavolette sulla calamina precedentemente formata [1].

Studiando ora la baritina del Cungiaus dal lato cristallografico, noi troviamo che essa si presenta sempre in cristalli tabulari secondo l'asse *c*, inoltre o allungati secondo l'asse *b* oppure egualmente sviluppati secondo i due assi *a* e *b*. I cristalli si trovano irregolarmente disseminati ed impiantati sul minerale di zinco, non di rado però con la base imperniata sur una punta prominente del medesimo, ciò che permise loro di svilupparsi liberamente in tutte le direzioni. Le dimensioni delle tavolette di baritina raggiungono raramente 3 mm. di lato secondo gli assi *a* e *b* ed 1 mm. di spessore secondo *c*; quest'ultima dimensione diventa talvolta minima, sì da presentare dei cristalli che si direbbero di carta velina. La baritina del Cungiaus è povera di forme e mostra quasi costantemente la combinazione seguente:

c	*b*	*m*	*o*	*d*	*z*
001{	}010{	}110{	}011{	}102{	}111{

[1] Notizie dettagliate intorno al Cungiaus si trovano nei lavori: Ing. G. Capacci, *Studio sulle miniere di Monteponi*, " Boll. Soc. Geol. It. ", vol. XV, 1896. — Ing. E. Ferraris, *Genesi dei giacimenti metalliferi di Monteponi*, " Rendic. Riun. Assoc. Min. Sarda ", 3, 1898 — Ing. B. Lotti, *I depositi dei minerali metalliferi*, 1903.

Le faccie *c* sono generalmente ondulate, striate e danno cattivissime imagini;

b è ben sviluppata, dà imagini splendide, manca raramente, talora è molto stretta;

m è grande, piana e dà sempre imagini molto buone;

o è ben sviluppata e dà pure imagini buone;

d di sviluppo primario, ma ondulata, dà cattive imagini;

z è generalmente ben sviluppata e dà imagini buone; talvolta non compare con tutte le sue faccie o qualcuna è strettissima.

L'orientazione dei cristalli, qui usata, è quella di Hauy, oggi accettata quasi generalmente, secondo la quale la direzione di sfaldatura perfetta coincide con la base *c* e quella di sfaldatura quasi perfetta col prisma *m*. Per le lettere rappresentanti le forme cristallografiche vedi le " Krystallographische Winkeltabellen „ di V. Goldschmidt.

Per la determinazione delle forme e delle costanti cristallografiche della baritina del Cungiaus feci le misure angolari con goniometro a due cerchi nuovo modello Goldschmidt e per ragioni di comodità e precisione misi al polo non la base *c*, che non è mai piana, ma il pinacoide laterale *b*, che è piano e ben riflettente. Così feci uso dei valori angolari di posizione rispetto alla faccia polare *b* e ad un primo meridiano passante per *b* e *c*, e determinai le costanti in due modi, una volta con la forma *m* insieme con la *o* ed una seconda volta con la forma *z* e ne trassi la media. Per passare dall'orientazione cristallografica qui adottata a quella normale non si ha che da girare il cristallo di 90° intorno all'asse *a* e sottoporre ad alcune evidenti trasformazioni i valori di misura per ottenere i valori angolari di posizione normale.

Cristallo N°	Forma *o*		Forma *m*		Forma *z*	
	φ'	ρ'	φ'	ρ'	φ'	ρ'
I.	0° 08′ 0° 02′	37° 20′ 37° 18′	89° 58′ 90° 08′	50° 55′ 50° 53′		
II.			90° 00′	50° 50′	58° 14′ 58° 11′	55° 20′ 55° 13′
III.	0° 00′	37° 17′	90° 01′ 89° 59′	50° 50′ 50° 49′	58° 15′ 58° 12′	55° 19′ 55° 19′
IV.	0° 05′ 0° 05′	37° 19′ 37° 19′	90° 01′ 89° 59′	50° 53′ 50° 53′	58° 10′ 58° 10′ 58° 09′	55° 16′ 55° 19′ 55° 19′
V.	0° 01′ 0° 02′	37° 19′ 37° 20′	90° 00′ 89° 59′	50° 48′ 50° 51′	58° 07′ 58° 12′ 58° 12′ 58° 11′	55° 18′ 55° 18′ 55° 18′ 55° 18′
VI.	0° 05′ 0° 02′	37° 18′ 37° 17′	90° 05′ 90° 02′	50° 52′ 50° 52′	58° 18′	55° 19′
VII.	0° 02′	37° 15′	89° 58′ 90° 00′	50° 50′ 50° 51′	58° 09′ 58° 12′ 58° 11′ 58° 09′	55° 17′ 55° 18′ 55° 19′ 55° 19′
VIII.	0° 04′ 0° 07′	37° 20′ 37° 18′	90° 03′ 90° 00′	50° 53′ 50° 51′	58° 09′ 58° 11′	55° 16′ 55° 16′
IX.	0° 02′	37° 17′	90° 03′ 90° 03′	50° 49′ 50° 50′	58° 10′ 58° 13′ 58° 07′ 58° 15′	55° 18′ 55° 19′ 55° 18′ 55° 19′

Cristallo N°	Forma o		Forma m		Forma z	
	φ′	ρ′	φ′	ρ′	φ′	ρ′
X.	0° 05′	37° 16′	89° 59′	50° 55′	58° 08′	55° 26′
	0° 00′	37° 24′	90° 00′	50° 55′	58° 18′	55° 22′
					58° 11′	55° 22′
XI.	0° 01′	37° 20′	90° 01′	50° 58′	58° 11′	55° 24′
			89° 54′	50° 46′		
XII.	0° 06′	37° 24′	90° 01′	50° 56′	58° 06′	55° 18′
			89° 58′	50° 50′	58° 09′	55° 24′
					58° 14′	55° 12′
					58° 15′	55° 14′
Media		**37°18,9′**		**50°51,7′**	**58°11,3′**	**55°18,6′**

Valori di posizione rispetto alla faccia polare b.

Forma $o = \{011\}$		Forma $m = \{110\}$		Forma $z = \{111\}$	
φ′	ρ′	φ′	ρ′	φ′	ρ′
0° 00′	37°18′54″	90° 00′	50°51′42″	58°11′18″	55°18′36″

Valori di posizione rispetto alla faccia polare c.

φ	ρ	φ	ρ	φ	ρ
0°00′	52°41′06″	50°51′42″	90°00′	50°50′11″	64°18′53″

col ρ si calcola:	col φ si calcola:	coi quali si calcolano:
∡ (001) : (011) 52° 41′ 06″ tg . 52°41′06″ = = c = 1,3120	∡ (100) : (110) 39° 08′18″ tg . 39°08′18″ = = a = 0,8138	∡ (001) : (011) 52° 42′ 31″ tg . 52° 42′ 31″ = c = 1,3131
		∡ (100) : (110) 39° 09′49″ tg . 39° 09′ 49″ = = a = 0,8145

Rapporto assiale ottenuto

$$
\begin{array}{lcl}
 & & \quad a \quad\; b \quad\; c \\
\text{da (011) con (110)} & = & 0{,}81379 : 1 : 1{,}31197 \\
\text{da (111)} & = & 0{,}81453 : 1 : 1{,}31310 \\
\hline
 & & 1{,}62832 : 1 : 2{,}62507
\end{array}
$$

Rapporto assiale medio: 0,8142 : 1 : 1,3125

Con questo rapporto assiale definitivo ritorno col calcolo agli angoli fondamentali:

$$\measuredangle\ (001):(011) = \text{misurato} \begin{cases} 52^\circ 41' 06'' \\ 52^\circ 42' 31'' \end{cases}, \text{ calcolato: } 52^\circ 41' 46''$$

$90^\circ - 52^\circ 41' 46'' = 37^\circ 18' 14''$ (Vedi Tab., pag. 6-7).

$$\measuredangle\ (100):(110) = \text{misurato} \begin{cases} 39^\circ 08' 18'' \\ 39^\circ 09' 49'' \end{cases}, \text{ calcolato: } 39^\circ 09' 09''$$

$90^\circ - 39^\circ 09' 09'' = 50^\circ 50' 51''$ (Vedi Tab., pag. 6-7).

		φ	ρ
Forma z (111):	misurato:	50°50′11″ ;	64°18′53″
	calcolato:	50°50′52″ ;	64°18′35″
		φ'	ρ'
	misurato:	58°11′18″ ;	55°18′36″
	calcolato:	58°11′13″ ;	55°19′17″

(Vedi Tab., pag. 6-7).

Nei cristalli della baritina del Cungiaus va ancora notata la tendenza alla formazione di individui apparentemente unici, che invece rappresentano un raggruppamento ipoparallelo di più subindividui. (Qui sopra vedi la Tavola fig. 1-5 e la relativa descrizione a pag. 27 e 28).

Non disponendo che di scarso e piccolo materiale, non potei fare delle esperienze chimiche sulla omogeneità e sulla composizione dei cristalli di baritina del Cungiaus e mi dovetti limitare ad un accurato saggio spettroscopico. A tale scopo fusi la baritina in miscela di carbonato sodico e potassico, sciolsi in acqua il prodotto di fusione, filtrai, lavai il residuo insolubile e lo sciolsi in poco acido cloridrico. In questa soluzione notai allo spettroscopio l'assenza del calcio e la presenza di lievi traccie di stronzio.

A questo punto credo opportuno, dopo d'aver studiato la gran mole delle pubblicazioni sulla baritina, di riferire intorno ad alcune di esse, che hanno speciale relazione col presente mio lavoro o sulle quali in seguito intendo di fare alcune considerazioni.

Nel lavoro di Alexander Schmidt sulla baritina di Telekes (1) abbiamo un accenno al giacimento, il quale presenta qualche analogia con quello del Cungiaus. L'autore scrive: " Nella località Unter-Telekes trovai della baritina in una concrezione di limonite tolta da uno strato di marna, che s'avvicendava con minerale di ferro (ematite, limonite, ecc.). I cristalli di un color cenerognolo sporco sono sottili come carta, tabulari secondo *c* e presentano la combinazione delle forme *m*, *b*, *c* „. Come si vede, oltre all'analogia di giacimento, la baritina di Telekes presenta l'abito cristallografico e la povertà delle forme come la baritina da me studiata.

Dal libro di F. Sandberger, *Untersuchungen über Erzgänge* (2), attingo alcune notizie chimiche intorno a baritine di varie località.

Di una baritina bianca di Wolfach vennero solo determinate le forme cristallografiche senza indicazione di misure goniometriche. Il peso specifico venne trovato eguale a 4,345. L'analisi di Dr. Killing diede per risultato:

$$BaSO_4 = 97,989 ; CaSO_4 = 0,685 ; SrSO_4 = 0,486 ; Somma = 99,160.$$

Di una baritina bianca di Schapbach, della quale vengono solo annoverate le forme cristallografiche, venne determinato il peso specifico 4,414. Arroventandola in un tubo perdette 0,273 % di peso. Zeitschel ne fece l'analisi ed ottenne:

$$BaSO_4 : 91,73 ; SrSO_4 = 4,28 ; CaSO_4 = 2,97 ; Somma = 98,98.$$

Con questi valori determinò la proporzione:

Bario 54 : Stronzio 2 : Calcio 1.

---

(1) Alexander Schmidt, *Baritina di Telekes*, " Groth's Ztschft „ Bd. VI, 1882, pag. 554.

(2) F. Sandberger, *Untersuchungen über Erzgänge*. Wiesbaden, 1882.

Una baritina proveniente dalla miniera Clara in quel di Hinterrankach, diede un peso specifico uguale a 4,353 e secondo l'analisi di Rohrbeck 9,27 $^0/_0$ di solfato di stronzio e solo traccie di calcio. Qui si può citare anche la baritina bianca di Schwatz in Tirolo, del peso specifico di 4,170, della quale si ha l'analisi di Bergmann:

0,09 perdita al calor rosso; 84,83 $BaSO_4$; 15,26 $SrSO_4$; 1,45 $CaSO_4$: Somma = 101,63.

La baritina bianca cristallizzata della miniera Neuglück in der Reinerzau (peso spec. 4,589) venne analizzata dal Dr. C. Killing:

$BaSO_4$ = 98,994; $SrSO_4$ = 0,300; $CaSO_4$ = 0,350; Somma = 99,644.

Altra baritina della stessa località, ma di generazione più recente della precedente, cristallizzata in forma di tavolette esilissime ed incolori, è chimicamente pura, come altre baritine più recenti di Schapbach e Wolfach.

F. Grünling [1] studiò due tipi di baritina cristallizzata della Binnenthal.

Il primo tipo è curioso pel suo abito speciale, tendente al prismatico secondo *m* (110), terminato da *c* (001) e lievemente smussato da *d* (102); il secondo tipo è più ricco di forme ed all'analisi spettrale si rivelò baritina pura.

Ma sulla baritina della Binnenthal torneremo ancora parlando del lavoro recente di Baumhauer und Trechmann (1908) [2].

C. Busz, *Ueber den Baryt von Mittelagger* [3]. L'autore parlando dei geminati di barite dello Helmhacker [4] cita il testo di lui: " Sämmtliche Zwillinge des Baryts sind Berührungs- oder " Juxtapositionszwillinge, deren Berührungsebenen, die drei ba-

---

(1) F. Grünling, *Baryt des Binnenthals*, " Groth's Ztschft „, Bd. VIII, 1884, pag. 243.

(2) H. Baumhauer und C. O. Trechmann, *Neuere Beobachtungen am Baryt des Binnenthals*, " Groth's Ztschft „, Bd. 44, 1908, pag. 607.

(3) C. Busz, *Ueber den Baryt von Mittelagger*, " Groth's Ztschft „, Bd. X, 1885, pag. 38.

(4) Helmhacker, *Ueber Baryt etc.*, " Denkschriften der K. K. Academie zu Wien „, 1872.

" sischen Flächen, sind „, e fa vedere come detti piani di contatto, essendo piani di simmetria dei cristalli, non possono esserne piani di geminazione e conchiude: " Es handelt sich also " hier nur um die durch unvollkommene Einigung der Einzel- " individuen bedingte Unterbrechung im Bau der Krystalle und " dadurch entstehende einspringende Winkel „.

Generalmente la faccia *m* forma gli angoli rientranti. Come si vede, già Helmhacker intravvide la tendenza della baritina a raggruppamenti ipoparalleli di più cristalli in uno solo secondo una certa legge; questi raggruppamenti egli li credette geminati. Per la celestina Arzruni in simil caso adottò la denominazione di M. Jerofejeff " Scucivanie „ e la tradusse con " Häufung „, che più tardi J. K. Samoiloff estese alla baritina stessa. Ma di ciò parleremo in seguito.

J. Beckenkamp, *Baryt von Oberschaffhausen im Kaiserstuhl* (¹).

Non potendo far analisi quantitativa per scarsezza di materiale, dovette accontentarsi di quella qualitativa, che rivelò la presenza d'un po' di calcio. Per il calcolo del rapporto assiale vennero usati gli angoli (100):(110) = 39°11′ e (001):(102) = 38°47. Contrariamente alla baritina del Cungiaus, quantunque (011) soventi fosse meglio sviluppato di (102) ed anche desse imagini molto nette, pure gli angoli (001):(011) differivano dalle due parti generalmente di 5 minuti, mentre quelli di (001):(102) mostravano una miglior coincidenza.

$$a : b : c = 0{,}81509 : 1 : 1{,}30992.$$

Essendo l'autore d'avviso che col variare dei rapporti assiali delle baritine di località diverse anche i loro indici di rifrazione dovessero notevolmente variare, ne fece una determinazione su due cristalli di Oberschaffhausen mediante le faccie (001) e (011).

Il raggio polarizzato perpendicolarmente all'asse *a* diede col metodo del prisma in media il valore $\gamma = 1{,}64809$ per luce al sodio e $t = 20°$ C. L'autore fa i seguenti confronti:

(¹) J. Beckenkamp, *Baryt von Oberschaffhausen im Kaiserstuhl*, " Groth's Ztschft „, XIII Bd., 1888, pag. 25.

Sulla baritina di

Dufton	secondo	Arzruni	$\gamma = 1,64795$	Differenza massima $= 0,0004$
Oberschaffhausen	"	Beckenkamp	$\gamma = 1,64809$	
Auvergne	"	Danker	$\gamma = 1,64811$	
Dufton	"	"	$\gamma = 1,64834$	
Uhlefoss	"	"	$\gamma = 1,64834$	

Se noi però osserviamo le dodici determinazioni degli indici di rifrazione fatte a mo' d'esempio da Wilhelm Ramsay di Helsingfors (1) tanto sul topazio degli Urali che sull'anglesite di Monteponi con luce al sodio, nel primo caso con lo stesso prisma di 92°42′ e nel secondo caso pure con lo stesso prisma di 103°43′, noi vediamo che la differenza massima nelle varie determinazioni di γ già raggiunge nel topazio 0,00075 e nell'anglesite 0,00105; per quanto dette determinazioni sieno state fatte dallo stesso autore e con lo stesso metodo. Nelle osservazioni di A. Arzruni (2) sulla baritina si riscontra pure che la differenza nelle determinazioni alla luce del sodio a $t = 20°$ C. per γ è uguale a 0,0005. Quindi ai dati ottenuti da autori diversi sulle baritine di diverse località con differenze che cadono nel campo degli errori dovuti al materiale, al metodo ed all'osservazione personale, pare che non si possa attribuire un valore differenziativo per le baritine medesime.

A. Wollemann, *Zur Kenntniss der Erzlagerstätte von Badenweiler und ihrer Nebengesteine* (3).

I cristalli di baritina qui sono rari, con faccie non bene sviluppate, tabulari secondo {010} e raggruppati assieme. Misure angolari mancano. Il loro peso specifico è 4,398. I risultati dell'analisi sono:

$BaSO_4 = 97,78$; $SrSO_4 = 1,68$; $CaSO_4 = 1,04$; Somma $= 100,50$.

A. Cathrein, *Baryt vom Grosskogel* (*Brixlegg in Tirol*) (4).

L'autore stabilì con misure goniometriche su d'un cristallo

(1) Wilhelm Ramsay, " Groth's Ztschft ", Bd. XII, 1887, pag. 216.

(2) A. Arzruni, " Groth's Ztschft ", 1877, Bd. I, pag. 171.

(3) A. Wollemann, *Zur Kenntniss der Erzlagerstätte etc.*, " Groth's Ztschft ", XIV Bd., 1888, pag. 625.

(4) A. Cathrein, *Baryt vom Grosskogel*, " Tschermak's Min. Petr. Mttlgn. ", X Bd., 1889, pag. 53.

la presenza di sette forme cristallografiche, gli angoli misurati li paragonò coi calcolati sui dati di Helmhacker. Sembra che la mancanza di buon materiale non gli abbia permesso di far misure più numerose allo scopo di determinare il rapporto assiale della barite di Grosskogel. Di questa baritina biancolattea il Cathrein ci dà una buona analisi [1]:

$BaSO_4 : 99{,}06$; $SrSO_4 = 0{,}71$; $CaSO_4 = 0{,}19$; Somma $= 99{,}96$.

G. B. Negri, *Studio cristallografico della baritina di Levico* [2].

Le faccie di }001{ sono predominanti, quasi sempre cattive, talvolta striate nel senso degli spigoli di combinazione [110:001]. La forma }100{ c'è, ma appannata e secondaria. La forma }010{ con faccie per lo più lucenti e ben misurabili. }102{ con imagini perfette su faccie ampie. Forma }011{ quasi sempre con imagini semplici e decise. }111{ a faccie talora strettissime, talora predominanti, buone imagini. Delle varie forme citai qui quelle che compaiono anche sulla baritina del Cungiaus, dove la }100{ manca, la }001{ ha qualità analoghe e la }102{ dà invece cattive imagini su faccie ampie.

I cristalli, spesso trasparenti, hanno abito tabulare secondo }001{. Alcuni sono allungati secondo [001:011], altri secondo [100 : 001], pochi egualmente estesi nelle due direzioni. Quasi sempre parecchi cristalli sono riuniti in posizione prossimamente parallela secondo (010) e contemporaneamente secondo (001); le faccie omologhe nei singoli individui mostrano di solito estensione differente.

Del fenomeno della Häufung, pure comune sulla baritina del Cungiaus, l'autore, oltre alla descrizione qui fatta, con fig. 3 e 4, ci presenta due bei disegni.

L'autore misurò 12 tra i migliori cristalli per fissare i limiti entro cui oscillano gli angoli omologhi in uno stesso cristallo e da cristallo a cristallo e poi per vedere se le faccie delle forme osservate mostrassero deviazioni dalle zone stabilite dalla teoria, quanto a dire se nei cristalli si svelassero irregolarità incompatibili coi simboli adottati per le forme medesime.

---

(1) A. Cathrein, " Groth's Ztschft ", 1888, XIV Bd., pag. 373.

(2) G. B. Negri, *Baritina di Levico*, " Rivista di Panebianco ", vol. V, 1889, pag. 6.

È interessante di vedere le oscillazioni dei valori del rapporto assiale per i dodici cristalli misurati:

a : *b* : *c*	*a* : *b* : *c*
0,8141 : 1 : 1,3118	0,8146 : 1 : 1,3124
8144 3125	8146 3121
8156 3141	8147 3133
8138 3120	8137 3112
8135 3116	8130 3119
8144 3121	8135 3108

Media : 0,8140 : 1 : 1,3118

Come si vede dalla tabella, il valore dell'asse *a* oscilla tra 0,8130 e 0,8156, quello dell'asse *c* tra 1,3108 e 1,3141. I tre valori medî del rapporto assiale della baritina del Cungiaus, da me calcolati, si trovano compresi tra i valori di questa tabella:

Negri	0,8140 : 1 : 1,3118	L.	0,8142 : 1 : 1,3125
Lincio	0,8138 : 1 : 1,3120	N.	0,8144 : 1 : 1,3125
N.	0,8138 : 1 : 1,3120		
L.	0,8145 : 1 : 1,3131		
N.	0,8147 : 1 : 1,3133		

K. Zimányi (1), *Baryt vom Comitate Torda-Aranyos, Gemeindehotter Koppand, auf der Berglehne Dobogó, Siebenbürgen.*

La baritina di Dobogó, trovata da A. Koch, si presenta in cristalli incolori e limpidi, che raggiungono talora le dimensioni 5 × 4 × 2 mm. Le forme }010{ e }102{ sono cattive. Nessuna notizia sulle qualità delle }001{ e }110{. I valori angolari di misura vengono confrontati coi calcolati sui valori di Helmhacker. L'analisi di questa baritina venne fatta da F. Koch con 2,537 gr. di materiale.

	trovato	calcolato
BaO =	65,47	65,68
SO_3 =	34,40	34,32
	99,87	100,00

(1) K. Zimányi, *Baryt von Dobogó*, " Groth's Ztschft ", 1890, Bd. XVII, pag. 510.

È qui degno di nota che la baritina di Dobogó cristallizzata limpida ed incolora si rivelò all'analisi chimica come baritina pura.

O. HERSCHENZ [1], *Untersuchungen über Harzer Baryte.*

Cito la seguente distinzione fatta dall'autore: " Der harzer Baryt lässt gewöhnlich zwei Generationen erkennen; der 'ältere' ist der krummschalige Baryt Werner's (milchweiss oder rötlich, selten dicht); der 'jüngere' Baryt sitzt auf dem älteren in deutlichen tafelförmigen wasserhellen Kristallen „.

Delle baritine dei giacimenti filoniani di Clausthal egli ci dà i rapporti assiali seguenti insieme con alcuni importanti accenni, che io riferisco qui brevemente:

Sulla baritina primitiva della grauvacca di Grund, filone di Hütschental, con molte misure .	$a:b:c =$	0,81470	: 1 :	1,31191
Su cristallo di baritina più recente della stessa località calcolò il rapporto assiale tipico . . .	„ =	,81482		,31300
" Auf dem Zellerfelder Hauptzuge „ la baritina presentò i valori .	„ =	,81433		,31191
Id. id. altra baritina	„ =	,81375		,31142
Al " Rosenhofer Zug „, miniera Zilla, la baritina diede il risultato seguente	„ =	,81384		,31191
Id. id. miniera Alter Segen, presso Clausthal, bei cristalli limpidi e brillanti	„ =	,81382		,31221
" Auf dem Silbernaaler Zuge „ baritina rosea	„ =	,81407		,31167
Baritina di località incerta . .	„ =	,81462		,31185
Baritina tabulare di Iberg presso Grund	„ =	,81292		,31027
Per la baritina dei filoni di Clausthal la media	„ =	,81425		,31194

---

[1] O. HERSCHENZ, *Untersuchungen über Harzer Baryte,* " Groth's Ztschft „, 1891, XVIII Bd., pag. 289.

In questo lavoro osservando i valori assiali enumerati noi vediamo che per la baritina recente del filone di Hütschental e per i cristalli limpidi della miniera Alter Segen i rispettivi valori non si scostano gran che l'uno dall'altro e si avvicinano a quelli della baritina del Cungiaus.

Herschenz:	0,8148 : 1 : 1,3130 0,8138 : 1 : 1,3122	Lincio:	0,8145 : 1 : 1,3131 0,8138 : 1 : 1,3120
Media	0,8143 : 1 : 1,3126		0,8142 : 1 : 1,3125

C. Luedeking and H. A. Wheeler (1), *Notes on a Missouri Barite.* Presso Smithton e Sedalia in Pettis County, Mo., in argilla trovansi cristalli di baritina limpidi ed incolori, che presentano strati gialli e bianchi. L'analisi d'uno strato bianco diede per risultato:

$$BaSO_4 = 87,2;\ SrSO_4 = 10,9;\ CaSO_4 = 0,2;\ (NH_4)_2SO_4 = 0,2;$$
$$H_2O = 2,4;\ \text{Somma} = 100,9.$$

Studiando tali strati bianchi al microscopio gli autori vi trovarono delle bollicine d'aria.

Il solfato d'ammonio venne estratto dal materiale mediante acqua fredda.

Max Bauer (2), *Ueber den Schwerspath von Perkin's Mill,* Templeton, Canadà. L'autore trovò sur un campione di baritina compatta cristallina dentro a una piccola geode alcuni cristallini pure di baritina, dei quali uno solo si presentava adatto a misure sufficienti per la determinazione delle forme cristallografiche. I piani di sfaldatura della massa baritica si estendevano senza interruzione nell'interno dei cristalli; ciò che proverebbe che questi e la massa baritica erano una sol cosa e rappresentavano una baritina primitiva. Della stessa

(1) C. Luedeking and H. A. Wheeler, *Notes on a Missouri Barite,* " Amer. Journ. of Science ,, 1891, 42, 495.

(2) Max Bauer, *Ueber den Schwerspath von Perkin's Mill,* " Neues Jahrbuch für Min. Geol. und Paläont. ,, 1891, Bd. I, pag. 250.

massa baritica A. Lacroix [1] ci dà i risultati dell'analisi chimica:

96,9 $BaSO_4$; 2,0 $SrSO_4$; 1,2 $CaSO_4$; Somma = 100,1.
Peso spec. = 4,39.

Ettore Artini [2], *Baritina di Vassera.* L'autore ebbe a disposizione buon materiale e potè far numerose e precise misure. I cristalli di Vassera hanno le faccie }001{ ondulate; }010{ ottime; }011{ costanti e buone; }102{ cattive; }111} buone. La baritina di Vassera dalla descrizione fatta dall'autore parrebbe essere di formazione primaria.

Con gli angoli (011 : 010) = 37°19'25"
(111 : 011) = 44°22'47"
calcolò $a : b : c = 0,8126 : 1 : 1,3116$.

A. Arzruni und K. Thaddéeff [3], *Cölestin von Giershagen.* Questo minerale, come isomorfo della baritina, presenta delle grandi analogie con la medesima.

Gli autori osservando la forma *m* {110} trovano deficienza di parallelismo. " Dies Verhalten lässt sich deutlich auf Häu- " fungen mehrerer Kristalle in nicht genau paralleler Stellung " zurückführen ". " Ueberall machte sich eine Häufung von " Theilkristallen zu scheinbar einheitlichen Gebilden bemerkbar ".

Le differenze dei valori angolari dei vari cristalli di uno stesso giacimento, di quelli sur uno stesso campione, anzi dei valori angolari medî di tutte le celestine note, si presentano non maggiori e talvolta più piccole delle differenze angolari che si riscontrano sur uno stesso cristallo.

" Für den Cölestin dürfte die Lösung der Frage in der " Erscheinung der nicht parallelen Lagerung der Kristallteilchen, " in der von M. Jeroféjew [4] mit dem Ausdruck " Häufung "

---

(1) A. Lacroix, " Compt. rend. ", 27 maggio 1889, t. cviii, pag. 1126.

(2) Ettore Artini, *Baritina di Vassera*, " Rivista di Panebianco ", XVI, 1896, pag. 10.

(3) A. Arzruni und K. Thaddéeff, *Cölestin von Giershagen*, " Groth's Ztschft ", 1896, Bd. 25, pag. 38.

(4) M. Jeroféjew, *Anomalien in den Grössen der Kristallwinkel und die Polyedrie der Flächen in Folge der Zusammenhäufung der Kristalle.* Testo russo, verso l'anno 1870. È riferito in " Groth's Ztschft ", 1896, Bd. 25, pag. 572.

" bezeichneten Erscheinung zu finden sein. Die Theile des
" Kristalls, richtiger Kristallaggregats, sind danach aus der
" parallelen Lage herausgedreht, um eine Axe (hier *c* und *b*) „.

Il piano degli assi ottici per la celestina è }010{. Sezioni normali alla prima o seconda mediana, cioè parallele a }100{ od a }001{, mostrano una ripetizione dell'imagine assiale nel piano degli assi medesimi; ciò che pure dimostra una rivoluzione delle parti del cristallo attorno all'asse di simmetria *b*.

" Auf die Schwankungen der geometrischen Constanten
" müssten unbedingt auch etwaige Beimengungen isomorpher
" Sulfate einen Einfluss üben; er ist indessen gegenüber
" demjenigen der Häufung jedenfalls verschwindend gering.
" Daher zeigen auch die geometrischen Constanten der nachge-
" wiesenermassen chemisch reinen Cölestine die wünschenswerte
" und zu erwartende Uebereinstimmung nicht „.

Osservando come le celestine chimicamente pure o poco inquinate vanno d'accordo nel valore dell'angolo degli assi ottici ed in quello del peso specifico, gli autori conchiudono che da tali valori, più che da quelli delle costanti geometriche soggette all'influenza della Häufung, si possono rilevare le possibili variazioni nella composizione chimica delle celestine.

Ho creduto bene di citare qui varî brani di questo interessante lavoro, che è fondamentale anche per la barite, e mi riservo di trattare ulteriormente questo argomento.

J. Beckenkamp [1], *Zwillingsbildung von Kristallmassen und von Molekülen. Baryt.*

La questione della Häufung per la barite venne studiata dall'autore, che trovò una legge di geminazione secondo la piramide (2.1.128), vicinale della base }001{ e secondo il brachidoma (0.300.1), vicinale del pinacoide laterale {010{.

" Sollen die erwähnten Zwillingsebenen Flächen mit ein-
" fachen Indices darstellen, so muss die Neigung (001):(100)
" des betreffenden einfachen Krystalles $90 \pm 1°25'$ sein, und
" die Neigung (001):(010) $= 90° \pm 18'$. Ein derartiger Kristall
" wäre aber als triklin zu bezeichnen, während im allgemeinen

(1) J. Beckenkamp, *Zwillingsbildung von Kristallmassen und von Molekülen. Baryt*, 1902, " Groth's Ztschft „, Bd. 36, pag. 466.

" die Beobachtungen am Baryt, vor allem die so empfindlichen " optischen Erscheinungen, für das rhombische System sprechen „.

L'autore dà gli angoli fondamentali ed il rapporto assiale della baritina:

$$\alpha = 90 \pm 18'; \ \beta = 90^\circ \pm 1^\circ 25'; \ \gamma = 90^\circ \pm 0';$$
$$a : b : c = 0{,}8146 : 1 : 1{,}3119.$$

Come si vede, la questione della Häufung e della struttura cristallografica della baritina non è ancora risolta. Anzi la baritina stessa dovrebbe venir ristudiata con un unico criterio e con molte osservazioni precise ed oggettive, fatte sui materiali delle diverse località tenendo conto del giacimento e dell'abito speciale dei cristalli, cercando di rintracciare quei tipi limpidi e chimicamente puri, nello stesso tempo meno affetti da irregolarità di forme, e liberi dai soliti raggruppamenti ipoparalleli, ecc. ecc. Su questi tipi si potranno allora forse con vantaggio basare ulteriori studî e confronti.

J. K. Samoiloff [1], *Beiträge zur Krystallographie des Baryts.*

Cito con piccole modificazioni formali od aggiunte alcuni dati che ci possono interessare:

$$\begin{array}{lll} \text{tg}\,(001:011) & = \text{asse } c & \\ \text{„}\quad 52^\circ 41' & = 1{,}3119 & \\ & & \} \ 0{,}0008 \\ \text{„}\quad 52^\circ 42' & = 1{,}3127 & \\ & & \} \ 0{,}0008 \\ \text{„}\quad 52^\circ 43' & = 1{,}3135 & \end{array}$$

$$\frac{60''}{8} = 7{,}5''$$

Per una differenza di un'unità nella quarta decimale del valore assiale c si ha una variazione di $7{,}5''$ per $\measuredangle\,(001:011)$ ovvero di $15''$ per $\measuredangle\,(011:0\bar{1}1)$.

$$\begin{array}{lll} \text{tg}\,(100:110) & = \text{asse } a & \\ \text{„}\quad 39^\circ\ 8' & = 0{,}8136 & \\ & & \} \ 0{,}0005 \\ \text{„}\quad 39^\circ\ 9' & = 0{,}8141 & \\ & & \} \ 0{,}0005 \\ \text{„}\quad 39^\circ 10' & = 0{,}8146 & \end{array}$$

$$\frac{60''}{5} = 12''$$

La differenza di 0,0001 nel valore dell'asse a cagiona una variazione di $12''$ per $\measuredangle\,(100:110)$ ovvero $24''$ per $\measuredangle\,(110:1\bar{1}0)$.

L'autore conchiude a ragione, che nelle indicazioni dei rapporti assiali della baritina la quarta decimale è più che sufficiente ed ha valore in caso di buon materiale e di buone medie.

---

[1] J. K. Samoiloff, *Beiträge zur Krystallographie des Baryts,* " Bull. de la Soc. Imp. des Naturalistes de Moscou „, N. S., 1902, tome XVI.

In una tabella ci presenta poi i rapporti assiali medî, ottenuti dai varî autori di studî cristallografici sulle diverse baritine, e, osservando i valori massimi e minimi, trova che le relative differenze negli angoli non sono considerevoli:

$a = 0{,}8119$ a cui corrisponde $\measuredangle\,(100:110) = 39^\circ 4'$ ovvero $\measuredangle\,(1\bar{1}0:110) = 78^\circ\ 8'$
$a = 0{,}8177$ „ „ $\measuredangle\,(100:110) = 39^\circ 16'$ ovvero $\measuredangle\,(1\bar{1}0:110) = 78^\circ 32'$

$c = 1{,}3055$ „ „ $\measuredangle\,(001:011) = 52^\circ 33'$
$c = 1{,}3158$ „ „ $\measuredangle\,(001:011) = 52^\circ 46'$

Dal lavoro di Sansoni [1], *Baritina di Vernasca*, cita i risultati di alcune precise misure fatte sugli angoli fondamentali seguenti e su materiale dello stesso giacimento:

$\measuredangle\,(100:110) = 39^\circ\ 3'\ 30'' - 39^\circ 11' 50''$ (diff. $0^\circ 8' 20''$)
$\measuredangle\,(001:011) = 52^\circ 35'\ 55'' - 52^\circ 43' 10''$ („ $0^\circ 7' 15''$)

Qui inserisco i valori massimi e minimi degli assi della baritina di Levico ottenuti da G. B. Negri con misure molto accurate, per i quali io calcolo i valori angolari analogamente a sopra:

$a = 0{,}8130$ a cui corrisponde $\measuredangle\,(100:110) = 39^\circ 7'$ ovvero $\measuredangle\,(1\bar{1}0:110) = 78^\circ 14'$
$a = 0{,}8156$ „ „ $\measuredangle\,(100:110) = 39^\circ 12'$ ovvero $\measuredangle\,(1\bar{1}0:110) = 78^\circ 24'$

$c = 1{,}3108$ „ „ $\measuredangle\,(001:011) = 52^\circ 40'$
$c = 1{,}3141$ „ „ $\measuredangle\,(001:011) = 52^\circ 44'$

Basandosi sui valori di Sansoni e paragonandoli coi vari altri, Samoiloff trova che le differenze tra i valori dei rapporti assiali che si ottengono sui singoli cristalli di baritina d'una stessa località non si scostano molto da quelle che si riscontrano fra i varî rapporti assiali medî caratteristici per le ba-

---

(1) Sansoni, *Baritina di Vernasca*, " Groth's Ztschft „, 1886, Bd. XI, pag. 355.

ritine delle più disparate località. Qui faccio solo osservare che, basandosi sui valori di G. B. Negri, la cosa cambia alquanto d'aspetto, le differenze avute da Negri sono molto minori:

Le differenze in minuti scendono per l'asse a da 12′ a 8′ (Sansoni), a 5′ (Negri), e per l'asse c da 13′ a 7′ (Sansoni), a 4′ (Negri).

Così pure faccio notare che la scelta del materiale, l'eliminazione dei cristalli talora aventi forme nitidissime, ma raggruppati in un sol individuo in maniera apparentemente occulta, costituisce una delle più importanti operazioni per la determinazione delle costanti cristallografiche, senza parlare che della composizione chimica e della limpidezza del materiale in caso di simili paragoni va pure tenuto il debito conto.

Nei loro giacimenti le baritine originarono da soluzioni madri, che dovettero avere e composizioni chimiche e condizioni fisiche le più differenti; perciò l'autore conchiude (cito alla lettera):

" Die chemischen Eigenschaften der Lösungen, aus denen " die Barytkristalle sich ausscheideten, übten keinen Einfluss " auf die Beziehung der Kristallaxen aus. Aus den Lösungen, " in denen sich verschiedene Beimischungen vorfanden, scheidete " sich vollständig reiner Baryt aus. Diese Erscheinung findet " ihre Erklärung in der sehr geringen Löslichkeit des schwe- " felsauren Baryums. Zur Zeit als die Lösung für $BaSO_4$ bereits " übersättigt war, waren andere mehr oder weniger nahe zum " Baryt stehende Salze, die die chemische Zusammensetzung der " Kristalle beeinflussen konnten, noch sehr weit von dem Zustand " der Uebersättigung „.

" Mit der Abwesenheit der Zwillinge in Barytkrystalle " steht im Zusammenhange die äusserst hoch entwickelte Eigen- " schaft derselben zu parallelen Zusammenwachsungen einzelner " Individuen „.

L'autore non ammette l'emimorfismo nella baritina e sostiene con varie prove che i cristalli di baritina hanno struttura oloedrico-rombica.

M. A. de Schulten [1], *Reproduction artificielle par voie humide de la barytine.*

---

[1] M. A. de Schulten, *Reproduction artificielle par voie humide de la barytine,* " Bull. Soc. Franç. de Min. „, 1903, T. 26, pag. 103.

L'autore tenendo a ca. 100° una soluzione acquosa diluita di cloruro di bario con acido cloridrico libero e facendovi cadere a goccie per un mese acido solforico pure molto diluito, ottenne dei cristalli di baritina assai piccoli, ma ricchi di faccie. L'autore dà misure goniometriche, che gli servirono per l'identificazione delle faccie: misure più esatte per la determinazione delle costanti assiali, ecc. ecc., non sono, a parer suo [1], possibili con materiale sì piccolo.

W. T. Schaller [2], *Baryt von Maryland*. Formazione secondaria recente con siderite in cristalli incolori prismatici secondo l'asse *c*. Talora grossi cristalli lunghi 1 cm. con uno spessore da 1-2 mm. Nessun cenno intorno alla composizione chimica. La determinazione delle costanti cristallografiche venne fatta mediante i valori angolari delle piramidi e dei domi; con 44 valori per *a* e 70 per *c* l'autore ottiene il seguente rapporto:

$$a : b : c = 0{,}8146 : 1 : 1{,}3126 \text{ (Schaller)}$$
$$„ \; „ \; „ = 0{,}8142 : 1 : 1{,}3125 \text{ (Lincio)}$$

Questa baritina recente s'accorda nelle costanti pienamente con la baritina recente del Cungiaus.

C. Viola [3], *Baritina di Boccheggiano in provincia di Grosseto*. Presenta la combinazione: $\{010\}$, $\{001\}$, $\{110\}$, $\{115\}$. L'angolo $(110 : 1\bar{1}0)$, determinato su 10 individui e controllato con quello tra le faccie di sfaldatura pure secondo $\{110\}$, oscilla tra 79°16′ e 79°2′: la media più probabile è 79°5′38″.

" Si noti di più che secondo Samoiloff l'incertezza di questo angolo per la baritina pura è piccola, e sta cioè fra 78°8′46″ e 78°35′4″. Si deve dunque concludere che la baritina di Boccheggiano non è assolutamente pura. Essa ha dato infatti notevoli traccie di calcio „.

Un caso analogo trovai nella baritina del Cungiaus: su di un unico cristallo di 3 mm. di lunghezza, prismatico secondo *b*,

(1) Id., Notizia avuta per lettera. Paris, le 15 Février 1909.

(2) W. T. Schaller, *Baryt von Maryland*, " Groth's Ztschft „, 1906, Bd. 42, pag. 325.

(3) C. Viola, *Baritina di Boccheggiano in provincia di Grosseto*, " Atti R. Accad. Lincei „, 1908, vol. XVII, F. 8, pag. 496.

che presentava le forme *c*, *d*, *o*, *m*, misurai con buonissime imagini:

$$\measuredangle\ m : m''' = 78°52'$$
$$(110) : (1\bar{1}0)$$
$$(\text{Dana})\quad " \quad " = 78°22'$$

e $\measuredangle\ o : o' = 104°02'$ ovvero $\measuredangle\ (001) : 011) = 52°01'$
$(011) : (0\bar{1}1)$
(Dana) „ „ $= 105°26'$ „ „ „ „ $= 52°43'$

Provandomi a sfaldare il cristallo secondo *m* per far misure di confronto, esso finì collo sbriciolarsi tutto, lasciandomi così a mezza via.

" Come è noto, l'associazione parallela della baritina è un fenomeno molto frequente. Nel campione di Boccheggiano non esistono due, tre, quattro o più individui che non siano in associazione parallela fra loro. Ma quello che è più interessante si è che oltre l'associazione parallela si manifesta anche un'associazione perpendicolare, sicchè i numerosi cristallini costituiscono una specie di cassettoni „.

Tanto il parallelismo che il perpendicolarismo sono puramente approssimati.

L'autore presenta il disegno d'un gruppo di 4 individui in doppia associazione parallela e perpendicolare.

H. Baumhauer und C. O. Trechmann (1), *Neuere Beobachtungen am Baryt des Binnentales.* Da quanto si può rilevare nel testo la baritina della Binnental sarebbe di formazione primaria. In questo lavoro ci interessa il tipo cristallino III, domatico secondo l'asse *a*. " Die Kristalle sind aufgebaut aus meistens " sehr vielen hypoparallelen Subindividuen, welche nur an dem " freien Ende einer solchen Gruppe in ein einheitlich gebildetes " Individuum auslaufen „.

Caratteristico per i cristalli tipo III (*F*) si è, che essi sono letteralmente gremiti di livelle. Tra i valori angolari dati dagli autori scelgo i seguenti adatti al calcolo delle costanti geometriche:

---

(1) H. Baumhauer und C. O. Trechmann, *Neuere Beobachtungen am Baryt des Binnentales,* " Groth's Ztschft „, 1908, Bd. 44, Heft VI, pag. 607.

			$a : b : c$
Cristallo F	$(01\bar{1}) : (011) = 74°37' \, ^1/_2$		0,8128 : 1 : 1,3121
	$(011) : (111) = 44°21' \, ^1/_4$, 24'		
Cristallo H	$(100) : (111) = 45°38'$		0,8123 : 1 : 1,3084
	$(100) : (101) = 31°50'$		
Cristallo J	$(011) : (0\bar{1}1) = 105°21'$		0,8135 : 1 : 1,3115
	$(011) : (111) = 44°21'$		

Dando ai rapporti assiali ottenuti con F, J, H, rispettivamente un peso di 1,5; 2; 2 nel formar la media, si ottiene: $a : b : c = 0{,}8129 : 1 : 1{,}3105$.

Dei cristalli tipo (F) venne fatta analisi:

Perdita al calor rosso	=	1,324
Perdita al trattamento col carbonato ammonico	=	0,993
$BaSO_4$ calcolato dal $BaCrO_4$	=	98,150
		100,467

Gli autori trovarono che lo stronzio era totalmente assente; così pure Grünling, come vedemmo.

L. Colomba [1], *Baritina di Traversella e di Brosso.* Allo studio cristallografico del 1906 aggiunse uno studio chimico (1909), dal quale risulta che la baritina analizzata è chimicamente pura e le inclusioni che essa presenta sono costituite da acido cloridrico e solforico liberi e da cloruro e solfato sodico, i quali due ultimi vennero estratti con acqua.

Dopo aver data questa corsa alla letteratura ed aver fissati qui i punti che più ci interessano, vediamo di riassumere e coordinare quanto v'è di positivo per stabilire fin dove giungano le nostre cognizioni intorno alla baritina.

Chimicamente della baritina conosciamo ben poco. Sappiamo che esiste il tipo ideale puro, del quale abbiamo alcune analisi e sintesi. Così, a mo' d'esempio, le baritine incolori, cristallizzate, tabulari, di formazione recente di Neuglück, Schapbach e Wolfach all'analisi si presentarono chimicamente pure, come vedemmo presso Sandberger. Così pure la baritina cristallizzata

(1) L. Colomba, *Baritina di Traversella e di Brosso*, " Rendiconti della R. Accad. dei Lincei ", a. 1906 e 1909.

della Binnental, studiata prima da Grünling e poi da Baumhauer-Trechmann, quella di Dobogò analizzata da F. Koch, quelle di Brosso e Traversella analizzate da Colomba, ecc. ecc. Infine delle baritine sintetiche, cito solo quella di De Schulten, il quale col suo metodo imitò forse davvicino il modo naturale di formazione della baritina di varî giacimenti.

Abbiamo poi varie analisi delle baritine bianche o colorate sia spatiche che cristallizzate; ma qui il loro valore è in generale molto discutibile. Prima di tutto io direi che una cieca analisi quantitativa di un pezzo di baritina bianca non ha valore alcuno.

Il colore bianco della baritina essendo causato da inclusioni solide e da livelle, ne segue che un'analisi in simil caso va fatta con criterio differente da quello usuale ed essa senza il sussidio d'uno studio microscopico non può approdare a nulla.

Orbene Luedeking e Wheeler nella baritina zonata di Missouri, in cui strati incolori s'alternavano a gialli e bianchi, studiarono al microscopio le livelle, trattarono il materiale polverizzato con acqua e n'estrassero il solfato d'ammonio, riscaldando eliminarono l'acqua e così oltre all'analisi poterono formarsi un'idea delle sostanze eterogenee disseminate nei cristalli. Colomba nella baritina di Brosso e Traversella, analogamente con esperienze e analisi combinate, trovò che la baritina è chimicamente pura, essendo le sostanze inquinanti allo stato di inclusioni; e studiando poi quest'ultime, costituite da HCl e H_2SO_4 liberi, da NaCl e Na_2SO_4, ne indusse che la genesi della baritina in questo caso parrebbe accostarsi al metodo sintetico di De Schulten.

Ad ogni modo, ben lontano dal volermi erigere a giudice delle analisi esistenti, delle quali anche per lo più non venne indicato il metodo, io vorrei ancora far accenno ad alcuni costanti errori che nelle analisi stesse si rinvengono. È ormai assodato che i tre solfati di stronzio, bario e piombo sono da considerarsi come isomorfi. L'anidrite non viene ammessa a far parte di questo gruppo; è bensì stata ventilata l'idea gratuita d'un'altra modificazione di $CaSO_4$ che sarebbe isomorfo con la baritina, ma qui non è il caso di parlarne. Orbene nelle analisi citate noi troviamo quasi costantemente traccie di calcio, che talora giunge all'1 fino al 3 $^0/_0$. Ora io mi domando: è proprio

certo che in questi casi il calcio sia entrato come solfato e non come carbonato a far parte del materiale d'analisi? All'acido carbonico non s'è pensato.

Arzruni (l. c.) accenna pure a tale possibilità.

Mettere in calcolo la perdita al calor rosso (il Glühverlust) è pure cosa molto spiccia; però, se col calor rosso si eliminano le traccie di gas, d'acqua, di acidi o di liquido in generale, le parti eterogenee solide vi rimangono e non possono venir estratte che con acqua e reagenti adatti, ed inoltre se si va troppo in là col calore stesso il solfato di bario comincia a dissociarsi, con sensibile perdita diretta di SO_3 e poi del corrispondente BaO come carbonato, allorchè a scopo di separazione del $BaSO_4$ dallo Sr e Ca la baritina viene trattata con carbonato d'ammonio.

La separazione del Ba da traccie di Sr e Ca e in generale la separazione dei tre elementi è un'operazione chimica che richiede grande attenzione ed esattezza; oltre che i lavori citati di Cathrein (1889), Arzruni-Thaddéjeff (1896) vedi anche quello di P. v. Sustschinsky [1].

Osservando poi che delle molte baritine cristallizzate incolori e trasparenti, che vennero trovate e descritte, non si hanno che pochissime analisi, io non posso senza prova ammettere, come fa Samoiloff, che la baritina debba senz'altro cristallizzare sempre pura. Intanto la baritina zonata di Missouri nella parte bianca cristallizzata diede, insieme ad altro, 10,9 % di $SrSO_4$; in altre baritine si hanno pure traccie o qualche percento di $SrSO_4$; resta quindi a provare, se la celestina si trovi sì o no in miscela isomorfa con la baritina, fino a qual percentuale, e con quali modificazioni per i caratteri cristallografici ed ottici della baritina stessa, ecc.

Possedendo del materiale cristallizzato incoloro e limpido, che non sia troppo minuto, si può rapidamente constatare, se vi sieno notevoli quantità di eventuali composti isomorfi. Del calcio come carbonato non parlo affatto. Se si prende a tale scopo un prisma di sfaldatura di baritina e lo si tratta con carbonato d'ammonio, in caso di presenza, p. es., di $SrSO_4$,

---

(1) P. v. Sustschinsky, *Cölestin*, " Groth's Ztschft ", Bd. 34, pag. 567.

questo per la sua solubilità lascierà sui piani di sfaldatura traccie di corrosione, anzi con tale prova si potrà stabilire in qual maniera i composti isomorfi sieno disposti l'un rispetto all'altro nell'edificio del cristallo, se cioè uniformemente o in forma irregolare, ramificata o zonata, ecc.

Ritornando sul lavoro di Arzruni e Thaddéeff faccio notare come per la baritina abbia in generale valore quanto per la celestina venne affermato. La presenza di solfati isomorfi deve esser causa di sensibili oscillazioni nei valori delle costanti geometriche della baritina; però il fenomeno della “ Häufung „ (raggruppamento ipoparallelo) ne è pure di gran lunga la causa principale coi massimi effetti. Intanto io faccio solo notare la differenza che si riscontra tra le costanti geometriche delle baritine recenti, quasi sempre incolori e pure, e quelle delle baritine antiche, bianche ed inquinate, differenza che, se risulterà anche da maggior numero d'osservazioni, avrà un certo valore e servirà quale criterio per la determinazione del campo delle oscillazioni delle costanti della baritina pura e normalmente cristallizzata. Tale campo io credo diverrà molto più ristretto anche pel fatto della gran semplicità del composto chimico della baritina.

Avendo la baritina lo stesso orientamento ottico della celestina, le considerazioni rispetto alla ripetizione dell'imagine assiale (vedi Arzruni-Taddejeff) hanno qui anche il loro valore.

L'importanza del peso specifico e del valore dell'angolo degli assi ottici, ambedue indipendenti dalla “ Häufung „, va riconosciuta anche per la baritina appieno.

Le figure 6 e 9 della tavola rappresentano le forme della baritina del Cungiaus. Fig. N° 6 è la proiezione stereografica delle forme sulla faccia $b = (010)$; Fig. N° 8 la proiezione stereografica usuale su c (001); Fig. N° 7 è la proiezione verticale di un cristallo pure su b (010); e Fig. N° 9 disegno di un cristallo completo.

Inoltre le fotografie dei cristalli, fatte sulla faccia c (001) all'incirca, sono destinate a dimostrare il fenomeno della Häufung (raggruppamento ipoparallelo) e le finissime striature che si presentano sulla base secondo lo spigolo delle faccie $c : m$ e secondo quello delle faccie $b : c$.

Le tavolette cristallizzate della baritina qui fotografate sono della grossezza di 2-3 mm.

I raggruppamenti ipoparalleli di 3 individui sono i più comuni al Cungiaus e sono per sè frequentissimi. Essi sono illustrati dalle fotografie N^{i} 1-5, ove si vedono distintamente le linee di sutura parallele al prisma (110). Per lo più si scorgono anche gli angoli rientranti, che talora scompaiono del tutto (vedi Fot. 3 e 4). I subindividui si raggruppano con base apparentemente unica. Essa è invece leggermente poliedrica ed i valori angolari ρ della zona $m:b$ si scostano corrispondentemente dal valore teorico di 90° fino all'importo di 30′.

Distinguendo secondo Wulff [1] l'accrescimento in direzione della normale d'una faccia d'un cristallo dall'allargamento secondo la tangente della faccia stessa, diremo che qui la base, come si può desumere dall'abito tabulare dei cristalli di baritina del Cungiaus, possedendo la minor velocità d'accrescimento ebbe invece la maggior velocità d'allargamento. Così pure il fatto delle strie secondo $c:m$, che disegnano sulla base c un parallelogramma, il cui angolo acuto è smussato da altre secondo $c:b$ e l'ottuso invece non presenta smussatura alcuna, (vedi Fot. 3, 4, 5), va perfettamente d'accordo con l'abito dei cristalli del Cungiaus, che presentano costantemente il pinacoide laterale $b\,\}010\{$ e non mai quello frontale $a\,\}100\{$.

Quando le condizioni chimiche e fisiche della soluzione madre lo permisero, l'accrescimento originario e consecutivo secondo le faccie c, m, b si modificò per l'aggiunta del brachi doma $o = \}011\{$, del macrodoma $d = \}102\{$ e della piramide $z = (111)$, ed allora il cristallo rimase delimitato e raggiunse la sua perfezione.

---

[1] G. Wulff, " Groth's Ztschft ", Bd. 34, pag. 449. Il lavoro originale in lingua russa data dal 1895.

Il supposto Porfido rosso della Rocca dell'Abisso (Alpi Marittime).

Nota di ALESSANDRO ROCCATI.

(Con una Tavola).

La Rocca o Cima dell'Abisso (1) si innalza a 2755 metri tra i colli di Tenda e del Sabbione, segnando, per quanto non formata, come vedremo, totalmente da gneiss, l'estremo limite orientale della formazione cristallina costituente l'elissoide gneissico, che si estende dall' alta valle della Stura di Cuneo sin presso Tenda e che è conosciuto col nome di massiccio dell'Argentera.

Dai versanti della Rocca dell'Abisso le acque scendono nelle valli della Vermenagna, della Roia e del Sabbione ed appunto per queste diverse valli si può raggiungere la vetta, il cui accesso più facile si ha però da Limone Piemonte (in Val Vermenagna) per Limonetto ed il vallone dell'Abisso.

Siccome già indicai in un altro lavoro (2), la Rocca dell'Abisso è costituita essenzialmente nella sua parte terminale da *anagenite*: il *gneiss* ne forma però la parte inferiore, ove costituisce una fascia quasi ininterrotta. Perciò, salendo il monte specialmente per il versante occidentale dalla Valle del Sabbione, soltanto nell'ultimo tratto, rappresentante la piramide terminale, scompare il gneiss per far posto all'anagenite.

Che la Rocca dell' Abisso sia costituita da roccia clastica

(1) Presso gli autori più antichi di Geologia e di Montanistica la montagna viene anche indicata con il nome di *Rocca della Biscia*; questo è appunto il nome adoperato dal Pareto nei suoi lavori che avrò occasione di indicare in seguito. Nelle opere più recenti il nome è però esclusivamente quello di *Rocca dell'Abisso*; questa diversità di nome può trovare la sua spiegazione nel vocabolo dialettale con cui è indicato il monte nella regione.

(2) *Ricerche petrografiche nelle Valli del Gesso (Valle del Sabbione)*, " Atti R. Acc. d. Sc. di Torino ", XXXVIII, 1903.

già vediamo indicato dal Pareto (1) che la dice appunto formata da roccie arenacee, ed è questa pure la costituzione che ne dànno gli autori che si occuparono della Geologia della regione, come Zaccagna (2), Franchi (3), Viglino (4), Sacco (5), ecc. Qualche autore, come per esempio l'Issel (6), ingannato certamente dalle roccie che affiorano a poca distanza della vetta, indica l'Abisso come tutto costituito da gneiss e tale costituzione vediamo pure segnata nelle carte geologiche di Issel e Squinabol e di Issel, Mazzuoli e Zaccagna.

Ora nella costituzione litologica della Rocca dell'Abisso venne pure generalmente menzionata la presenza di un *porfido rosso* che vi avrebbe notevole sviluppo; si è appunto di questa roccia che intendo far oggetto della presente nota per mettere in evidenza che non esiste il porfido nella regione, ma che la roccia supposta tale appartiene alla formazione di arenarie ed anageniti che, con enorme sviluppo, rappresenta il permiano superiore o il trias inferiore in quella zona delle Alpi Marittime.

Dell'esistenza di un porfido all' Abisso già fin dal 1833 il Pareto (7) faceva cenno e dopo l'illustre geologo genovese la stessa indicazione ritroviamo presso parecchi autori; così, fra altri Zaccagna (8) dice che all'Abisso vi sono masse di porfido rosso quarzifero che viene ad interporsi agli schiti; l'Issel (9) scrive che presso il Colle di Tenda sulla destra della Roia si

---

(1) L. Pareto, *Cenni geologici sulla Liguria marittima.* Genova, Ferrando, 1846.

(2) L. Zaccagna, *Sulla costituzione geologica delle Alpi Marittime,* " Boll. Com. Geol. It. ", XV, 1884.

(3) S. Franchi, *Relazione sui principali risultati del rilevamento geologico nelle Alpi Marittime, eseguito nelle campagne 1891-92-93,* " Boll. Com. Geol. It. ", XXV, 1894.

(4) A. Viglino, *Escursioni e studi preliminari sulle Alpi Marittime,* " Boll. C. A. I. ", 63, 1897.

(5) F. Sacco, *I Monti di Cuneo tra il Gruppo della Besimauda e quello dell'Argentera,* " Atti R. Acc. d. Sc. di Torino ", XLII, 1907.

(6) A. Issel, *Liguria geologica e preistorica.* Genova, Donath, 1892.

(7) L. Pareto, *Note sur les Alpes de la Ligurie dans le voisinage du Col de Tende,* " B. S. G. F. ", 1ª s., III, 1833.

(8) Loc. cit.

(9) Loc. cit.

mostra il porfido con notevole sviluppo tra lo gneiss della Rocca dell'Abisso ed il calcare triasico; il Mader (1) ne fa pure menzione, ecc.

Il Franchi invece nell'importante suo lavoro già citato (*Relazione sui principali risultati*, ecc.), parlando della carta geologica all'1 : 1.000.000 dice che " sono indicate delle colate di porfido nel permiano nella valle del Tanaro ed al Monte Giaura presso il Colle di Tenda. Quelli di Val del Tanaro sono porfidi quarziferi con anfibolo, ma la colata indicata presso il Colle di Tenda non esiste. Vi sono, quantunque poco estese delle quarziti con elementi porfirici (tufi porfirici?) che di porfido hanno solo l'aspetto. Però porfidi veri debbono esistere nella potente massa del permiano delle falde dell'Abisso, verso il vallone di Limonetto; io non li potei rinvenire che in blocchi erratici ".

Successivamente Franchi e Baldacci (2) occupandosi della Galleria del Colle di Tenda, descrivendo minutamente la geologia della regione, non accennano al porfido e neppure lo indicano nella carta annessa alla loro relazione.

Il Sacco nel suo studio geologico sull'Appennino Settentrionale e Centrale (3), dice che nel gruppo dell'Abisso vi sono affioramenti di roccie porfiriche che accompagnano le anageniti; in seguito però, nel suo lavoro posteriore già citato, *I Monti di Cuneo*, ecc., egli avendo percorsa e studiata minutamente la regione, si convinse della non esistenza del porfido. Questo risulta dal testo della sua nota e più chiaramente dalla cartina geologica che la accompagna: di questa sua convinzione ebbi occasione di intrattenermi in conversazioni private che mi decisero appunto allo studio odierno. Poichè anch'io percorrendo le valli del Gesso e vedendo i frequenti blocchi della roccia dell'Abisso, non dubitai dapprima della natura porfirica e solo in seguito con osservazioni in posto, studio petrografico della roccia e suo confronto con i molteplici tipi di arenarie e anageniti

---

(1) F. Mader, *Die höchsten Teile der Seealpen und der ligurischen Alpen*, G. Fock, Leipzig, 1897.

(2) L. Baldacci e S. Franchi, *Studio geologico della Galleria del Colle di Tenda (Linea Cuneo-Ventimiglia)*, " Boll. Com. Geol. It. ", 1900.

(3) F. Sacco, *L'Appennino settentrionale e centrale*, Studio geologico. Torino, Gerbone, 1904.

della formazione permo-triasica mi fu reso evidente non trattarsi di porfido, per quanto l'aspetto sovente possa indurre in errore! L'opinione dei geologi di un affioramento porfirico alla Rocca dell'Abisso ebbe influenza sulle diverse carte geologiche che comprendono questa zona delle Alpi Marittime e così il porfido è segnato nelle seguenti:

Carta geologica d'Italia all' 1 : 1.000.000, pubblicata per cura dell'Ufficio Geologico nel 1899 e compilata in base ai rilevamenti eseguiti dagli ingegneri del Corpo Reale delle Miniere.

A. Issel, L. Mazzuoli e D. Zaccagna. - Carta geologica delle riviere ligure e delle Alpi marittime all'1 : 200.000 - Pubblicazione fatta per cura del C. A. I. (Sezione Ligure). Genova 1887.

A. Issel e S. Squinabol, - Carta geologica della Liguria e dei territori confinanti all'1 : 200.000 - Genova Donath, 1890.

Viceversa il porfido non è segnato nella carta che accompagna il lavoro già citato di Baldacci e Franchi (*Studio geologico della Galleria del Colle di Tenda*, ecc.) e non comparisce più nella recente carta delle Alpi Occidentali pubblicata dall'Ufficio Geologico (1).

Il Sacco poi nella cartina che accompagna (2) il suo lavoro sopra citato " *I Monti di Cuneo*, ecc. ", escludendo il porfido, segna con molta precisione il limite fra anageniti e gneiss.

La tettonica della regione dell'Abisso è ben regolare, avendosi le anageniti, che rappresentano il Parmiano superiore od il Trias inferiore, poggianti sopra gli gneiss per formare una zona che dovette esser continua, ma che è ora più o meno interrotta, come naturale conseguenza dei fenomeni erosivi.

L'insieme poi della formazione con gneiss ed anageniti è fortemente sollevata in corrispondenza della Rocca dell'Abisso, il che spiega appunto perchè sia l'anagenite che viene a formare la sommità del monte, i cui sottostanti versanti sono di gneiss.

Ora la roccia rossa, supposto porfido, sta precisamente tra

---

(1) Carta geologica delle Alpi Occidentali dedotta dai rilevamenti eseguiti dagli Ingegneri del R. Corpo delle Miniere all' 1 : 400.000. Roma, De Agostini, 1908.

(2) *I Monti di Cuneo*. Carta geologica alla scala di 1 : 100.000. Torino, Soc. It. Ind. Grafiche, 1906.

il gneiss e l'anagenite, con distacco nettissimo dal primo, mentre vi sono numerosi e graduali passaggi, sia per struttura, che per colore, con l'anagenite soprastante (Vedi tavola, fig. 3 e 4). Sul versante occidentale, cioè verso la Valle del Sabbione, l'affioramento del presunto porfido, è ridotto a minime proporzioni, ma sugli altri versanti, specialmente in direzione del Colle di Tenda e della regione di Peirafica la roccia ha uno sviluppo molto notevole ed è appunto in quella direzione che è più agevole studiarla e seguirne le relazioni ed i passaggi con le roccie a tipo frammentario, alle quali va appunto collegata.

Notiamo poi che la roccia deve in origine aver avuto uno sviluppo ed una potenza molto maggiori che non attualmente; di questo ci fanno fede i frequenti massi e ciottoli che s'incontrano nelle alluvioni, anche antiche, del Gesso di Cuneo, della Vermenagna e del Gesso di Valdieri, e quelli talora veramente enormi delle formazioni moreniche antiche di Entraque e della regione del Sabbione, ove l'affioramento è ora ridotto a piccole proporzioni in confronto degli affioramenti verso la Roia e la Vermenagna.

Come già il Franchi (loc. cit.) risalendo da Limonetto vidi blocchi erratici della roccia con aspetto di porfido (che io ho potuto ritrovare in posto) e che mi pare sieno una modificazione della roccia della Rocca dell'Abisso; per cui credo poter conchiudere che porfido non esiste affatto nella regione.

Percorrendo ripetutamente lo scorso estate, per un lavoro che ho in preparazione, l' ampia zona ove sono potentemente sviluppate le formazioni schistose arenacee della regione della Vallauria e del Monte Bego, potei constatare come in parecchi punti si hanno affioramenti di roccia simile a quella della Rocca dell'Abisso sia per struttura che per colore e composizione, generalmente però con un tipo reso schistoso da forte laminazione, fenomeno che del resto vedremo pure verificarsi in certe varietà dello pseudo-porfido.

Tali affioramenti si possono ad esempio osservare presso i Laghi Lunghi e nelle vicinanze del Lago dell' Olio nell' Alta valle dell'Inferno ; la stessa roccia, con struttura compatta, si ritrova al Passo e Monte del Trem, quando dal bacino dei Laghi Lunghi si voglia scendere in val Gordolasca; quivi, come all'Abisso, la roccia sembra esser posta nel contatto tra il gneiss

e l'anagenite. Noterò infine, come già rilevarono il Pareto (1), il Viglino (2) ed altri, che si trovano, sebbene non frequentemente, frammenti e ciottoli di roccia si può dire identica a quella dell'Abisso, nelle anageniti della regione di Vallauria, Monte Bego, Inferno, Laghi Lunghi, Valmasca, Casterino, ecc.

Passando ora alla descrizione litologica della Roccia dell'Abisso, quello che importa anzitutto rilevare è il caratteristico colore, della cui origine ci occuperemo in seguito; tale colore è il rosso-violaceo più o meno intenso da punto a punto, per cui da una tinta omogenea bruno-violetta cupa si passa al rosso violaceo scuro, al rosso violaceo chiaro, avendosi anche termini della roccia con tinta che dal rossastro sfuma nel verde chiaro, non esistendo più allora differenza sostanziale fra la roccia in esame e certe varietà di anagenite minuta. Notiamo che d'altronde tale colorazione non è esclusiva allo pseudo-porfido, ma che la si ritrova perfettamente identica in molteplici schisti ed anageniti, sia minute che macroscopiche, della regione del Monte Bego.

In quanto alla struttura si hanno essenzialmente due tipi; l'uno compatto, l'altro reso più o meno schistoso da fenomeni di laminazione.

Il tipo compatto è il più abbondantemente sviluppato e costituisce una roccia durissima, con struttura finamente granulosa, talora quasi afanitica, senza accenno a schistosità, per quanto in certi casi si abbia una tendenza marcata a dividersi in lastre parallele alla direzione di stratificazione. La roccia di questo tipo non ha sempre l'aspetto porfirico (Fig. 1) mancando i granuli macroscopici disseminati nella massa, ma ricorda essenzialmente, tranne per il colore (per quanto, ripeto, la tinta rosso-violacea sia frequente, specialmente in alcuni schisti della regione), certe arenarie o anageniti minute dalla grana finissima che si incontrano nella formazione anagenitico-schistosa del bacino del Monte Bego. In questa varietà già si possono osservare, sporadicamente disseminati nella massa, granuli di *quarzo* ialino, di *feldspato* biancastro insieme ad abbondanti ed esilis-

---

(1) L. Pareto, *Descrizione di Genova e del Genovesato.* Genova, Ferrando, 1846.

(2) A. Viglino, loc. cit.

sime laminette di *muscovite*, incolore o leggermente giallognole, con viva lucentezza perlacea.

Da questo tipo si passa insensibilmente a quello di roccia apparentemente porfirica, ampiamente diffusa, e ciò per l'aumento in quantità e grossezza dei granuli, che non oltrepassano però che di rado la grossezza di un pisello (ed ancora queste dimensioni sono eccezionali), mentre la massa fondamentale si mantiene uniformemente a grana finissima, talora quasi afanitica (Fig. 3). Questo tipo di roccia, localmente alquanto analogo a certe arenarie o anageniti a grana media, passa però ad una roccia che in molti punti ha un aspetto porfirico tale da assumere una *facies* di roccia eruttiva, che può perfettamente trarre in errore, specialmente quando si osservino campioni isolati.

La pseudo struttura porfirica è data più che dal quarzo, da abbondanti frammenti di *feldspato*, che spiccano per il loro colore bianco-latteo contrastante con il fondo violaceo della massa. Esaminando però attentamente con la lente la forma dei granuli si rivela la natura frammentaria della roccia, poichè vicino a grani che hanno una certa regolarità di forma, quasi cristalli interi, altri se ne scorgono affatto irregolari, brecciati o con indubbie traccie di arrotondamento in seguito a fluitazione. Di più oltre ai granuli di feldspato e di quarzo ialino, altri sono di quarzo granulare, roseo o verdognolo, altri persino di schisto grigio o verdastro, esattamente corrispondenti cioè a quelli che si incontrano, sebbene con dimensioni maggiori, nelle anageniti.

La roccia pseudo-porfirica è sviluppata nella regione di Peirafica, al monte Giauro, a est verso il Colle di Tenda e del Sabbione ad ovest; in molti punti la sua posizione tra gneiss ed anagenite è ben visibile, come pure evidenti sono le sue relazioni con l'anagenite, nella quale si può vedere qua e là intercalata od insinuata, presentando netto distacco per colore e struttura, ma mostrando pure numerosi passaggi graduati con l'attenuarsi del color violaceo, che tende a passare al verde, e con l'aumentare delle dimensioni dei frammenti e loro predominare sulla massa fondamentale finamente granulare. Con lo gneiss invece il distacco è sempre perfettamente netto, senza termini intermedi e neppure si osservano modificazioni nello

gneiss anche nel contatto immediato con la roccia pseudo-porfirica.

Dal tipo assolutamente compatto, granulare, si passa, ed anche in questo caso per tutta una serie di gradazioni, a quello con schistosità più o meno evidente fino ad aversi una vera roccia schistosa (Fig. 2), come si verifica nelle vicinanze della piramide terminale della Rocca dell'Abisso, presso il Gias dei Pastori, ad ovest del Colle di Tenda, ecc.

Nuovamente si ritrova in questo tipo la varietà priva di granuli porfirici e quindi molto simile a certi schisti violacei, che sono abbondantemente sviluppati lungo la valle della Roia e nella regione del Monte Bego.

In seguito, con la comparsa dei granuli di *quarzo* e *feldspato*, con il loro aumentare di mole e di frequenza si ritorna ai tipi porfirici della varietà compatta, notandosi pure le diverse variazioni nell'intensità della colorazione, che dal violetto-bruno scuro passa al violetto-rosso chiaro ed infine al verdastro, proprio di certe anageniti minute.

Alcune varietà ricordano allora, anche per il colore, lo schisto che si incontra ampiamente sviluppato salendo dai Laghi Lunghi al colle dell'Arpeto, differendone essenzialmente nell'aspetto macroscopico per l'abbondanza in questo della mica che nella roccia schistosa dell'Abisso è relativamente scarsa ed in lamine sempre molto più piccole. Al microscopio però la struttura interna è, come vedremo, perfettamente corrispondente, come del resto corrisponde, tranne per il pigmento rosso-violacco meno abbondante, con quella di molte delle arenarie ed anageniti minute della regione del Monte Bego.

Le potenti azioni meccaniche a cui furono sottoposte le roccie della regione non solo portarono alla comparsa della struttura schistosa nella roccia della Rocca dell'Abisso, ma vi produssero pure una fortissima laminazione ben visibile in parecchi punti della formazione.

In conseguenza di tale laminazione, oltre alla struttura cataclastica, che si può facilmente osservare sotto il microscopio, i grani e frammenti furono schiacciati e frantumati variamente; di più le superficie di divisione appaiono levigate e striate, rese talora speculari oppure finamente fibrose, lucenti. Lo stesso fenomeno di laminazione si osserva pure nei gneiss e nelle anage-

niti in contatto con la roccia pseudo-porfirica; in essi si ritrovano le superficie speculari o finamente striate, inoltre nei piani di divisione si hanno frequentemente spalmature, patine o straterelli di *ematite micacea*. La presenza dell'ematite micacea nei piani di divisione si osserva pure qua e là nella varietà schistosa della roccia dell'Abisso, ma è fenomeno molto meno comune che nei gneiss e nelle anageniti.

Se il pseudo-porfido dell'Abisso, come ho indicato nelle pagine che precedono, presenta all'esame macroscopico diversi tipi apparentemente ben distinti, per quanto sempre con graduale passaggio dall'uno all'altro, e che si potrebbero, considerando esemplari isolati, ritenere come di roccie differenti, l'esame microscopico invece rivela sempre una identicità, si può dire assoluta, di composizione e struttura.

Si tratta cioè nei diversi casi di un aggregato di granuli o piccoli frammenti essenzialmente di *quarzo* e di *feldspato*, immersi in una parte fondamentale che li cementa e tiene uniti, costituita da sostanza caolinosa più o meno torbida e opaca associata ad un abbondante minerale micaceo, di origine metamorfica, in minutissime fibre, scaglie o lamelle. In questa parte fondamentale stanno disseminate abbondanti lamine di *biotite*, generalmente alterata, essendo poi essa fortemente inquinata da un pigmento ocraceo di color rosso alquanto violaceo, che è quello appunto che imparte il colore alla massa. Si ha cioè, tranne per l'abbondanza dal pigmento e la frequenza della biotite, una corrispondenza assoluta di composizione con le arcosi e le anageniti della regione, nelle quali i frammenti clastici sono della stessa natura e la parte fondamentale è si può dire sempre rappresentata appunto dal minerale micaceo di origine metamorfica, venendo così a dimostrarci chiaramente che la roccia supposta porfido nella regione dell'Abisso rientra nella categoria delle roccie frammentarie, formatesi a spese delle roccie gneissiche verso la fine del Permiano od in principio del Trias.

I minerali sparsi macroscopicamente sono, come dissi, essenzialmente il *quarzo* ed il *feldspato*, però disugualmente distribuiti, prevalendo or l' uno or l' altro, benchè in complesso sia il quarzo più abbondante, anzi localmente si può dire l'unico presente.

Il *quarzo* ha per lo più aspetto brecciato e quindi contorni

molto irregolari; più rari sono i grani arrotondati e che furono per conseguenza soggetti ad una fluitazione più o meno grande. Le dimensioni dei frammenti sono ordinariamente piccole (raggiungendo di rado la grossezza di una capocchia di spillo o di un pisello) e sono rappresentati dalle stesse varietà del minerale che s'incontrano nelle anageniti, cioè quarzo ialino a tipo di filone, quarzo finamente granulare, quarzo con aspetto analogo a quello delle roccie gneissiche, avendosi persino parti feldspatiche ancora aderenti.

I contorni dei granuli e frammenti di quarzo sono sempre ben netti ed anzi non è raro l'osservare intorno ad essi un'aureola formata dalla sostanza micacea fondamentale, priva quas totalmente del pigmento ocraceo. Alcuni granuli contengono inclusioni di *zircone* incoloro, con l'abito cristallino che si osserva nelle roccie granitiche o gneissiche, altri laminette rosse di *ematite*, oppure hanno questa infiltrata nella loro massa, ove costituisce finissime dendriti; più raro è il caso di inclusioni di aghi finissimi che sembrano riferibili al *rutilo*, mentre invece è comune quello di inclusioni di *quarzo* nel quarzo in forma di sferule a estinzione ondulata, oppure in forma di plaghe irregolari con orientazione diversa del quarzo includente; fenomeno identico a quello che si osserva nel quarzo del gneiss di tutta la regione.

Specialmente nelle varietà schistose, che hanno cioè subìto il fenomeno della laminazione, si osserva una vera struttura cataclastica con divisione e frantumazione dei frammenti primitivi, essendosi essi sovente spostati con interposizione negli interstizi di altro quarzo finissimamente granulare, quasi pulverulento, o più comunemente della parte fondamentale di aspetto micaceo, priva in questo caso quasi sempre del pigmento ocraceo.

I frammenti e granuli di *feldspato* hanno l'aspetto generalmente identico a quello indicato per il quarzo; essi sono però comunemente più o meno alterati, talora anzi completamente caolinizzati o meglio trasformati nel minerale micaceo finamente fibroso o lamellare che forma in gran parte la massa fondamentale della roccia. Alcuni sono però perfettamente sani e conservati e vi si vedono ben evidenti le linee di geminazione, rappresentata si può dire esclusivamente da quella con legge dell'albite; l'aspetto delle geminazioni ed il comportamento ottico

indicano trattarsi essenzialmente di *albite* e di *oligoclasio*. Molto più raro è l'*ortosio* con la solita geminazione di Karlsbad, mentre il *microclino* mi parve essere rarissimo. Non è privo di importanza il rilevare a questo proposito che tale natura dei feldspati è appunto quella che si ritrova nelle anageniti e che corrisponde pure a quella dei gneiss affioranti nella località.

L'alterazione del feldspato nel minerale micaceo va pure considerata alquanto diffusamente, poichè nuovamente ritroviamo l'identico fenomeno che si osserva nelle anageniti non solo, ma del pari in molti gneiss arcosici e laminati della regione e anche di altri punti della formazione cristallina del massiccio dell'Argentera (1).

Si ha anzitutto molto frequentemente intorno al feldspato un orlo del minerale micaceo con distacco netto fra le due parti, analogamente a quanto ho indicato verificarsi per il quarzo, avendo allora il feldspato contorno ben definito; oppure, ed è caso forse più comune, si vede la parte finamente lamellare passare più o meno insensibilmente dal feldspato alla massa fondamentale, perdendo esso in modo assoluto il suo contorno primitivo. Anzi vi sono plaghe della roccia, in apparenza costituite omogeneamente dal minerale micaceo e dove la preesistenza di feldspato non è rivelata che dalla comparsa a luce polarizzata di traccie, più o meno sfumate, della geminazione polisintetica primitiva, che ci indicano come in origine vi doveva in quel punto esistere il plagioclasio.

Di nuovo, in modo identico a quanto si verifica nelle anageniti, si vede il minerale micaceo essersi formato lungo le linee di geminazione, di sfaldatura e di rottura, oppure essersi interposto tra i frammenti laddove vi fu frantumazione con conseguente comparsa della struttura cataclastica.

Talvolta il minerale micaceo occupa la parte interna del granulo o frammento di feldspato, la cui parte periferica è ancora sana e presenta distintamente le linee di geminazione, oppure, con fenomeno inverso, non si osserva più che un nucleo interno più o meno ampio ancora intatto, mentre la parte ri-

(1) A. Roccati, *Osservazioni petrografiche sulle Valli del Gesso. Valle delle Rovine*, loc. cit. — S. Franchi, *Relazione sui principali risultati ecc.*, loc. cit.

manente è totalmente trasformata; finalmente vi sono casi di feldspato il cui contorno primitivo è ancora visibile, ma che è totalmente trasformato nell'identica sostanza che costituisce la parte fondamentale della roccia.

Il feldspato contiene frequenti inclusioni di quarzo ed altre di altro feldspato con diversa orientazione, sovente con forma perfettamente sferica. A questo proposito osservai un curioso modo di alterazione; si vede cioè il nucleo interno sferoidale perfettamente sano, mentre l'alterazione della parte includente si è spinta fino al nucleo, circondandolo di un'aureola quasi continua, finamente lamellare.

Come nel quarzo, così nel feldspato, ma più frequenti, sono le infiltrazioni ocracee che sovente si sono manifestate lungo le linee di geminazione, rese allora evidenti anche alla luce ordinaria; comuni pure sono i fenomeni di rottura o di distorsioni indicati dall'incurvarsi e piegarsi variamente delle linee di geminazione. Altre inclusioni nel feldspato sono di *ematite*, di *zircone* e di *apatite*.

Molto accessoriamente si osservano sparsi nella massa della roccia granuli di *calcite*, di *epidoto*, di *orneblenda* ed altri, rarissimi di *glaucofane*, la presenza della quale costituisce innegabilmente un fenomeno curioso ed interessante.

Premetto che sulla natura del minerale non vi è dubbio, come anche non vi è dubbio che si tratti di un minerale originario; le sue linee di sfaldatura corrispondono a quelle dell'anfibolo, la sua estinzione è di circa 5° ed il pleocroismo azzurro-violetto-incoloro è assolutamente quello della glaucofane. Essa poi è perfettamente sana, limpida e trasparente ed è in granuli che accennano nettamente ad essere stati fluitati.

Ora sta il fatto che la glaucofane è un minerale molto raro nelle Alpi Marittime e, che io mi sappia, non fu finora menzionata la sua presenza se non che dal Franchi (1) come prodotto di trasformazione del pirosseno in certe roccie granatifere del vallone della Meris sopra Sant' Anna di Valdieri, e da me (2) per uno schisto a glaucofane associato allo gneiss nella Serra

---

(1) Loc. cit.

(2) *Osservazioni petrografiche ecc. (Serra dell'Argentera)*. " Atti R. Acc. d. Sc. di Torino ,, XXXIX, 1904.

dell'Argentera. Nella regione immediatamente circostante alla Rocca dell'Abisso e nella regione del Clapier e del Monte Bego, che ho l'estate scorso ripetutamente percorsa per raccogliere il materiale di un prossimo lavoro, non ho riscontrato mai l'esistenza di roccie a glaucofane, come anche non notai la sua presenza nei miei moltissimi preparati microscopici di anageniti ed altre roccie della regione indicata.

Bisogna quindi ammettere che la glaucofane frammentaria della roccia in esame provenga o da schisti associati ai gneiss, stati distrutti nei fenomeni di degradazione, e dai quali provennero gli elementi che formarono le roccie arenacee ed anagenitiche, che ora affiorano su così vasta area, oppure che essa sia stata fluitata dalle acque in cui avvenne il deposito delle roccie clastiche e che provenga quindi da una certa distanza. Sarei quasi propenso ad ammettere questa seconda ipotesi dato l'abito del minerale nettamente in granuli arrotondati e data pure la sua scarsezza, per non dire rarità assoluta. Sta però il fatto che nella regione circostante alla Rocca dell'Abisso esistono schisti anfibolici associati agli gneiss, così in Valmasca, in Val Casterino, nel vallone delle Meraviglie, ecc. ma non debbo nascondere che per quanto siano numerose le roccie che ho osservato e studiato in quell'ampia zona delle Alpi Marittime non ho mai incontrato la glaucofane, la quale poi anche dove la osservai nella Serra dell'Argentera entra a costituire una roccia che ha ben poca estensione e potenza.

Aggiungiamo poi che la presenza della glaucofane nella roccia clastica dell'Abisso, che geologicamente appartiene o al Permiano superiore od al Trias inferiore, ad ogni modo a formazioni antichissime, potrebbe essere, se fosse necessaria, una nuova prova della stabilità di questo minerale, prova che potrebbe esser aggiunta a quelle già addotte dal Colomba, in opposizione all'opinione di B. Koto (1), non solo quando studiò la glaucofane della Beaume (2), ma in seguito quando ritrovò (3), come anch'io

---

(1) B. Koto, *A Note on Glaucophane*, " Journ. of the Coll. of Sc. Imp. Un. Japan ", I, 1886.

(2) L. Colomba, *Sulla Glaucofane della Beaume (Alta Valle della Dora Riparia)*, " Atti R. Accad. Sc. di Torino ", XXIX, 1894.

(3) L. Colomba, *Osservazioni mineralogiche su alcune sabbie della Collina di Torino*, " Atti R. Acc. Sc. di Torino ", XXI, 1896.

più tardi riscontrai (1), la presenza del minerale inalterato in sabbie del Tortoniano e dell'Elveziano della Collina di Torino.

Venendo ora alla parte minuta, fondamentale della roccia, parte in cui stanno immersi il quarzo, il feldspato e gli altri minerali in frammenti clastici, questa, astrazione fatta dell'abbondante pigmento ocraceo (che in gran parte si può togliere trattando le sezioni sottili della roccia con acido cloridrico) è analoga a quella che si riscontra nelle altre roccie a tipo di arenaria o di anagenite. È cioè costituita in certe varietà da una sostanza caolinosa torbida, semiopaca, ma più comunemente da una massa finamente granulare, o fibroso-lamellare, formata essenzialmente da quarzo e da un minerale di aspetto micaceo, che è il più abbondante e che corrisponde esattamente a quello che abbiam visto prodursi nell'alterazione dei frammenti feldspatici.

Questo minerale micaceo è incoloro, con alti colori d'interferenza iridescenti e presenta per lo più polarizzazione d'aggregato; esso evidentemente non è un minerale originario preesistente nelle roccie la cui disgregazione diede origine alle arenarie, ecc., ma deve provenire invece dalla trasformazione del feldspato degli gneiss primitivi (trasformazione alla quale, come abbiamo visto, si assiste con tutti i possibili passaggi) e molto probabilmente del metamorfismo chimico subito nei tempi geologici dalla sostanza argillosa che, insieme a quarzo finissimamente granulare, doveva interporsi tra i frammenti clastici provenienti dalla frantumazione delle roccie primitive, allorquando il materiale detritico si andava depositando in seno al mare. Di questo metamorfismo chimico si può del resto seguire le diverse fasi nelle abbondanti e svariate roccie clastiche (arcosi, anageniti, arenarie, schisti, ecc.) della regione. Noterò poi che non sono alieno dall'ammettere che la sostanza caolinosa, biancastra, semitorbida, che si osserva in certe varietà della roccia dell'Abisso non rappresenti la sostanza fondamentale, ma che provenga invece da un ulteriore ritorno al caolino per alterazione della sostanza, che essendolo stato in origine, si era poi epiginizzata nel minerale micaceo. Ed infatti si è specialmente

---

(1) A. Roccati, *Sabbia manganesifera di Moncucco Torinese*, " Boll. Soc. Geol. It. ", XXIV, 1905.

negli affioramenti più superficiali e in quelli della roccia resa schistosa dalla laminazione, che si osserva più comunemente la massa fondamentale costituita da materia caolinosa.

L'origine del minerale micaceo, che attualmente costituisce la parte fondamentale, sarebbe quindi analoga a quella della sericite, che si forma appunto così sovente negli schisti di origine metamorfica. Nel caso mio però ritengo che, almeno in gran parte, il minerale micaceo debba ritenersi come *paragonite*, la quale varietà di mica ha appunto sovente quest'origine metamorfica e che forse in molti casi vien confusa appunto con la sericite, siccome giustamente fa rilevare il Van Hise (1) parlando delle trasformazioni che può subire il feldspato delle roccie.

Infatti mi pare logico ammettere che si abbia avuto la formazione di una mica sodica anzichè di una mica potassica (come sarebbe la sericite) per i seguenti motivi:

1° Il minerale metamorfico proviene essenzialmente dalla trasformazione di plagioclasio e più particolarmente di albite ed oligoclasio, nei quali appunto si ha presenza della soda. Che tale origine si abbia nella roccia in esame non è cosa soltanto ipotetica, ma abbiam visto che si assiste ad essa nella trasformazione del feldspato granulare della massa.

2° Le roccie gneissiche della regione dalle quali è provenuto il materiale clastico da cui sono state poi formate le roccie arenaceo-schistose che le ammantano, sono sempre ricche in plagioclasio, mentre vi è scarso invece l'ortosio, e questa natura del feldspato si ritrova nei gneiss laminati, nelle arcosi, ecc. della regione. È quindi logico ammettere che dall'alterazione di feldspati in prevalenza sodici si sia formata della mica sodica, anzichè della sericite, potassica, la quale del resto non escludo in modo assoluto possa esser presente, ma certamente subordinata.

3° La soluzione proveniente dal trattamento della roccia a lungo ed a caldo con acido cloridrico (nella quale operazione il minerale micaceo della parte fondamentale della roccia si decompone quasi totalmente) rivela intensamente allo spettro-

---

(1) C. R. Van Hise, *A traetise on Metamorphism*, " U. S. Geol. Survey ", Monographs, XLVII. Washington, 1904.

scopio la presenza di sodio, mentre non si ha neppur accenno a quella del potassio.

Un' altra caratteristica della composizione della roccia dell'Abisso è l'abbondante presenza di *biotite* e *muscovite* che, con fenomeno analogo a quanto si ritrova in altre roccie frammentarie della zona anagenitico-schistosa, localmente vi si osservano e che non rappresentano più minerali di origine metamorfica, come la paragonite, ma bensì elementi depositatisi contemporaneamente al feldspato ed al quarzo e provenienti quindi dalla disgregazione delle roccie, dalle quali ebbe origine il materiale clastico.

La *muscovite* è generalmente ancora ben sana, in laminette più piccole di quelle della biotite, incolori e sovente perfettamente terminate; queste laminette sono però alquanto disugualmente distribuite, perchè in certi esemplari mancano del tutto, mentre in altri sono così numerose da essere perfettamente visibili anche ad occhio nudo.

La *biotite*, molto più abbondante e costante nella composizione della roccia, è invece sempre torbida, opaca e di color rosso più o meno cupo, perchè tutta e fortemente inquinata dalla sostanza ocracea che dà appunto la tinta alla roccia. Le sue lamine, più o meno ampie, ma sempre maggiori di quelle della muscovite, si vedono impigliate frammezzo ai granuli di quarzo e di feldspato, oppure inglobate nella massa fondamentale; la si osserva pure distintamente pieghettata, variamente incurvata e non di rado disposta con struttura quasi fluidale intorno ai granuli maggiori, che sembra concorrere a cementare.

L'abbondante pigmento rosso ocraceo che inquina la massa della roccia e le dà il colore, si può, per quanto non mai del tutto, separare nel trattamento con acido cloridrico a freddo della roccia ridotta in polvere; esso è allora rappresentato da $Fe^2 0^3$ che raggiunge la percentuale di 2,75 nella composizione complessiva della roccia e da cui, con tutta evidenza si ottengono le reazioni caratteristiche del manganese. Ciò spiega quindi la tinta rossa più o meno violacea della roccia, con identico fenomeno a quello che si riscontra in molti schisti, arenarie ed anageniti della regione.

Ora qual'è l'origine di questo pigmento?

Per quanto non si possa far a meno che ammettere vi siano

state infiltrazioni ferruginose portate dalle acque, come dimostrano i frequenti depositi di ematite micacea in letti, straterelli, spalmature, ecc., nei piani di divisione dei gneiss e delle anageniti od arenarie rese schistose dalla laminazione, nel caso della Roccia dell'Abisso ritengo che essenzialmente la sua origine vada ricercata nell' alterazione della biotite che abbiam visto esistere abbondantemente nella massa. Ed infatti la colorazione rossa e l'accentramento della sostanza ocracea è specialmente intensa nelle lamine di biotite sempre del tutto alterate, o nelle loro vicinanze, diminuendo invece di intensità ove la mica è meno abbondante e mancando quasi del tutto nei granuli di quarzo e feldspato.

La colorazione rossa manca nelle anageniti a tipo minuto, intimamente associate alla roccia in esame e di cui hanno la identica composizione, tranne appunto nella mancanza di biotite; oppure presentano colorazione rossastra presso il contatto con la roccia rossa, essendosi avuto passaggio della sostanza pigmentaria dall'una altra roccia.

Parecchi tipi di roccie della regione anagenitico-schistosa di quella zona delle Alpi Marittime hanno tinta rossa nelle stesse condizioni di composizione mineralogica e di alterazione della biotite.

Le roccie gneissiche della regione sono specialmente ricche, talora ricchissime, in biotite molto ferrifera e si osserva sovente in esse la trasformazione della mica in un minerale rosso-ocraceo, opaco, identico a quello della Rocca dell'Abisso, minerale che contrasta con gli altri componenti perfettamente sani.

Finalmente questa biotite degli gneiss è comunemente manganesifera (come lo sono la ematite e l'ilmenite disseminate in quel tipo di roccie), anzi la quantità di manganese è talora molto notevole. Si avrebbe allora la spiegazione della presenza del manganese nel pigmento che inquina e colora la roccia.

Concludendo, la roccia sovente indicata come porfido rosso nella Rocca dell'Abisso non è da considerarsi come di origine endogena; essa si deve invece ascrivere al gruppo delle roccei clastiche (arcosi, anageniti minute, arenarie, ecc.) che hanno così grande sviluppo in quella zona delle Alpi Marittime, ove raggiungono localmente una potenza non inferiore ai 1000 m. I caratteri più salienti della roccia studiata nella presente nota

e cioè l'abbondanza del pigmento ocraceo e la frequenza della biotite non sono neppure caratteri suoi speciali, ma si ritrovano in parecchi tipi litologici della estesa formazione anagenitico-schistosa.

La roccia dell'Abisso dovette formarsi nel mare che alla fine del Permiano o in principio del Trias occupava gran parte della regione e da cui doveva emergere, almeno in parte, la formazione gneissica del massiccio dell' Argentera. Sono i prodotti della disgregazione dei gneiss e la sedimentazione di tali prodotti che dovettero appunto dar origine alle molteplici roccie clastiche della regione.

Ritengo infine che la roccia dell'Abisso si sia formata senza che in generale i suoi componenti subissero una prolungata fluitazione, depositandosi invece a poca distanza dal loro luogo di origine. Questo risulta anzitutto dalla forma dei frammenti di quarzo e di feldspato, che sono sovente poco o niente arrotondati ed in secondo luogo dall'abbondanza della biotite, la quale, secondo le ricerche di Thoulet (1), non si incontra se non appunto nei sedimenti marini prossimi al giacimento terrestre di origine e poco lontani dalle coste.

Torino. Gabinetto Geo-Mineralogico del R. Politecnico.
Maggio 1909.

(1) *Étude comparée de fonds marins anciens et actuels*, " Annales des Mines ", XIII, 1908.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. — La roccia della Rocca dell'Abisso a tipo di arenaria compatta.
Fig. 2. — La stessa resa schistosa dalla laminazione.
Fig. 3. — Tipo della roccia a struttura porfirica.
Fig. 4. — Anagenite minuta della Rocca dell'Abisso che indica la identica struttura con il supposto porfido.

N. B. Tutte le figure sono a luce naturale con ingrandimento di 6 diam.

Esperienze sull'evaporazione.

Nota del Socio ANDREA NACCARI.

1. — *Influenza della distanza del livello del liquido dall'orlo del vaso.* — Lo Stefan stabilì teoricamente nel 1873 la legge dell'evaporazione, che porta il suo nome [1]. Essa riguarda il caso di un liquido contenuto in un vaso di pareti verticali. Se indichiamo con v il volume, *ridotto alle condizioui normali*, del vapore che si svolge in un secondo da un centimetro quadrato della superficie del liquido, la legge dice che

$$v = \frac{k}{h(1+\alpha\theta)} \text{ log. nat. } \frac{P-f}{P-F}.$$

In questa formola, che è propriamente quella assunta dal Winkelmann e differisce da quella dello Stefan in ciò, che il secondo membro è diviso per $1+\alpha\theta$, P indica la pressione atmosferica, F è la tensione massima del vapore alla temperatura θ dell'esperienza, f la tensione, che il vapore medesimo ha nello spazio, dove s'apre la bocca del vaso, h è la distanza della superficie di livello del liquido dall'orlo del vaso. Il fattore k infine è il coefficiente di diffusione del vapore nell'aria alla pressione normale e alla temperatura θ dell'esperienza.

Se si fa in modo che il vapore, uscito dal vaso, si diffonda in un ampio spazio, che per sè non contenga vapore della stessa natura, si può ammettere che sia $f=0$. La formula diventa allora

$$v = \frac{k}{h(1+\alpha\theta)} \text{ log. nat. } \frac{P}{P-F}. \tag{1}$$

[1] Stefan, *Versuche über die Verdampfung*, " Wien. Berichte ", LXVIII, (2), 1873. — Id., *Ueber die Verdampfung und Auflösung als Vorgänge der Diffusion*, " Ivi ", XCVIII (2. a.) 1418 (1889).

La legge dello Stefan è generalmente riconosciuta come conforme ai fatti. Lo Stefan stesso ne fece alcune verificazioni sperimentali.

Il Winkelmann (1) verificò la formola sperimentando con acqua sotto pressioni molto diverse e fece altre numerose esperienze sull'evaporazione dell'acqua, dell'alcool e dell'etere nell'idrogeno, nell'anidride carbonica e nell'aria.

Nella formula dello Stefan il coefficiente k s'intende costante per date sostanze, e per una data temperatura; ma secondo la teoria di O. E. Meyer esso può dipendere dalle proporzioni, in cui nelle varie sezioni del tubo son mescolati il vapore ed il gas e secondo l'esperienze dell'Obermayer, esso dipende dalla ragione, in cui va diminuendo la tensione del vapore al crescere della distanza dal livello del liquido. Quando si fa avvenire l'evaporazione a temperatura costante con profondità h sempre maggiori del livello del liquido dall'orlo del vaso, il decremento della tensione effettiva del vapore per ogni centimetro di lunghezza misurato lungo l'asse del vaso va diminuendo e secondo l'Obermayer ciò dovrebbe portare con sè un aumento di k.

Il Winkelmann trovò che così avveniva per l'acqua e per l'alcool, che evaporavano nell'idrogeno, nell'anidride carbonica e nell'aria. Trovò invece che k era indipendente dalla profondità h per l'etere.

Io feci dell'esperienze appunto con l'etere per vedere se esista l'influenza della profondità sul valore del prodotto vh e quindi sul coefficiente k di diffusione.

L'etere adoperato era stato distillato sul sodio. Tuttavia non intesi di determinare il valore assoluto del coefficiente di diffusione del vapore d'etere nell'aria. Occorrerebbero in tal caso cure ancora maggiori per operare con etere puro.

I valori di k da me trovati vanno considerati come valori relativi, quali mi occorrevano per risolvere la questione testè indicata. Essi sono alquanto minori di quelli trovati dal Winkelmann.

L'etere stava in un tubo da saggi che aveva il diametro di circa due centimetri. Un termometro s'immergeva nell'etere

(1) Winkelmann, " Wied. Ann. ", XXXIII, 445 (1888); XXII, 1 (1884).

e s'aveva cura che il suo bulbo, ch'era piccolo, stesse sempre vicino alla superficie di livello. Esso era sorretto da fili di rame che s'appoggiavano sull'orlo del tubo, in modo che i fili stessi ne ingombrassero quanto meno era possibile la bocca. S'ebbe anche cura che il termometro stesse sempre verticale e non toccasse le pareti del tubo. Questo era sorretto da un apposito piedestallo perchè stesse in posizione verticale. Una scala di carta era applicata alla parete di esso. Dopo avervi versato l'etere fino all'altezza voluta, si poneva il tubo sopra il piatto d'una bilancia sensibile. Si poneva sull'altro piatto un peso poco minore di quello che occorreva per l'equilibrio e si attendeva che in conseguenza dell'evaporazione l'indice del giogo passasse per lo zero dell'arco diviso. Si osservava con un orologio l'istante, in cui ciò avveniva. Si toglieva poi il tubo dalla bilancia, se ne osservava la temperatura e la distanza della superficie di livello dell'etere dall'orlo. Il tubo si lasciava per un certo tempo in luogo tranquillo, dove la temperatura era quasi costante. Di tratto in tratto si leggeva la temperatura dell'etere tenendo conto del tempo della lettura. Alla fine dell'esperienza si leggeva la temperatura dell'etere e la distanza del livello dall'orlo, si rimetteva il tubo sulla bilancia, si toglieva dall'altro piatto quanto occorreva perchè il giogo traboccasse leggermente dalla parte del tubo e si attendeva l'istante in cui l'indice passava per lo zero e se ne teneva conto. Così si poteva determinare con molta precisione il valore di k.

Ecco i risultati di tre serie di esperienze fatte con valori di h rispettivamente eguali a $6^{cm},6$ circa, a 10,3 e a 14.

Nelle tabelle seguenti la prima colonna contiene i valori espressi in *cm.* della distanza h del livello del liquido dall'orlo, la seconda quelli della temperatura θ, la terza il tempo t espresso in secondi, che nelle singole esperienze fu necessario per l'evaporazione d'un decigrammo di etere, la quarta il valore P della pressione atmosferica. I valori del coefficiente di diffusione calcolati con la formula (1) stanno nell'ultima colonna.

I.

h	θ	t	P	k
6,00	14,48	1525	736,1	0,0771
5,95	14,65	1438	734,0	802
6,61	14,80	1590	734,7	794
6,61	15,13	1535	726,2	798
6,69	15,60	1537	726,2	787
6,72	16,62	1466	733,8	798
6,77	15,00	1640	734,7	785
7,34	15,20	1748	739,3	796
6,60	16,20	1485	743,6	804
6,60	16,71	1462	744,1	796

II.

h	θ	t	P	k
10,05	15,12	2315	740,0	0,0829
10,33	16,42	2162	736,4	842
10,16	13,95	2537	741,7	817
10,20	13,70	2570	740,2	817
10,27	15,48	2322	744,9	834
10,30	13,42	2647	737,5	810
10,30	13,15	2657	730,5	807
10,30	14,62	2404	731,0	825
10,32	13,15	2695	740,3	812
10,37	15,78	2270	733,2	830
10,41	14,22	2462	730,9	833

III.

h	θ	t	P	k
13,21	14,43	3151	740,0	0,0830
13,90	14,38	3240	730,2	836
14,01	13,49	3262	738,8	817
14,19	15,45	3087	727,0	836
14,33	15,17	3140	727,8	848

In condizioni anche migliori furono fatte l'esperienze delle due serie seguenti:

I.

h	θ	t	P	k
6,03	14,47	1524	738,2	0,0787
6,12	15,00	1490	739,4	788
6,16	14.83	1458	729,5	802
6,21	14,71	1524	738,2	793
6,29	14,28	1512	726,4	809
6,29	14,94	1494	730,6	797
6,31	15,00	1521	739,4	789

II.

h	θ	t	P	k
16,11	15,36	3615	744,4	0,0845
16,12	14,90	3785	743,8	828
16,26	14,60	3796	732,2	829
16,28	14,43	3905	740,4	824
16,35	14,65	3834	734,8	823
16,40	15,24	3757	739,2	827

Prendendo i valori medii delle varie serie abbiamo:

h	θ	k
6,59	15,44	0,0793
10,29	14,24	823
13,93	14,58	833
6,20	14,75	795
16,25	14,80	829

Risulta manifestamente da queste esperienze che il valore di k è maggiore per maggiori profondità e che si verifica anche per l'etere ciò che il Winkelmann trovò per l'acqua e per l'alcool.

L'influenza della profondità, quale risulta da queste esperienze, potrebbe spiegarsi ammettendo che, quando l'evaporazione è più copiosa, il che appunto avviene quando la profondità è minore, il vapore si trattenesse in maggiore quantità nello spazio soprastante alla bocca del tubo. Ma l'esperienze non confermano questo sospetto. Osservando i tempi necessari perchè cinque centigrammi di etere successivamente evaporino, non vidi mai che nel primo intervallo l'evaporazione forse più rapida, come dovrebbe avvenire se il vapore non si diffondesse tanto rapidamente nello spazio, in cui s'apre la bocca del tubo, da poter ammettere che la tensione del vapore vi sia nulla.

2. — *Influenza della temperatura.* — Eseguii molte esperienze con profondità h eguale a 10 cm. circa e a temperature diverse. Queste possono servire all'esame dell'influenza della temperatura sul coefficiente di diffusione, influenza che non è ben conosciuta e che può anche essere diversa da sostanza a sostanza.

La tabella seguente, che fu compilata come le precedenti, contiene i risultati di tali esperienze.

h	θ	t	P	k
10,40	11,72	3036	751,8	0,0799
10,43	11.84	2868	721,5	799
10,31	11,85	2990	746,8	793
10,35	12,20	2872	746,7	813
10,30	13,15	2657	730,5	809
10.32	13,15	2695	740,3	812
10,30	13,42	2647	737,5	809
10,20	13,70	2570	740,2	817
10,16	13,95	2537	741,7	817
10,33	13,99	2518	727,9	813
10,15	14,00	2498	738,0	810

h	θ	t	P	k
10,41	14,22	2442	730,9	0,0833
9,94	14,27	2377	727,7	816
10,30	14,62	2404	731,0	833
10,33	15,00	2374	734,3	826
10,05	15,12	2315	740,0	829
10,27	15,48	2322	744,9	834
10,37	15,78	2270	733,2	830
10,33	16,42	2162	736,4	842
10,30	17,06	2065	736,1	848
10,42	17,18	2090	736,4	841
10,16	17,50	1984	729,8	838
10,12	18,00	1905	725,9	838
10,34	18,25	1912	725,8	840
9,69	19,90	1642	745,4	867
10,23	18,14	1975	741,6	840
10,14	21,50	1524	734,1	870
10,16	21,72	1542	735,4	862
10,15	21,80	1528	742,1	862
10,02	23,00	1393	743,5	868
10,15	23,10	1378	740,4	875
10,21	23,17	1379	740,4	876
10,09	23,78	1320	742,9	873
10,04	23,85	1302	743,4	878
10,05	24,59	1226	743,2	886
9,81	24,70	1209	741,5	868
10,06	24,81	1217	742,1	878
10,06	25,12	1196	744,0	877
10,10	25,23	1180	744,0	885
10,04	25,42	1160	744,3	885
10,02	25,60	1147	744,3	880

Raccogliamo in uno specchietto i valori medii di h, di θ e di k dedotti dalle dieci serie di esperienze.

h	θ	k	T	k'	$k-k'$
10,37	11,90	0,0801	284,9	0,0806	-5.10^{-4}
10,31	13,24	807	286,2	813	-6 "
10,21	13,91	814	286,9	817	-3 "
10,22	14,37	827	287,4	820	$+7$ "
10,25	15,34	830	288,3	826	$+4$ "
10,28	17,04	842	290,0	835	$+7$ "
10,10	18,57	846	291,6	844	$+2$ "
10,28	21,53	865	294,5	861	$+4$ "
10,10	23,38	874	296,4	873	$+1$ "
10,02	25,07	880	298,1	882	-2 "

Lo specchietto precedente contiene nella quarta colonna le temperature assolute corrispondenti alle temperature centesimali θ della seconda colonna, nella quinta i valori di k^1 calcolati con la formula

$$k' = 9{,}931 \,.\, 10^{-7}\, T^2$$

e nella sesta le differenze fra i valori osservati e i calcolati. Esaminando queste differenze si vede che la formula si adatta abbastanza bene all'esperienze.

3. — *Influenza dello stato elettrico.* — Lo stato elettrico di un liquido dovrebbe secondo la teoria diminuire alquanto la tensione del vapore e quindi ritardare l'evaporazione. Le antiche esperienze meritano poca considerazione. Esperienze recenti, come quelle del Wirtz e del Pochettino, mostrano che in fatto l'elettrizzazione dà origine ad una piccola diminuzione della tensione del vapore.

Operando con cura nel modo, in cui furono eseguite l'esperienze sopra descritte, si può raggiungere molta precisione. Io volli esaminare, se per questa via si poteva ottenere un indizio dell'influenza dello stato elettrico.

Determinai a tal fine il coefficiente k con numerose esperienze alternando quelle, nelle quali il liquido, che evaporava, era elettrizzato, con altre in cui lo stato elettrico non esisteva.

Il tubo di vetro era attraversato sul fondo da un filo di platino. Quando si voleva elettrizzare l'etere si congiungeva quel

filo con un polo d'una pila secca e con un elettrometro Braun. Si usarono due pile disposte in serie e si potè raggiungere il potenziale di 1700 Volta.

Nella tabella che segue, la quinta colonna contiene i valori k_e relativi al liquido elettrizzato e la sesta i valori k relativi al liquido nelle condizioni ordinarie.

θ	h	t	P	k_e	k
14,87	9,37	2386	746,4	0,0801	
14,83	9,30	2412	745,5		0,0787
14,64	8,95	2311	740,0	0,0789	
14,52	9,49	2418	740,5		
15,04	9,26	2355	440,9	0,0793	0,0786

k_e medio 0,0792 alla media temperatura 14°,85
k „ 0,0790 „ „ „ 14,67.

Seguono i risultati d'un'altra serie:

θ	h	t	P	k_e	k
14,34	9,68	2539	733,2	0,0797	
14,59	9,37	2433	728,5	786	
15,21	9,43	2321	727,6		0,0789
14,86	9,30	2364	734,0	799	
13,75	8,74	2357	736,0		804
14,26	9,06	2400	735,0		795
14,07	9,35	2477	735,0	802	
12,64	8,99	2639	740,5	789	
13,00	9,35	2709	738,7	782	
12,71	8,99	2691	746,9		780
13,18	9,00	2599	749,2	792	
12,60	9,31	2790	747,2		780
13,05	9,34	2677	745,6	800	
13,47	8,96	2536	745,0		790
14,91	9,13	2255	728,2		811

k_e medio 0,0793 alla media temperatura 13,72
k „ 0,0793 „ „ „ 13,71

Da queste esperienze si deve concludere che, operando così, non si può scoprire nessuna influenza dello stato elettrico. Pensai quindi di seguire un metodo di maggiore sensibilità.

Ad una lastra di vetro applicai due tubi eguali chiusi al capo inferiore, aperti di sopra. I capi aperti dei tubi trovavansi alla stessa altezza. I tubi erano alla distanza di due centimetri circa l'uno dall'altro. L'uno era attraversato sul fondo da un filo di platino. A ciascuno dei tubi era applicata una scala di carta in millimetri. Disposta verticalmente la lastra, i due tubi furono interamente empiti di etere. Il filo di platino anzidetto veniva congiunto ad un polo di una pila secca, mentre l'altro polo di questa era a terra. Il polo isolato aveva un potenziale di 1500 Volta all'incirca.

Osservai per più giorni le posizioni assunte dal livello dell'etere nei due tubi, ma nemmeno da tali esperienze, che pur furono numerose, non potei ottenere la prova sicura d'un'influenza dello stato elettrico sull'evaporazione.

Nè meglio valse il metodo seguente.

Presi un tubo di vetro chiuso ad un capo e attraversato in quel punto da un filo di platino, lo curvai a modo di U e ne affilai l'altra estremità. Introdussi in esso dell'etere, cacciai l'aria facendo bollire l'etere, indi chiusi l'altro capo applicandovi pure un filo di platino. Disposto poi il tubo con le due braccia volte verso il basso, feci in modo che l'etere liquido occupasse in parte le due braccia e congiunsi il filo di platino di un braccio con un polo della pila secca. Il filo dell'altro braccio poteva esser messo a terra. Ma con tale disposizione, che potrebbe parere opportuna a scoprire piccole differenze di tensione fra l'etere delle due braccia, non è possibile ottenere che il liquido di un braccio sia ad alto potenziale e l'altro a terra.

Le mie esperienze sull'influenza dello stato elettrico ebbero dunque esito negativo. È da ricordare che io non sorpassai il potenziale di 1700 V.

4. — *Quantità di liquido che evapora in un dato tempo da una bacinella circolare.* — Lo Stefan (1) studiò teoricamente

(1) Stefan, " Wied. Ann. ", XVII, 550 (1882).

l'evaporazione di un liquido contenuto in una bacinella circolare e giunse alla conclusione che la quantità di liquido evaporato in un dato tempo è proporzionale alla periferia della bacinella anzichè alla superficie.

Lo Stefan risolse il problema valendosi della somiglianza ch'esso ha, dal punto di vista matematico, con quello della distribuzione della elettricità sopra un disco conduttore. Le linee di flusso del vapore nel primo caso coinciderebbero con le linee di forza elettrica nel secondo, se le condizioni dei due problemi si corrispondono.

Il Winkelmann [1] verificò il fatto che l'evaporazione è più rapida in vicinanza dell'orlo a paragone delle parti centrali.

Il Pallich [2] studiò sperimentalmente la forma delle linee di egual tensione di vapore e trovò ch'esse avevano forma alquanto diversa da quella che avrebbero dovuto avere secondo lo Stefan.

Io feci dell'esperienze per verificare in modo diretto la proposizione dello Stefan, che ho riferita di sopra. Adoperai delle bacinelle circolari di diversi diametri e con orli presso a poco di egual grossezza e lavorati nello stesso modo.

Sopra un piatto d'una bilancia Roberval stava una bacinella di raggio r: sull'altro due bacinelle, i cui raggi indicherò rispettivamente con r_1 e r_2. Secondo lo Stefan, empite le bacinelle d'acqua e stabilito l'equilibrio, questo avrebbe dovuto conservarsi, se $r_1 + r_2 = r$. Invece in tali condizioni la bilancia traboccava sempre dopo breve tempo dalla parte dei due vasi. Se invece le bacinelle erano scelte in modo che fosse $r^2 = r_1^2 + r_2^2$, la bilancia traboccava dalla parte opposta.

Cercai la condizione d'equilibrio prendendo successivamente di diversa grandezza una delle due bacinelle poste sopra uno stesso piatto e ne dedussi una formula empirica, che esprimesse la quantità q di liquido evaporata nell'unità di tempo da una bacinella circolare in funzione del raggio. Posto

$$q = \alpha(r + \gamma r^2),$$

trovai $\gamma = 0{,}15$. Questo coefficiente dovrebbe essere nullo secondo lo Stefan. L'esperienze furono fatte in due serie, l'una

[1] Winkelmann, " Wied. Ann. ", XXXV, 401 (1888).

[2] Pallich, " Wiener Berichte ", CVI, 384 (1897).

con bacinelle, i cui raggi erano compresi fra 5,9 e 3,4 cm., l'altra con bacinelle, i cui raggi stavano fra 4 cm. e 2 cm.

Non si può raggiungere precisione in esperienze di questa fatta, perchè le correnti d'aria, ch'è impossibile impedire anche in luoghi chiusi, alterano in modo irregolare i risultati e perchè la necessità d'impedire coa ischermi la mutua influenza delle bacinelle collocate sui piatti della bilancia rende molto difficile l'ottenere che tutte le bacinelle sieno in condizioni eguali rispetto all'evaporazione.

Il valore $\gamma = 0,15$ è la media di molte esperienze fatte a 15° all'incirca. Il valore di questo coefficiente cresce probabilmente con la temperatura, e alcune esperienze fatte a 25° mi diedero 0,45. Questa influenza della temperatura sulla differenza tra i valori dati dalla teoria dello Stefan e quelli sperimentali fu già notata dal Pallich.

Relazione intorno alla Memoria del Dottor Edoardo Zavattari intitolata: *Ricerche morfologiche intorno ai Muscoli ioidei dei Sauri in rapporto con i Muscoli ioidei degli altri Vertebrati. Parte prima.*

In questo lavoro l'A. riferisce i risultati delle dissezioni dei muscoli ioidei di circa cinquanta specie di Sauri, la maggior parte dei quali non era stata esaminata sotto questo punto di vista. L'A. ha così potuto mettere in evidenza molti fatti e disposizioni anatomiche nuove, che hanno una notevole importanza nella interpretazione della musculatura della regione ioidea dei Vertebrati. L'A. ha potuto mettere in chiaro il fatto che quasi costantemente in ciascuna famiglia di Sauri vi è un tipo caratteristico di musculatura. Ad esempio nei Geconidi manca sempre il muscolo *episternoioideo superficiale* che è invece presente nelle altre famiglie, che negli Iguanidi, e più specialmente nelle forme con bargiglio sottomentoniero, esiste un fascio muscolare, non ancora stato descritto, che ha la funzione di erigere il bargiglio stesso.

L'A. ha poi messo in particolar modo in evidenza un muscolo speciale che non era stato descritto per la maggior parte delle specie, teso fra la regione nucale e la mandibola, muscolo

che ha una speciale importanza, poichè rappresenta una formazione muscolare che si incontra solo nei mammiferi: *il digastrico.*

L'A. ha pure esaminato specie, che erano già state studiate da altri autori e su esse fa una critica minuta delle interpretazioni date ad alcuni fasci muscolari, come ad esempio per i generi *Liolepis*, *Phrynosoma*, *Chamaeleon*, ecc.

A questa prima serie di ricerche in cui sono descritti i fatti osservati, l'A. farà seguire una seconda memoria nella quale essi saranno messi in rapporto e in confronto con quelli che si osservano nella musculatura del ioide negli altri Vertebrati, e nella quale basandosi specialmente sui reperti messi in evidenza in questa prima parte, verranno discusse le varie teorie state formulate in proposito.

Il lavoro del Dott. Zavattari è minuto, diligente, ben condotto e i risultati in esso contenuti sono un buon contributo per la conoscenza dell'anatomia comparata della muscolatura dei Vertebrati.

I vostri Commissari ne propongono la lettura alla Classe e la stampa nei volumi accademici.

R. Fusari,
L. Camerano, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 30 Maggio 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti i Soci: Manno, Direttore della Classe, Renier, Pizzi, Chironi, Ruffini, Stampini, Brondi e De Sanctis, Segretario. — Scusano la loro assenza i Soci D'Ercole e Sforza.

È letto ed approvato l'atto verbale della seduta precedente, 16 maggio 1909.

Su proposta del Presidente si delibera di affidare al Socio Stampini la rappresentanza della nostra Accademia alle feste pel V° centenario dell'Università di Lipsia, che avranno luogo dal 28 al 30 giugno 1909; insieme con lo Stampini parteciperanno alla rappresentanza quegli altri Soci residenti che eventualmente si recheranno in quell'occasione a Lipsia.

Sono presentati d'ufficio i seguenti libri offerti in omaggio all'Accademia: da S. E. il cardinale Maffi arcivescovo di Pisa: *I documenti pontifici riguardanti l'Università di Pisa,* editi ed illustrati da Carlo Fedeli (Pisa, Mariotti, 1908);

dal Municipio di Torino: *La vita amministrativa del comune di Torino nel quinquennio 1903-1908*, vol. I (Torino, Vassallo, 1909);

dal Socio residente Gio. Sforza: *Il principe Eugenio Francesco di Savoia, conte di Soissons, e il suo fidanzamento con Maria Cybo, duchessa di Massa* (estratto dalla " Miscellanea di Storia Italiana ", S. III, T. XIII, Torino, Bocca, 1909).

Il Socio Renier presenta con parole di elogio il volume del Socio corrispondente G. Zuccante: *Socrate* (Torino, Bocca, 1909).

Il Socio Pizzi offre per gli *Atti* una sua nota intitolata: *Lyra Zarathustrica.*

Il Socio Chironi presenta pure per gli *Atti* uno studio del Dr. V. A. Cottino sopra *Il modo (Auflage) nella legge successoria germanica.*

LETTURE

Lyra Zarathustrica.

Versione metrica di ITALO PIZZI.

Avvertenza del traduttore.

Di Zarathustra, a molti, nulla è noto fuor che il nome, e ciò per le famose parole del Nietzsche: " Così diceva Zarathustra! ". Zarathustra fu il legislatore religioso dell'antica Media, fondatore, a forse sei secoli avanti l'Era volgare, di una delle più pure religioni dell'Asia, che poi dalla Media si estese alla Persia e a tutta la regione iranica, tolta poi via dall'Islamismo quando gli Arabi, nel 650 d. C., ebbero conquistata la Persia, rimanendone non molti seguaci, sotto il nome di Guebri o Parsi, nella provincia di Kirman nella Persia e a Bombay nell'India (1). Zarathustra era noto anche agli antichi sotto il nome di Zoroastro, e Zoroastro si chiama anche da noi. La tradizione indigena lo fa autore d'un codice o libro sacro rivelato a lui dal Dio creatore, Ahura Mazda, detto Avesta o anche, ma meno esattamente, Zendavesta. Di questo libro, scritto in una antica lingua iranica detta per convenzione lingua zenda, che non è la persiana antica, come da alcuni erroneamente si crede, buona parte è andata perduta. Quale è giunto a noi, si divide in: *Vendidad*, libro concernente le purificazioni contro gl'influssi demoniaci, con alcuni pochi racconti mitici; *Yasna*, libro liturgico, con molti inni da recitarsi durante il sacrifizio; *Vispered*, compendio del *Yasna*; *Yasht* o *Khorda-avesta*, con invocazioni e inni, alcuni di natura epica.

Abbiano i lettori italiani (per mezzo di questa mia modesta fatica) un saggio di questo antico e solenne monumento della

(1) Vedi la mia *Storia della Poesia persiana*, vol. I, c. I (Torino, Unione Tip.-Ed., 1894) e *l'Islamismo* (Manuali Hoepli), cap. V, *l'Islamismo in Persia*.

letteratura asiatica di cui finora non esiste alcuna traduzione italiana anche parziale. La traduzione mia, sebbene in versi, è mantenuta sempre fedele al testo (1).

I. Inno al Fuoco (2).

(*Yasna*, LXI, 1-25).

A te lode, a te culto, a te la buona
Offerta io reco, salutare e amica,
O Fuoco, figlio d'Aura Mazda! E sei
Degno di culto e laudi. Oh! sempre adunque
Laudato esser tu possa e venerato
Nell'ostel de' mortali! Abbia colui
Che costante ti adora in man reggendo
E sarmenti e verbene e il ritüale
Lembo di carne ed i mortai (3), felice
E buono stato! Ed abbiti mai sempre
Tu, o Fuoco, figlio d'Aura Mazda, i legni
Secondo il rito e l'alimento acconcio
E i profumi e l'ostello! Un uom ch'è adulto,
Ti custodisca, un uom ch'è pio, ti guardi!
Ardi tu intanto in questa casa, e lunga-
mente splender vi possa e mandar luce!
Crescivi, o Fuoco, in questa casa, e lunga
Stagion vi resta, fino al dì lucente
In che gli estinti sorgeran, de' morti
Risorti anche al di là del dì lucente!
Dammi tu, o Fuoco, d'Aura Mazda figlio,
Pronto vigor, pronto alimento e vita
Alacre e forte! Copia anche v'aggiugni

(1) Per maggiori notizie intorno all'Avesta e a Zarathustra, si veggano (tra le altre infinite) le seguenti opere: Spiegel, *Eranische Alterthumskunde*, 3 Bd., Leipzig, 1871-78; *Grundriss der iranischen Philologie, von* Geiger *und* Kuhn, Strassburg, 1896; Jackson, *Zoroaster*, *the prophet of ancient Iran*, New York, 1899.

(2) Gl'Irani sono detti comunemente adoratori del Fuoco. Si vedrà dal seguente inno che esso invece è considerato come un simbolo della Divinità, non un dio, figlio del creatore Ahura Mazda.

(3) I mortai per apprestarvi il succo sacrificale da offrirsi. Vedi oltre al n. V.

Di vigor, d'alimento e di vitale
Possa per me, prosperità, grandezza,
Facondia nel parlar, senno, intelletto
Di quest'anima mia, grandezza e forza
Che mai non cessi, marzïal possanza
D'uom ch'è fra l'armi. E dà ch'io, vigilando,
Insonne, in piè, tre parti al dì, alla notte,
Pregando resti. Al corso anche mi dona
Prestezza, vigil possa, agili figli,
Ben nutriti, socievoli del core,
Quali a cerchio mi stian tutti dintorno,
Bene operanti, di leggiadro aspetto,
La persona aitanti, al mal nemici.
Questa dimora mia deh! faccian elli
E questo vico prosperar, la gente
E questa terra e ogn'altra regïone!
Dammi tu, o Fuoco, d'Aura Mazda figlio,
Che un maestro mi venga, ed egli intanto
Ora e sempre m'insegni ove de' pii
Sta il loco eletto, splendido, lucente
Di luce eterna! (1). Rinomanza buona,
Buona mercede e per quest'alma mia
Buono stato e felice indi mi tocchi!
Figliuolo, il Fuoco, d'Aura Mazda, a quelli
Tutti pei quali ei va cuocendo il pasto
Del vespero nell'ora, ecco! rivolge
Una parola, e da tutti ei desìa
Buona un'offerta e un buono augurio e buona
Anche una lode. A tutti che da presso
Gli van passando, egli le mani osserva (2)
E dice intanto: Oh! che mai dunque apporta
All'amico l'amico, e chi va attorno
A chi sta fermo, che mai dona? — Oh! il Fuoco
Santo adoriam, suvvia! forte, possente,
Guerrier curule! — Che se a lui qualcuno
Fomento apporta ritüal di legni,

(1) Il Paradiso.
(2) Per scoprire se hanno legne da alimentarlo.

Verbene apporta ritüali ed erbe
Di profumo odoroso, a quel di beni
Augurio apporta d'Aura Mazda il figlio.

II. Inno a Mithra (1).

(*Yasht*, X, 35-40, 95-101, 104-105, 112-113).

Mithra adoriam suvvia! dai molti paschi,
Dal verace parlar, dal core amico,
Ben conformato, che ode tutto e ascolta,
Che tutto vede, altissimo, dall'ampie
Vedette, insonne, vigile e gagliardo,
Punitor delle colpe! Egli una schiera
E procacciasi e adunasi, ed ha mille
E mille potestà, signoreggiante,
Dominante, onnisciente. Egli la pugna
Forte sospinge, là, nelle battaglie,
Forte resiste, e resistendo forte
Nelle battaglie, le inimiche schiere
Tutte disperde. Vanno scompigliate
Ambe allor dell'esercito nemico
L'ali quand'è sospinto alla battaglia,
E dell'oste barbarica la media
Turba ei rïempie di terror. Sgomento
E spavento ei che il può, dentro vi spande,
Di lor, che lo ripudiano, le teste
Abbatte al suol, di lor che lo ripudiano,
Lunge i capi disperde. Oh! desolate
Son le dimore, diserte di figli,
Squallide, dove ad abitar si stanno
Quei che Mithra ripudiano, protervi,
Di santità nemici; e tortüoso
Segue e triste sentiero ogni giovenca

(1) È il dio Sole che domina tutti gli spazi celesti (che sono i suoi pascoli come dice l'inno) e vede dall'alto tutto ciò che si fa in cielo e in terra. È altresì il dio custode della fedeltà, dell'amistà, delle promesse, dei patti conchiusi. Perciò, si giurava in suo nome come attesta anche Senofonte (*Cyrop.* VII, 2, 53). È inoltre dio bellicoso e armigero, punitore del tradimento e della mala fede.

Dall'unghia ossuta là, nelle contrade
Di chi Mithra rinnega. Essa, di tali
Empi al carro aggiogata, assai di lagrime
Bagnata il ceffo, là si arresta; e i dardi
Pennuti di costor, ben che da un arco
Ch'è ben teso, scagliati, anche sospinti
Via dalla corda, fendon l'etra invano
Quando adirato, in suo corruccio, in nulla
Propizïato, possessor di vasti
Pascoli, Mithra a' suoi nemici avventasi.

. . . .

Trema Anra Mainyu (1) a lui dinanzi, quello
Ch'è pien di morte, e trema innanzi a lui
Aesma tristo, tutto reo; Busyasta
Che ha lunghe mani, trema innanzi a lui,
E innanzi a lui tutti tremano i Devi
E quei dell'aria e quei malvagi e rei
Che del Varena sono (2). Oh! non sia mai
Che vadasi per noi di Mithra irato,
Dai vasti paschi, ad affrontar la possa!
Oh! non sia mai che irato ei ci percuota,
Mithra dai vasti paschi, egli, il più forte
De' Geni (3), il più valente, il più aitante
Dei Geni tutti, d'essi il più veloce,
Che alla terra s'attien quale il più invitto
De' Geni, di gran pascoli signore.
Mithra adunque adoriam dai vasti pascoli,
Vigile, insonne! Tremano gli aerei
Devi dinanzi a lui, tremano i Devi
Malvagi e tristi del Varena; e intanto
Ei sì, dai vasti pascoli, signore
Di regïoni, da man destra avventasi

(1) Il dio malvagio, creatore del male, detto altresì Ahrimane.

(2) Aesma (Aeshma-daêva, donde il nostro Asmodeo), il demone dell'ira; Busyasta, il demone femminile del sonno, scacciato al mattino dal canto del gallo; i Devi o Daêvi, demoni, creature diaboliche di Ahrimane. Non si sa bene che sia il Varena; forse una regione mitica.

(3) I Geni buoni creati da Ahura Mazda in opposizione ai Devi o Daêvi di Ahrimane.

Di questa terra ch'è rotonda e vasta,
Che ha lontani confini. Ei, di gran possa,
Sempre le frecce sue, di penne adorne,
Scaglia sui Devi, e allor che là discende
Carreggiando ove son le regïoni
Dei nemici di Mithra, egli pel primo
Su cavalli ed eroi sferra la clava,
A questi e a quelli di sgomento il core,
Ai combattenti e a' lor cavalli, ingombra.
. . . .

Mithra adunque adoriam dai vasti pascoli,
Vigile, insonne, dall'argenteo casco,
Dall'aureo usbergo, che la morte arreca
Di pugnal, di gran possa ed aitante,
Guerrier curule, e di villaggi sire!
Luminosi di Mithra ènno i sentieri,
Ed ei per quella via per cui s'avanza
Bene onorato, in pascoli fecondi
Converte le ampie regïoni. Allora
Di propria voglia governando incede
Ed uomini ed armenti. Oh! venga adunque
Mithra al soccorso nostro ed Aura seco,
Ambo eccelsi, nell'ora in che le frecce
Alto mandano un sibilo, e le nari
Sbuffano dei destrieri, e stridon l'aste,
E le corde stridendo avventan punte
Dall'arco acute, e al suol caggion trafitti,
Con sconvolte le chiome e rabbuffate,
Di quelli i figli che hanno offerte ree.

III. Inno alla dea delle acque, Ardvi Sura Anahita (1).

(*Yasna*, LXIV, 1-47).

L'acqua Ardvi Sura venerar vogl'io,
Purissima, che vaste ha le correnti,
Salutare acqua, ai démoni nemica,

---

(1) Antica divinità di origine assira il cui culto venne alquanto tardi agl'Irani, nota anche ai Greci col nome di Anaitis, cioè Anahita, e da loro identificata ad Artemide. Aveva culto a Babilonia, a Susa, a Damasco, a Sardi, a Ierocesarea.

Della fè d'Aura Mazda! E le si addice
Lode quaggiù dal terren mondo, encomio
Dal mondo di quaggiù, ch'ella è datrice
Pura di vita, donatrice pura
D'armenti, pura di dovizie e beni
Elargitrice e d'opulenza e d'ampie
Regïoni. De' maschi ella purifica
I germi tutti, e l'alvo per il parto
Alle femmine tutte ella fa puro
Che figliar dènno. Un partorir felice
Dà alle donne feconde, e l'opportuno
Ritüal latte a lor che già son madri.
  Ella è grande e da lunge celebrata,
Tanto grande così, quanto son l'acque
Tutte che scorron per la terra, tanto
Forte così, che giù dall'alto scendesi
Dalle cime d'Hukairya in fino al lago
Di Vourukasha (1). Là, di Vourukasha
Nel lago allor che scende, ecco! le foci
Di queste acque congiungonsi, e di mezzo
Tutta in esso scommuovesi la parte,
Chè là in quell'acque avventasi correndo,
Chè là in quell'acque gorgogliando scende
Ardvi Sura Anahita. E mille intanto
I fiumi sono e le correnti mille,
E d'essi ognuno ha corso che pareggia
Di venti e venti dì d'uom che aitante
Destrier si monta, il corso. In una sola
Corrente aggiunte, queste e cotali acque
Via dal lago disperdonsi pei sette
Climi di questa terra. Ardvi le spande
Attorno sempre e d'estate e d'inverno.
  Dall'uom che tristi ha i suoi pensieri, oh! mai
Non scendan le nostr'acque, e non da lui
Che ha ree parole, non da lui che ree

---

(1) Hukairya, una delle vette del mitico monte Hara-berezaiti ai confini della terra. Vourukasha è il mitico mare in cui si raccolgono le acque tutte.

Opre compie quaggiù, non da chi addetto
È ad empia fede, non da lui che offesa
Reca agli amici, ai prossimi, ai congiunti,
Che i Magi offende! Giovamento a lui
Che i campi nostri non offesi offende,
Non rechin mai queste acque nostre intatte,
Che Aura Mazda creava eccelse e buone.
Esse, che sante e pure ènno ed eccelse,
Che Aura Mazda creava, a lui nessuno
Apportin giovamento, a lui che offende
I nostri corpi non per anche offesi,
Ch'è vïolento, ladro dell'altrui,
Micidïal, dator di morte a' pii,
Malïardo, di morti in sepoltura
Sotterrator (1), di voglie triste, avaro,
Eretico non pio, mortal protervo,
Tiranno ed oppressor! Ma sì gl'incolga
Ogni malanno! Quello incolga a lui
Ch'ei vassi disïando e a questo e a quello!
  Acque, venendo qui, deh! vi posate,
Deh! vi posate, mentre che v'adora
Il sacerdote e prega. Oh! di qual guisa
Il sacerdote con l'appreso carme
Celebrerà quest'acque buone? Inerte
Ei ben la lingua avrà quando le adori
Non al rito conforme! Or, come mai
Il carme adoprerà che già gli apprese
Il suo sacro maestro? E di qual guisa
Le sue preci saranno, e i voti suoi,
Di qual guisa le offerte, a Zarathustra
Già da Aura Mazda apprese, e che ai viventi
Di quaggiù tutti Zarathustra indisse?
  Ma tu frattanto, o Zarathustra, prima
Tu questa prece volgi all'acque, e poi

(1) Era vietato ai Zoroastriani di sotterrare i cadaveri, perchè essi, contaminati dalla morte che è creatura del dio del male, contaminano la terra che è creatura del dio del bene Ahura Mazda.

All'acque, o pio, le addimandate e pure
Offerte reca, e questo dir vi adopra:
" Acque, a voi questo dono inclito io chieggo!
Mel date voi! Nel darlo, a me tal bene
Verrà che non mentisce. Acque, pur questo
Dono vi chieggo, dono ampio e valente,
Forte una prole, di cui molti ancora
Avrìan desire. Nè la braman essi
Per tema che hanno di iattura o piaga,
D'estinzïon per tema, o di vendetta,
O di morte. Una grazia anche vi chieggo,
Acque, e la chieggo a te, Terra, a voi, Piante,
A voi, Santi immortali (1), e voi la date,
Acque, a me con un'altra, e questa sia
Di tutte l'altre la maggiore, e sia
Di tutte l'altre la miglior, di tutte
L'altre l'eletta e di valor più grande! „.

IV. Leggenda del re Yima.

(*Vendidad*, II, 1-39; 42-99; *Yasht*, IX, 30-38).

Così allora ad inchiedere si fea
Zarathustra (2) Aura Mazda: O santo Spirto,
Aura Mazda, che gli esseri terreni
Creasti, o puro, a chi mai tu primiero
Fra i mortali volgesti una parola
Tu, che Aura Mazda sei? A chi primiero,
Oltre di me che Zarathustra sono,
Questa religïon manifestasti
Che è tua, che è mia? — Questa risposta allora
Aura Mazda rendeva: A Yima, al bello,
A quel d'inclito popolo signore,

---

(1) I sette Amesha Spenta o Imshaspandi, cioè i Santi immortali, che rappresentano diverse virtù morali, e della cui schiera, al primo posto, è lo stesso creatore Ahura Mazda.

(2) Zarathustra cioè Zoroastro profeta e legislatore (vedi l'avvertenza a principio). Molta parte dell'Avesta è in forma di dialogo tra il creatore Ahura Mazda e Zarathustra.

O santo Zarathustra! A lui primiero
Fra i mortali io rivolsi una parola,
Io che Aura Mazda sono, e a lui primiero,
Oltre di te che Zarathustra sei,
Questa religïon manifestai
Che è mia, che è tua. Per che così gli dissi
Io che Aura Mazda sono, o Zarathustra:
" O Yima, o bello, o figlio a Vivanhante (1),
Vieni a me qual maestro alla mia fede,
D'essa propagator! „. — Ma Yima il bello,
O Zarathustra, così allor mi disse:
" Non a cotesto atto son io. Non io
Ebbi dottrina perchè alla tua fede
Fossi maestro e banditor „. — " Se adunque
(Io che Aura Mazda son, così gli dissi),
Se per me adunque nè maestro vieni
Nè banditor della mia fede, oh! questi
Terreni esseri miei (2) tu mi sostenta,
O Yima, e tu gli accresci, e a me sottentra
Guardïano degli esseri terreni,
D'essi proteggitor vienmi e custode! „.
E Yima il bello, o Zarathustra, allora
Così mi rispondea: " Gli esseri tuoi
Terreni prosperar ti farò io,
Crescere io ti farò questi terreni
Esseri. A te sottentrerò di questi
Esseri tuoi custode e protettore.
Oh! fin ch'io regni, mai non sia che ardori
Sopravvengano estivi e freddi inverni,
Non tabe alcuna esizïal, non morte! „.
Io che Aura Mazda son, gli porsi allora
Un'arma, ed era un pungolo dorato,
Tutto d'oro un aratro. Ebbesi Yima
In man la regia potestà. Ma intanto,

---

(1) Cioè *il lucente* (in sanscrito Vivasvant) antica personificazione mitica del sole.

(2) Gli uomini e tutti gli animali buoni e utili all'uomo, che sono creature di Ahura Mazda.

Yima regnando, ben trecento inverni (1)
Trapassaron così, quando la terra
Tutta era ingombra d'armenti e di bovi,
Di cani ingombra e d'uomini e d'augelli,
Di fuochi rossi e ardenti. In essa omai
Loco più non potean bovi od armenti,
Non uomini trovar, perch'io consiglio
A Yima così porsi: " O Yima, o bello,
O figlio a Vivanhante, ingombra omai
Si fe' la terra e d'armenti e di bovi,
Di cani ingombra e d'uomini e d'augelli,
Di fuochi rossi e ardenti. Un loco in essa
Bovi e armenti non han, non han gli umani ".
  Yima allora degli astri ver la via,
Del mezzodì verso le plaghe, al corso
Del sol conforme, si movea. Con quello
Aratro d'oro il suol rompendo ei venne,
Fendendo il venne con quell'arma, e intanto
Così dicea: " Deh! cara e santa Armaiti (2),
Al pregar mio dirómpiti, ti fendi,
Nutrice sii d'armenti, uomini e bovi! ".
  Così d'un terzo ancor, più che non era
Vasta dapprima, egli aggrandì la terra,
Sì che ivi si aggirâr bovi ed armenti
Ed uomini conforme a lor desìo,
A lor voglia così, come pur era.

A questo punto si rifà, con le stesse parole, la narrazione di sopra per dire che passarono ugualmente sotto il regno di Yima altri trecento anni e poi altri trecento ancora, e come, alla fine di ciascuno di questi periodi, egli ampliò d'un terzo la terra, cioè ne rese abitabile un'altra parte introducendovi l'agricoltura. — Segue ora la leggenda del diluvio.

  Ed ecco un'assemblea coi santi Spirti
Aura Mazda creante indisse allora,
Illustre in quella, di santa natura,

---

(1) Cioè trecent'anni.
(2) Il Genio femminile della terra.

Irania terra; e indisse un'assemblea
Yima il fulgido, quel d'inclite genti
Yima signor, con gli uomini d'allora
I più prestanti, celebrato in quella
Irania terra di santa natura.
Venne a quell'assemblea coi santi Spirti
Aura Mazda creante, inclito in quella
Irania terra di santa natura;
E Yima anche vi scese, egli, lo splendido,
Signor d'inclite genti, illustre in quella
Irania terra di santa natura,
Con gli uomini d'allora i più prestanti.
A Yima allor così dicendo, O Yima,
Aura Mazda si volse, o Yima, o bello,
Figliuol di Vivanhante, ecco! sventura
D'intemperie a venir già già s'appresta
Nel terren mondo, e turbine di neve
A principio cadrà là sovra i monti
Che più alti sono, e giù nelle bassure
Dell'ardue regïoni. Allora, o Yima,
Terza una parte degli armenti in questa
Terra morrà, di quelli ch'ènno in lochi
Più perigliosi, e di quei che alle alture
Stanno de' monti, e di quei che le gole
Delle valli frequentano, e di quelli
Che stanno in abitacoli sicuri.

Segue un breve passo quasi indecifrabile (che si ommette), tanto è guasto il testo, con parole oscure, in cui sembra descriversi la devastazione e la desolazione della terra. Ahura Mazda, a questo punto, indica a Yima il modo di salvarsi, con parte dei viventi, dal prossimo disastro.

Un recinto farai. Quello farai
Lungo ciascun de' quattro lati suoi
Quanto la corsa d'un cavallo, e dentro
E d'armenti e di bovi ogni semenza
E d'uomini e d'augelli accoglierai;
I semi v'accorrai de' fuochi ardenti

E rosseggianti. Il recinto farai
Lungo ciascun de' quattro lati suoi
Quanto la corsa d'un destriero, e sia
Stalla agli armenti. E l'acqua anche v'adduci
Per un calle che un hathra (1) in sua lunghezza
Uguagliar possa, e nel recinto intanto
Gli augelli apposta, e grano a lor provvedi
Biondeggiante che mai non manchi o scemi
Per mangiarne ch'ei facciano. Tu poi
Vi rizza ostelli e case con colonne,
Vestiboli e recessi. Anche v'accogli
Tutti di maschi e di femmine i germi
Che son di questa terra i più prestanti,
I più belli, i più forti. Indi v'adduci
Quelli di tutte specie di bestiami
Che son di questa terra i più prestanti
Germi, i più belli e forti, e vi raccogli
Quanti più eletti sulla terra stanno
D'alberi semi, i più odorosi; e semi
Anche vi poni d'ogni cibo, quali
Di questa terra sono i più fragranti
E a gustar più soavi. Or tu cotesta
Gente per coppie indefettibil rendi
Fin che là, nel recinto, essi dimora
Con te, Yima, faranno. Ivi non mai
Gibbosa forma da retro o davanti
Veggasi, o Yima, non balbuzie mai,
Non trista povertà, non di persona
Picciolezza o difetto, e non di corpo
Altezza che soverchi, e non di denti
Lunghezza estrema, non alcun de' tanti
Infausti segni che a' viventi apporre
Suole Anra Mainyu (2), non empie parole,
Non frode o inganno! In quello degli ostelli
Che più alto sia, nove ripiani appresta;
In quel di mezzo, sei; tre, nel più basso;

(1) Misura di lunghezza di cui non si conosce il valore.
(2) Il dio malvagio Ahrimane. Vedi sopra.

Poscia in quel primo mille riporrai
Germi d'uomini e donne, in quel di mezzo
Seicento germi, e sol trecento in quello
Inferïor. Tutti li guida, o Yima,
Là nel recinto col tuo pungol d'oro,
E muri intorno vi conduci, e in proprio
Loco v'apri finestre, ed abbian luce.
Yima allor si pensò: Di qual mai guisa
Farti potrò, quale tu a me dicesti,
Il recinto, Aura Mazda? — A Yima allora
Aura Mazda rispose: O Yima, o figlio
Bello di Vivanhante, ecco! tu dêi
Questa terra, calcando de' talloni,
Calpestar di tal guisa e tramenarla
Delle mani così, come son usi
Gli uomini calpestar molle la creta.

Il testo, a questo punto, descrive con le medesime parole il modo con cui Yima fece il recinto e come vi ricoverò la stirpe degli uomini e le razze dei bruti e le generazioni delle piante. È una antica narrazione del diluvio, molto simile alla mosaica. E forse è di origine semitica.

Accanto a questo racconto che tocca il regno felice di Yima, l'Avesta reca quello della caduta di lui, quando, contemplando egli le sue opere gloriose, si levò a superbia e volle proclamarsi un dio. Perdette allora la maestà reale, visibilmente manifestata da un'aureola luminosa che, secondo gl'Irani, cingeva la fronte dei loro re.

Segue ora il racconto dell'Avesta con cui si può confrontare l'altro di Firdusi nel Libro dei Re (vol. I, pag. 142 e segg. della mia traduzione).

Or la tremenda adorisi per noi
Maestà regia (1) che Aura Mazda fea
Creando, assai laudabile, superna-
mente fautrice, salutar, splendente,
Possente, a tutte le create cose

---

(1) La maestà regia è concepita dagl'Irani come un nimbo o aureola luminosa che cinge il capo dei sovrani prescelti dal cielo a regnare. Vedi sopra la nota in prosa intercalata.

Sovrastante, che un dì si discendea
Sul capo a Yima splendido, signore
D'inclito gregge (1), in quello dïuturno
Tempo ch'egli regnò su questa in sette
Climi terra divisa. Ei dominava
E gli uomini e i Daévi e le Pairike (2),
I maghi e gli empi tutti e gl'infedeli,
Quale ai Daévi ambo rapìa cotesti
Possessi, buono stato e di ricchezza
Copia e dovizia. Lor togliea pienezza
Di beni e copia di bestiami. Gloria
Ed alimento lor togliea. Lui sire,
Mai non scemaro la bevanda o il cibo
Ai viventi quaggiù, nè furo a morte
Soggetti uomini e armenti. Alberi ed acque,
Yima regnando, mai non disseccaro.
Yima regnando, non ardor d'estati,
Non stridor fu d'inverni, e non vecchiezza,
Non morte fu, non quella che i Daévi
Creâr, l'invidia, fin che scevro ei fue
Da menzogna, finch'ei, nella sua mente,
Quella non ebbe accolta empia parola,
Menzognera parola (3). Oh! ma la rea
Menzognera parola allor ch'egli ebbe
Nella sua mente accolta, ecco! fuggirsi
In forma d'un augel visibilmente
Via da lui l'aureo nimbo! Allor che in pria
Non vide più quell'aureo nimbo, il fulgido
Yima, quel sire d'un bel gregge, in core
Turbato e tristo giù cadea, da tristi
Pensieri oppresso stramazzando al suolo.

---

(1) Cioè signore d'un popolo forte; designazione bellissima d'un sovrano di genti, che occorre anche nella Bibbia, nei poemi di Omero (Agamennone pastor di popoli), e nel Libro dei Re, di Firdusi.

(2) Concetto del dominio universale su tutto il creato, attribuito allora al sovrano della terra come vicario di Ahura Mazda. I Devi o Daêvi sono demoni, creature del dio del male (v. sopra); le Pairike sono esseri diabolici femminili che con la loro bellezza conducono a perdizione gli uomini.

(3) Quando volle farsi adorare come un dio.

V. Glorificazione di Haoma (1).

(*Yasna*, IX, 1-20; 49-82; XI, 1-36; XI, 16-22).

Haoma, nell'ora in che spuntava il giorno,
Da Zarathustra venne un dì, nel tempo
Che Zarathustra intento era la pura
Fiamma del fuoco in adorar (2), nel tempo
Ch'egli udir fea li sacri canti (3). Allora
Zarathustra il richiese: E tu chi sei,
Tu, cui vid'io, nella persona sua,
Per tutto il terren mondo, il più avvenente,
Nella persona splendida, immortale?
Haoma l'intègro allor, che lungi arresta
La morte, così disse: Haoma son io,
O Zarathustra, l'integro, che lungi
La morte arresta. Oh! tu, santo, alla traccia
Vanne di me, spremi del succo mio (4)
Perchè poi tu ne gusti, e mi fa lode
In un canto di gloria in quella guisa
Che altri pii già di me fecer le lodi.
Ad Haoma gloria sia! rispose allora
Zarathustra così. Ma qual, rispondi,
Haoma, primiero ti spremea (5) di questo
Terreno mondo a pro'? Qual grazia a lui
Toccava? Quale a lui favor sorvenne?
Haoma l'intègro allor, che lungi arresta
La morte, rispondea: Fu Vivanhante
Quei che primiero mi spremea di questo

(1) È il Genio della pianta *haoma*, l'*Asclepias acida* ovvero *Cynanchum viminale* dei botanici, dai fiorellini gialli, dal gusto acido, che, pestata nei mortai, forniva nei sacrifizi rituali il succo sacrificale. Il Haoma iranico corrisponde perfettamente al Soma indiano (rad. ind. *su*, iran. *hu*, spremere), Genio divino e insieme libazione sacrificale.

(2) Vedi sopra l'inno al Fuoco, al n. I.

(3) I sacri inni che anche la critica moderna, quasi concorde, crede essere opera di Zarathustra stesso. Vedi più innanzi il numero VI.

(4) Vedi la nota 1 qui sopra.

(5) Si badi a quest'uso promiscuo (qui e più avanti) del senso materiale (*haoma*, pianta) e del simbolico (*Haoma*, Genio).

Terreno mondo a prode. E gli sorvenne
Questo favor, toccavagli cotesta
Grazia, che un figlio nacquegli, e fu Yima (1),
Fulgido, re d'inclite genti, illustre
Fra i nati al mondo, che di sol l'aspetto
Quaggiù avea tra i mortali. Ei fe' che, al tempo
Di suo regnar quaggiù, la morte mai
Non vedesser gli umani e non gli armenti,
Non disseccasser mai piante e fontane,
Alimento prendessero i mortali
Qual giammai non scemò. Lui imperante,
Valente e prode, non spiraron venti
Freddi mai, non cocenti, e non vecchiaia
Era allora e non morte e non invidia
Che i dèmoni creâr. Padre e figliuolo
Aggiravansi allor per l'ampia terra
Qual se d'essi ciascuno in sua persona
Anni quindici avesse. E fu cotesto
Fin che Yima regnò, quello, di genti
Belle signor, di Vivanhante il figlio.

Seguita il testo raccontando, con le stesse parole, degli uomini che onorarono il Genio Haoma e ne spremettero il succo vitale, e dei beneficî che ne ritrassero. Essi sono: Athvya, che perciò ebbe un prode e valente figlio, il re ed eroe Thraetaona; Thrita, che andò lieto di due animosi figli; Pourushaspa, che ebbe il vanto di divenir padre di Zarathustra, profeta e legislatore. — A questo punto, il testo reca il seguente inno di gloria ad Haoma:

Ad Haoma gloria sia! gridava allora
Zarathustra così. Haoma gli è buono,
Santamente creato! Egli è datore
Di giustizia, di beni egli è datore,
Salutifero egli è, d'inclito corpo,
Benefico, vincente; aureo colore
L'adorna e veste, negli steli suoi
Flessibile, pieghevole. E soave

(1) Per questo mitico re ed eroe, vedi il numero IV che precede.

Egli è, se alcun ne gusta, all'alme tutte
Apportator di grazie e benefici.
Or io di te proclamo la scïenza,
O biondo, e la possanza e la vittoria;
Proclamo il tuo vigor, la possa tua
Che dà salute, il crescer tuo proclamo
E il tuo vigoreggiar, la tua proclamo
Virtù che a tutti si propaga i corpi,
E l'onniforme tua grandezza. Oh! tanto
Di te vo' celebrar perchè concesso
Di correre a me sia le regïoni
Ampie del mondo, in poter mio disciolto,
Tutti i malvagi conquidendo, e i rei
E le druge atterrando (1). Io di te questo
Vo celebrando per ch'io l'empia voglia
Rintuzzar possa de' malvagi e rei,
E dei Devi e degli uomini e dei maghi,
Degli empi rintuzzar, delle Pairike
E dei ciechi e dei sordi (2) ogni disegno,
Dei serpi e degli eretici che due
Han piè, de' lupi che n'han quattro, schiera
Nemica, avversa, che s'avventa e irrompe,
Subdola, ingannatrice, ampia la fronte!
Questa grazia primiera io ti domando,
Haoma, che lungi la morte trattieni,
Il Paradiso ch'è l'ostel de' pii,
E la luce che assomma ogni altra luce!
Questa grazia seconda io ti domando,
Haoma, che lungi la morte trattieni,
Sano vigor della persona mia!
Terzo questo favore io ti domando,
Haoma, che lungi la morte trattieni,
Lunga esistenza con vital vigore!
Quarto questo favore io ti domando,
Haoma, che lungi la morte trattieni,
Ch'io forte e sempre al mio desìo conforme

(1) Le Druge sono esseri femminili demoniaci, fautori della menzogna e della mala fede.

(2) In materia religiosa. Per le Pairike, vedi una nota al n. prec.

Possa aggirarmi per la terra, l'opre
Struggendo ree, le druge conquidendo.
Quinto questo favore io ti domando,
Haoma, che lungi la morte trattieni,
Ch'io vincitor, colpi in assalti e pugne
Sferrando, vada per la terra, l'opre
Struggendo ree, le druge conquidendo.
Sesto questo favore io ti domando,
Haoma, che lungi la morte trattieni,
Ch'io primo il ladro scorger possa e l'uomo
Micidïal, ch'io primo vegga il lupo,
Che niun lo scorga pria di noi, ma noi,
Primi noi tutti scorgerlo possiamo.
A quelli tutti che veloci aggiogano
Coppie alla corsa di cavalli, forza
Haoma dona e vigore. Egli alle donne
Vicine al partorir splendidi figli,
Integri figli dona. A quei che intenti
Si stanno a meditar li sacri carmi,
Padri di genti, prospero uno stato
Haoma dona e grandezza, e alle fanciulle
Che lunga età non disposate stanno,
Valente e di grand'animo uno sposo
Manda che, saggio, le addimandi, e tosto.
Haoma già tolse a Keresáni il regno,
A lui, che, di regnar forte voglioso
Levandosi, dicea: " Niun sacerdote
Dopo me scorra queste regïoni! „.
Ei volea, Keresáni, ogni fiorente
Stato annientar, tutte volea costui
L'opre liete annientar per l'ampia terra (1).
Haoma, salute a te! chè, di vigore
Proprio armato, ten vai libero attorno
In tuo proprio volere! A te salute

(1) Passo oscurissimo, che si riferisce tradotto soltanto per congettura. Non si sa chi sia cotesto ignoto personaggio Keresani. Era forse un principe, nemico della religione zoroastriana, che fu sconfitto e ridotto al silenzio.

Che i molti carmi sai che furon pôrti
Con verità! Salute a te, che i carmi
Veridici non vai investigando! (1).
Aura Mazda però d'una cintura
Dono ti fe', di stelle adorna, in cielo
Oprata un dì, la fè buona di Mazda,
Di cui, de' monti sovra l'ardue vette,
Accinto stai per che tu renda assidui
Della legge divina e i canti e i doni (2).

Segue ora la preparazione della bevanda sacrificale, estratta dalla pianta haoma:

Lungi di qui s'involino i demóni,
E con essi lor femmine, e s'avanzi,
Qui a dimorar, Sraosha buono, e seco
Ashi buona si stia! (3). Venga e si piaccia
Ashi buona di starsi in questa casa
Che d'Haoma, germe santo, è proprio albergo.
. . . .
Io benedico e le nubi e la piova
Che di te il corpo crebbero dei monti,
Là, sulle alture, e i monti benedico
Alti ove cresci! Questa io benedico
Terra ampia e vasta, fertile, benefica,
Che puro ti nudriva, Haoma, e quel loco
Di questa terra in che tu spunti, ed hai
Odor soave e lunge ti distendi,
Grazia e favore di Aura Mazda. E cresci,
Haoma, tu cresci là sui monti e attorno
Da tutte parti ti distendi. Oh! vera-
mente sei tu di purità la fonte!
Oh! possa tu, per le preghiere mie,
In ogni ramo, in ogni tuo germoglio,
In ogni germe tuo, prosperar lunge!

(1) Non ne dubiti come fanno i miscredenti.

(2) Altro passo oscuro, massime nei due ultimi versi. Si noti come la frase abbia senso reale e allegorico e simbolico nello stesso tempo.

(3) Sraosha è il genio buono che rappresenta l'obbedienza alla legge divina. Ashi è il genio femminile della pietà e della santità.

Haoma si cresce ov'ei laudato sia,
E vittoria maggior sempre s'acquista
L'uom che d'inni l'esalta. Or, la più lieve
Stilla d'esso spremuta, e la più tenue
Lode che a lui si faccia, e quel del succo
Di lui saggio più lieve, ènno alla morte
Uguali in forza di ben mille e mille
Demoni (1), e dall'ostello ove l'offerta
Ad Haoma è addotta, via s'invola e sperde
La trista impurità, là 've d'alcuno
Inno ei si laudi. Or io da lui domando,
Da lui ch'è salutifero, la bella
E forte sanità per questa mia
Casa e per questo borgo. E veramente
Gli altri farmachi tutti ènno d'Aesma (2)
Astato l'opra, ma quel d'Haoma viene
Da bella purità che l'alma allegra (3).
Esso il corpo ristora, e a chi 'l riceve
Sì come un figlio tenerello, in seno
Haoma penètra e sanità v'infonde.
Haoma, deh! porgi a me di que' tuoi farmachi
Onde salute apporti! Anche mi dona
Di que' tuoi modi di vittoria, vincere
Onde sai tu! Fa ch'io per te ne venga
Tuo prediletto laudator, chè quello
Aura Mazda creante un prediletto
Laudator proclamò, d'Asha Vahista
Migliore assai (4). Te conformava un dio
Artefice così, te ben creato
Ed aitante. Artefice ti diede
Figura un nume, a te ben conformato,
A te aitante, là, sovra le alture

(1) Cioè distruggono mille e mille Devi o demoni.

(2) Vedi sopra una nota al n. II.

(3) Allusione alla magìa e alle altre opere d'incantesimo per guarir morbi, in opposizione al succo salutare dell'*haoma*.

(4) Asha Vahista, il Genio personificato della purità.

Di Berezaiti (1), donde poscia augelli
Di santi e fausti segni attorno in tutte
Parti te trasportâr dell'ampia terra.
E tu cresci sui monti, Haoma, in diverse
Guise, tu pingue e di color dorato,
Là 've ti penetrâr, di Vohumano (2)
Per la virtude, i salutari umori.
Tu però la mia mente, Haoma, dilunga
Da ogni trista parola, e tu rintuzza
Di lui la mente che con ree parole (3)
Contro di me si leva. Ad Haoma gloria,
Ch'ei fa dell'uomo poverello e gramo
Ugual l'intento a quel d'ogni più ricco
E opulento di beni! Ad Haoma gloria,
Che ugual l'intento fa d'uom poverello
A quel di tal che in sapïenza è grande!

Si descrive ora la consumazione dell'offerta sacrificale:

Or ecco che Aura Mazda il padre mio (4)
Una parte, egli il puro! a me assegnava
Dell'ostia santa, al mio sostentamento,
L'occhio da manca e la lingua con esso
Della giovenca (5). Ma a colui che questa
Parte dell'ostia quale a me assegnava
Aura Mazda, torrà, quale a rapirla
O a sottrarla verrà, mai, nelle case,
Sacerdote non nasca o sovra il carro
Combattente guerrier, nè mai d'armenti
Custode nasca o guardïan; ma serpi
Nascano sempre e tristi insetti e d'opre
Mille e diverse tristi facitori!

---

(1) Il mitico monte ai confini della terra, Hara-berezaiti. Vedi una nota al n. III.

(2) Il Genio dei pensieri buoni e santi.

(3) Cioè con le vietate formole magiche.

(4) È Haoma che parla.

(5) La vittima immolata in sacrifizio.

VI. Domande del fedele intorno al perchè e all'origine delle cose (1).

(*Yasna*, XLIII, 1-7).

A te questo chiegg'io, tu il ver rispondi
A me, Aura Mazda! — Di qual culto, o Mazda,
Onorarti dovrò? Cotesto, oh! dica
Un amico tuo pari ad un amico
Qual io mi sono! Per la tua benigna
Santità, deh! ci manda alcun soccorso,
Ed essa venga a noi con Vohumano.
A te questo chiegg'io, tu il ver rispondi
A me, Aura Mazda! — Qual del Paradiso
Fu l'origine prima? e di qual foggia
Propiziar chi lo creò si debbe?
Per la sua santità veracemente
Santo, di tutti egli è la meta, amico
Mazda, all'un mondo protettore e all'altro (2).
A te questo chiegg'io, tu il ver rispondi
A me, Aura Mazda! — Chi fu il padre a questo
Ordin del mondo da principio, e quale
Colui che il procreò? Chi diede al sole,
Chi alle stelle la via? Chi, per cui cresce
La luna e scema? Or io, Mazda, cotesto
Ed altro ancor da te saper desìo.
A te questo chiegg'io, tu il ver rispondi
A me, Aura Mazda! — Chi sostien la terra,
E chi le nubi dal cader trattiene?
Chi le piante creò? chi l'acque? Ai venti
Chi fu che aggiunse ed alle nubi in alto

(1) Quest'ultimo passo è stato tolto di tra i canti o inni, detti *le gâtha*, che con ogni maggiore probabilità sono dovuti a Zarathustra stesso, mentre le restanti parti dell' *Avesta* non possono essere opera di lui. Queste *gâtha*, oltre essere oscurissime e difficilissime, scritte in un dialetto iranico più ruvido e aspro, vicinissimo tuttavia alla lingua del rimanente *Avesta*, contengono alte e astruse idee filosofiche e religiose che le differenziano di non poco dalle altre parti dell'*Avesta* stesso.

(2) Il mondo spirituale e il mondo materiale.

Velocità? Chi fu, Mazda, colui
Che un retto indusse e buono spirto in noi? (1).
A te questo chiegg'io, tu il ver rispondi
A me, Aura Mazda! — Qual mai destro artefice
Creò la veglia e il sonno? E chi le aurore,
Le notti e i mezzodì? Chi procreava
Quei che alla legge medita il pensiero? (2).
A te questo chiegg'io, tu il ver rispondi
A me, Aura Mazda! Proclamar vogl'io
Tutto cotesto, poi ch'è vero. — Accresce
Il senno adunque, per nostre opre egregie,
La nostra santità? Donasti adunque
Per buon consiglio a' tuoi che ti son fidi,
La signoria, pei quali un dì creasti
La datrice di beni agil giovenca? (3).
A te questo chiegg'io, tu il ver rispondi
A me, Aura Mazda! — Chi, di sua potésta,
L'alta saggezza un dì creò? Chi mai
Con sapïenza segno fea d'amore
Pel genitor la prole? Io di cotesto
Inchieditore a te ne vengo, o Mazda,
Santo spirto, fattor di tutte cose! (4).

(1) L'istinto buono, innato nell'uomo, quello del bene, opposto a quello del male, pure innato nell'uomo. Da questo concetto s'è svolto poi l'altro del dualismo, che informa tutta quanta la religione zoroastriana, tra il bene e il male, inerente nel mondo, personificato nel dio buono Ahura Mazda (Ormuzd) e nel dio malvagio Anra Mainyu (Ahrimane).

(2) Cioè che significhi, che voglia dire la legge divina. Il passo è incertissimo e tradotto soltanto per congettura.

(3) La giovenca primeva, simbolo della fecondità della natura, stata creata da Ahura Mazda al principio del mondo col primo uomo Gaya-maretan, scannata poi dal dio del male Anra Mainyu o Ahrimane. L'anima della giovenca scannata salì allora al Paradiso e là, nel cospetto di Ahura Mazda, si lagnò della patita offesa. Ahura Mazda le annunziò un riparatore nel profeta Zarathustra. — Anche questo passo è molto oscuro e incerto nel testo.

(4) Seguono, nel testo, altre domande, ma di natura assai più oscura e di assai più difficile intelligenza.

Il modo (" Auflage ")
nella legge successoria germanica.

Nota del Dr. V. A. COTTINO.

La natura dell'istituto e il modo con cui è regolata la sua esecuzione sono i due punti su cui a preferenza ci soffermeremo perchè, a nostro avviso, di più vivace interesse per la dottrina.

I. Il Cod. civ. Germ. del '900 ha improntato decisamente ad istituto autonomo con propria fisonomia l'onere nelle disposizioni testamentarie per il prevalere contro la dottrina dei Pandettisti che scorgevano nel *Modus* del diritto romano un termine accessorio del rapporto giuridico o ne facevano una specie di una cerchia più ampia di istituti giuridici accessori (1). Ed esce codesto istituto senz' altro dal disposto del § 1940 " Der Erblasser kann durch Testament den Erben oder einen Vermächtnissnehmer zu einer Leistung verpflichten ohne einem Anderen ein Recht auf die Leistung zuzuwenden ". Non più l'entità complessa — patrimoniale e personale — dell'eredità o l'entità esclusivamente patrimoniale del legato, ma un' entità da cui fuoresce tutto quanto ha tratto a vantaggi patrimoniali strettamente intesi, un' entità che rientra in una sfera di rapporti d'ordine etico e sociale. Non havvi nel caso un erede con diritto ad un'eredità, un legatario con diritto ad un legato, havvi

(1) D'un lato ricorderemo il Böcking, *Condictio, dies u. Modus machen das Ob, Wann u. Wie der Rechtsgeschäfte von einem Ereignisse abhängig* (*Pandekten*, vol. 1°, p. 387 ss.) e con lui il Scheurl che sostanzialmente vi aderisce (*Beiträge*, vol. II, p. 19 ss.). Dall'altro il Windscheid (*Die Lehre des röm. Rechts von der Voraussetzung*) che avrebbe voluto fare della " Voraussetzung " un concetto suscettibile di effetti giuridici e nell'ámbito suo comprendervi il " Modus ": teorica combattuta vittoriosamente dal Lenel (*Lenel's Archiv*, vol. 74) a cui è riconosciuto il merito se la teorica non passò nella legislazione.

qui (e può anche non esservi senza che rimanga tocca la natura dell'istituto) un terzo che dall'effettuazione della volontà del " de cuius „ deve trarre vantaggio senza che a questo però la legge, pur soccorrendo per altra via, riconosca un diritto al contenuto della " Auflage „ stessa. Il legislatore, con compiutezza di pensiero, ha inteso, nella triplice gradazione, soddisfare al suo obbligo di regolare le azioni umane assicurando l'adempimento dei bisogni e desideri più vari del " de cuius „ ; e nella gradazione è venuto scemando la cerchia dei doveri e dei diritti man mano che l'istituto ereditario, scartandosi dal tipo completo dell'eredità, viene semplificandosi ed a rispondere ad esigenze ed interessi sempre minori. I pochi tratti sull'istituto ci autorizzano di già a distinzioni:

a) " Auflage „ non è condizione. La condizione è parte nell'esistenza di un rapporto giuridico, la " Auflage „ è rapporto a sè; la condizione ha ragion sospensiva o risolutiva, l'onere non è che ragion coercitiva il cui adempimento, per regola, non si riflette sul rapporto giuridico principale. " Die Bedingung — " dice il Savigny — suspendirt, zwingt aber nicht, der Modus " zwingt, suspendirt aber nicht „ (1);

b) " Auflage „ non è fondazione. Nel caso della fondazione viene a sussistere un ente autonomo che fa suoi i beni che il " de cuius „ gli ha destinato come mezzi al soddisfacimento dello scopo a cui deve la vita sua, nel caso della " Auflage „ noi ci troviamo di fronte ad una missione, ad un voto che il " de cuius „ ha eretto ad obbligo dell'erede, legatario o del fisco stesso;

c) La " Auflage „ viene infine ad aver caratteristiche proprie anche di fronte alla " donatio sub modo „; chè la " donatio sub modo „ determina nel donatore ed eventualmente anche nel terzo un diritto all'adempimento dell'onere stesso, la " Auflage „ invece non origina che un obbligo nell'erede o legatario.

Nella " Auflage „ havvi un rapporto obbligatorio che si esplica soltanto passivamente: cioè per quanto ha tratto all'obbligo della prestazione. Dice il § 1940 citato: Il " de cuius „ può obbligare per via testamentaria l'erede od un legatario ad una prestazione...

(1) *System des heut. röm. Rechts*, vol. 3, p. 231.

a) È richiesto un erede o legatario perchè possa dal " de cuius „ istituirsi una " Auflage „ ? Stando ai principî informatori dell' istituto non si può elevare il requisito a " condictio sine qua non „ : onerati possono essere anche gli eredi legittimi, poichè il testamento può limitarsi alla costituzione di una " Auflage „, in mancanza di eredi, il fisco stesso nella sua qualità di " heres extremus „.

b) Quale sarà il contenuto della prestazione? Il testatore può aver di mira o l' interesse dell' investito — un viaggio di salute — o l' interesse suo proprio — l'erezione di un monumento funerario — o l' interesse di un terzo — l' istituzione di una borsa di studio ad uno studente povero.

I Pandettisti distinguono un " modus simplex „ ed un " modus qualificatus „ che comprende i due ultimi casi. Il primo molto spesso si riduce ad un desiderio, ad un consiglio del defunto, che non può avere riflessi giuridici. Secondo il Dernburg che s'appoggia, richiamandosi ad un ipotetico interesse ideale del " de cuius „, sulla legge 7 D. XXXIII, 1 codesto " modus simplex „ avrebbe avuto forza coattiva dall'epoca imperiale in poi nei casi in cui il testatore mostrava di voler ordinare più che consigliare (1). Esso poi, sempre secondo il Dernburg, sarebbe stato accolto dal Codice civile del '900 poichè la teoria del diritto imper., passata nella pratica comune e nel diritto prussiano, non risulterebbe aver avuto interruzioni o sanzioni all'incontrario nella vigente legislazione germanica (2). La teorica però non regge: si obbietta dagli avversari che il § 1940 parla espressamente di obbligo; ora un rapporto obbligatorio, per la sua stessa essenza, richiede una sfera di interessi che stia di contro a chi lo contrae, l'onere è onere in quanto, pel suo contenuto, costringe chi di ragione ad azioni od omissioni le quali ricadono sulla sfera dei suoi interessi ledendola in alcuni punti e, nel caso, la stessa esecuzione forzata di cui nel § 2194 non potrebbe aver luogo. La risoluzione, a nostro avviso, deve partire, più che da una letterale interpretazione della legge, da quel che è la volontà del defunto di fronte a quella dell'erede o legatario investito: chè se si appalesa chiara una differenza

---

(1) *Pandekten*, vol. I, § 115, n. 6.
(2) *Das bürg. Recht*, vol. 5°, § 86, p. 242.

di estimazione fra ciò che è volontà del " de cuius " e ciò che è volontà dell'erede o legatario se, cioè, cotesto vantaggio che viene al medesimo in conseguenza della " Auflage " non è propriamente tale anche nella sua estimazione, allora non vediamo ragione per negare la validità della " Auflage " *considerata come giuridica limitazione della libertà dell'Investito*. Diversamente non stenteremo a riconoscere nella volontà del defunto un legato anzichè una " Auflage "..

La disputa si riaccende quando si tratta di delimitare lo scopo e il contenuto della " Auflage ". Si avrà a dir nullo un onere avente mire stravaganti e burlesche? Stando a ciò che è funzione della legge, ai principî etici che la sorreggono più che a generalissime verità non v'è dubbio da sollevare, nè a tal deduzione si oppongono, come vorrebbe il Dernburg (loc. cit.), i lavori preparatorî perchè, se è vero che in seno alla seconda Commissione fu respinta la proposta in omaggio alla quale avrebbe dovuto il legislatore stabilire che " eine Auflage bei der " es offenbar an einem verständigen Interesse fehle, unwirksam " sein solle ", ciò fu per evitare a che l'estimazione soggettiva del magistrato avesse pericolosamente a sostituirsi a quella del " de cuius " e la Commissione conchiudeva essere una norma espressa a tal riguardo pericolosa e superflua ad un tempo. Ed a ragione perchè a suo favore o, più chiaramente, a favore della sua applicazione, parla tutto quel che è essenza della legge senza che si debba in altra guisa esporsi ad arbitrî dannosi del magistrato (1).

A tenore del § 2171 avocato in applicazione dal § 2192 l'onere non deve ledere i divieti legislativi ed i buoni costumi: decisivo è, contrariamente a quanto disponeva il diritto romano, il momento dell'apertura dell'eredità: però mentre è valida la " Auflage " istituita pel caso che cessi un determinato divieto legislativo (valga l'esempio della rappresentazione di un dramma vietato per ragioni politiche) è nullo senz'altro l'onere che al momento della sua istituzione contraddice ai buoni costumi e ciò in omaggio a quel che di perdurante insito nella Pubblica Moralità e che vien sottratto ad ogni passeggiera contingenza.

Nei suddetti confini è fatta legge la volontà del testatore:

(1) *Protokol.*, vol. 5° (1899), p. 243.

qui però potrebbe essere portato utilmente in campo il concetto che il Kohler nel suo Archivio esprime: " Religion, Liebe, und " Anstand seien die Gebiete in Ansehung deren Verabredung " dem Verkehre entzogen seien „ (1); concetto che può richiamarsi anche per quanto ha tratto alla " Auflage „ se, come dice bene lo Strohal, può solo essere eretto ad obbligo dell'erede o legatario quanto può costituire oggetto di un rapporto obbligatorio (2).

II. Poichè la " Auflage „ è rapporto giuridico manchevole, il legislatore non poteva non assicurare l'adempimento della volontà del defunto senza lasciar questa alla mercè dell'erede o legatario.

Nel diritto romano il pretore, di fronte ad un unico erede, poteva costringerlo all'adempimento del " modus „ o per mezzo di procedura " extra ordinem „ se era in giuoco l'interesse pubblico, oppure non ammettendo l'erede all'eredità allorchè questi avesse fatto valere i suoi diritti sulla medesima; nel caso di più eredi era dato facoltà a ciascuno di questi di costringere il coerede coll'" actio familiae herciscundae „ all'adempimento del " modus „ (3). Di fronte al legatario poteva il pretore negare, per via della " doli exceptio „ il conseguimento del legato fino a quando egli non avesse prestato garantia pel soddisfacimento del " modus „; chè se il legatario era già in possesso del legato l'erede stesso poteva pretendere la restituzione e costringere a cauzione (4).

Il " de cuius „ stesso poi poteva per suo conto assicurarsi l'adempimento del desiderio suo minacciando di una multa (da pagarsi allo Stato o ad una pubblica corporazione) l'Investito pel caso di inadempimento (5).

Il legislatore germanico dispone al § 2194: l'erede, il coerede e quegli il cui venir meno del prima Investito torna direttamente a vantaggio (p. es. il più prossimo erede " ab intestato „ di contro all'erede testamentario) *possono* pretendere l'esecuzione

(1) *Archiv für bürg. Recht*, vol. 12, p. 1.

(2) *Erbrecht*, vol. I, p. 260.

(3) L. 7 cit.; l. 50, § 1, *de her. pet.*, V, 3; l. 8, § 6, *de cond. inst.*, XXVIII, 7.

(4) L. 21, § 3, *de ann. leg.*, XXXIII, 1; l. 17, *de usu leg.*, XXXIII, 2; C. 25 *de leg.*, VI, 37.

(5) L. 6 pr., l. 27, *de cond.*, XXXV, 1.

della " Auflage „ (1). La legge adunque riconosce a codeste persone una facoltà, un diritto senza che questo abbia elevato ad obbligo delle medesime. Diritto qui non certo di credito perchè, a parte che ne resterebbe tocca la fisonomia della " Auflage „, tale non sarebbe un diritto che non serve agli scopi particolari di chi lo esercita come nel caso del legatario che, in qualità di creditore, esercita azioni che ridondano unicamente a vantaggio proprio. Di un interesse si potrebbe, sottilizzando, pur parlare anche nel caso del § 2194, ma di un interesse morale, etico dell'erede di fronte al " de cuius „. La natura di codesto rapporto è disputata assai e sono in campo i più bei nomi della dottrina tedesca. Il Gierke sostanzialmente si ferma alla funzione sociale che le persone di cui nel § 2194 avrebbero a compiere come vigilatori della pietà e del costume (2). L'Endemann e l'Hellwig intravvedono in codesta facoltà un diritto, un' autorizzazione formale (3), mentre il Cosack un titolo all'adempimento della " Auflage „ di natura personalissima traendo argomento dal risarcimento dei danni negato nel caso della " Auflage „, cosicchè i principii generali regolanti i rapporti obbligatori troverebbero applicazione ad eccezione di quelli che presuppongono un interesse patrimoniale nell'Autorizzato (4). Ambe le concezioni hanno indubbio un fondamento, ma non soddisfano perchè con esse non sono giustificate che alcune delle prerogative delle persone di cui nel § 2194 non riuscendo codesta concezione ad assurgere a quell'estensione di significato e di portata da cui partendo le accennate prerogative si presentano logiche e necessarie conseguenze. Il Schultze ha saputo penetrare la questione sollevando felicemente la figura del fiduciario (5). Fiduciari sono le persone di cui al § 2192, sebbene esse godano, per quanto ha

---

(1) Va da sè che l'esecutore testamentario ha codesto diritto: diritto che è obbligo in omaggio al § 2203; l'aggiunta era stata fatta in seno alla prima commissione, ma sparì nelle letture successive, ed a ragione, come superflua (V. *Protokoll.* cit., p. 245).

(2) *Der Entwurf eines bürg. Gesetzbuch.* Leipzig, 1889, p. 519.

(3) Endemann, *Lehrbuch*, III, V, 1900, p. 318; Hellwig, *Verträge auf Leistung an Dritte*, p. 58.

(4) *Lehrbuch des d. bürg. Rechts*, vol. IV, § 407.

(5) In Ihering's, *Jahrbücher*, V, 43: *Treuhänder im gelt. bürg. Recht*, pp. 88-96.

tratto all'esecuzione della " Auflage ", tutte le prerogative del creditore. Essi agiscono in nome proprio, son parti in giudizio coi diritti delle parti; trattandosi di pluralità di fiduciari il giudizio pronunciato per o contro uno di essi è come non avvenuto di fronte agli altri, chè altrimenti ognuno di essi avrebbe a sua portata un comodo mezzo per sventare l'adempimento della " Auflage " conducendo dolosamente il processo.

Dal fatto che qui si tratta di semplici fiduciari si hanno conseguenze di non lieve momento. Poichè la funzione loro è richiesta unicamente per quel che ha tratto all'esecuzione della " Auflage " nessuno di essi può rimettere l'onere ereditario all'Investito, concedergli mora, tanto meno scendere ad una " datio in solutum ". Nè a codesti fiduciari spetta diritto a risarcimento pel caso di non adempimento; in caso di concorso di creditori essi sono autorizzati a parteciparvi senza che diritto di disposizione a loro spetti sulla quota che venisse a sussistere a corrispettivo della " Auflage "; dovranno limitarsi, nota il Dernburg (1), a pretendere il pagamento della medesima a un curatore giudiziario che avrà ad eseguire di fatto la volontà del " de cuius ". Infine poichè questo diritto li riguarda come persone, avuto riguardo ai loro rapporti col testatore, astrazion fatta dalla loro qualità patrimoniale, codesto diritto non può essere perduto nè fatto oggetto di contratti (2). Potrà esso tuttavia essere ereditabile? Per quanto ha tratto all'esecutore testamentario nessun dubbio: chè l'ufficio suo è officio di fiducia che vien meno colla morte sua. Per riguardo agli eredi e legatari si contesta. Il Schultze (loc. cit.) sostiene l'ereditabilità di codesto diritto riferendosi alla più salda tutela che ne deriva alla volontà del defunto. Decisive sono però le argomentazioni del Cosack *(Lehrbuch)* e dell'Haymann (loc. cit.) secondo i quali si sforze-

---

(1) *Das bürg. Gesetzbuch*, cit., p. 88.

(2) " Die Befugnis (dice l'Haymann, *Die Schenkung unter einer Auflage*, " 1905, p. 169), ist eine vom Gesetz an die Person der dort Genannten " geknüpfte Vollstreckungsmacht, sie gehört ebensowenig zum Vermögen " des Berechtigten wie das Amt des Testamentsvollstreckers o. die Befugnis " der ' quivis ex populo ' mit ' actio popularis ' vorzugehen zum Vermögen " gehört ".

rebbe evidentemente la dizione del § 2194 perchè verrebbe ad avere codesta facoltà persona che non è contemplata dalla legge (1).

III. I §§ 2195-96 con cui si chiude la sezione della " Auflage „ sono logica conseguenza della posizione autonoma che l'istituto della " Auflage „ ha assunto nel campo del diritto ereditario: posizione che ne fa una ragione di second' ordine, ma pur sempre indipendente e che ha la sua sanzione negativa nella dizione del § 2195 in cui l'esistenza del rapporto giuridico principale è fatta dipendere da quella della " Auflage „ pel solo caso in cui tale risulti la volontà del " de cuius „, pel solo caso, cioè, in cui il " de cuius „ abbia voluto della " Auflage „ fare una vera e propria condizione. Avvi qui, estesa alla " Auflage „, l'applicazione del § 2085 che sanziona il principio dell'indipendenza di più disposizioni testamentarie in un testamento.

L'ultimo § della sezione regola il caso di non adempimento della " Auflage „, sia per circostanze che rientrano nell'ambito della responsabilità di colui che la ha da eseguire, sia perchè la " Auflage „ è di tal natura che solo l' onerato può adempierla e contro di lui son rimasti infruttuosi i mezzi che vengono da un giudizio di condanna (2). Nel caso concedeva il diritto romano una " condictio „ (" ob causam datorum — causa data causa non secuta „): " condictio „ che si estendeva, a titolo di pena, a quanto il legatario aveva avuto dal " de cuius „,

(1) Mette in chiaro il Kohler: " .....er (cod. diritto) kann allerdings " dann einer anderen Person zustehen, aber dann steht er ihr in ursprün- " glicher Weise zu, er ist ihr nicht durch Erbgang überkommen. Wenn, zum " Beispiel, ein Miterbe die Erfüllung einer Auflage verlangen kann und " stirbt und nun sein Erbe die Miterbschaft erwirbt, so ist zwar auch dieser " Erbe in Bezug auf die Erfüllung einer Auflage anspruchsberechtigt, aber " nicht deswegen er Erbe des ersten Anspruchsberectigten ist, sondern " deswegen weil er Miterbe geworden ist „ (" Kohler's *Archiv* „, V, 21, p. 261).

(2) Gli autori citano il caso in cui l'adempimento della " Auflage „ consista in una prestazione dipendente dalla volontà dell'onerato e contro il quale non è concesso altro mezzo coercitivo che la multa fino a Mr. 1500 o il carcere fino a sei mesi (§ 888 C. P. C.): ora non è certo improbabile si dice, che l'onerato, trattandosi di una " Auflage „ che importa un grave sacrificio, voglia a questa sottrarsi anche a costo della multa.

ma unicamente di fronte al legatario chè di fronte all'erede valeva il " semel heres semper heres „. Tale " condictio „ passò nel diritto comune ammessa anche di fronte all'erede e nel diritto prussiano, ma nel § 2197 del Cod. del '900 ristretta alla sua vera ragion d'essere traendo motivo essenzialmente dal divieto dell'illecito arricchimento: ed illecito arricchimento si verifica se l'erede o legatario potesse ritenere più di ciò che gli è venuto a titolo di liberalità dal defunto e che viene appunto e solo coll'adempimento della " Auflage „ a determinarsi nella sua giusta misura. È dato non più all'erede, coerede, legatario ed a colui a cui torna più direttamente a vantaggio il venir meno del già onerato, ma solo a quest'ultimo il diritto di pretendere da chi di dovere solo quanto è necessario all'adempimento della " Auflage „ stessa. E l'antica legislazione era figlia di quella teorica che nella " Auflage „ vedeva una modalità accessoria del rapporto giuridico da porsi a lato del termine e della condizione: — conseguenza immediata era che l'inadempimento suo doveva senz'altro riflettersi sull'esistenza del rapporto giuridico principale. — Se pur così ristretto e soggettivamente ed oggettivamente codesto diritto non vien però meno alla persona di cui nel § 2197 il diritto di valersi di uno stato di mora provocato da altre persone purchè fra quelle di cui nel § 2194 come pure di un giudizio dalle medesime ottenuto ad esecuzione dell'onere ereditario. La ragione è nella posizione di ciascun erede o legatario di fronte all'Investito: posizione di tal natura che fa delle azioni da questi promosse delle azioni impersonali nell'esercizio di una facoltà, di un diritto spettante alla comunione dei fiduciari.

Il § 2197 però, come espressamente risulta dai lavori preparatori, ha carattere dispositivo e supplisce al silenzio del " de cuius „.

L'Accademico Segretario
GAETANO DE SANCTIS.

CLASSI UNITE

Adunanza del 13 Giugno 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ANDREA NACCARI
DIRETTORE DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE
E NATURALI

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Mosso, Spezia, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Grassi, Fusari e Parona. — È scusata l'assenza dei Soci D'Ovidio, Presidente dell'Accademia e Camerano Segretario della Classe;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Sforza, Brondi e De Sanctis Segretario. — È scusata l'assenza dei Soci Boselli, Vice Presidente dell'Accademia e Manno, Direttore della Classe.

È approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente.

Invitato dal Presidente il Socio Tesoriere espone il rendiconto finanziario dell'anno 1908, sia del fondo accademico, sia dei fondi particolari per i premi Bressa, Gautieri, Pollini e Vallauri. Legge quindi il bilancio preventivo per l'anno 1909.

L'Accademia approva tanto il resoconto consuntivo quanto il bilancio preventivo.

Gli Accademici Segretari
Lorenzo Camerano.
Gaetano De Sanctis.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 13 Giugno 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. ANDREA NACCARI
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: Mosso, Spezia, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Grassi, Fusari e Parona che funge da Segretario. — Scusano l'assenza il Presidente Senatore D'Ovidio, il Segretario Senatore Camerano ed il Socio Mattirolo.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Presidente partecipa la dolorosa notizia della morte del prof. Teodoro Guglielmo Engelmann dell'Università di Berlino avvenuta il 20 maggio u. s. Accenna ai meriti dell'illustre scienziato e ricorda ch'egli era nostro Socio corrispondente dal 5 marzo 1905. Alla famiglia furono subito inviate condoglianze.

Il Socio Guidi presenta in omaggio la Parte V delle sue *Lezioni sulla scienza delle costruzioni*, 5ª ediz.

Il Presidente presenta in omaggio, da parte degli Autori, un opuscolo del prof. G. Bernardi: *Sulla ricerca delle soluzioni intere e positive dell'equazione* $ax = by + k$ *quando i tre numeri* a, b, k *sono interi e positivi*; un volume del prof. F. Caldarera dal titolo: *Primi fondamenti della geometria dello spazio*; ed una memoria dell'ing. T. Allievo: *Il telaio meccanico Northrop delle Officine di costruzione di Rüti " G. Honegger "*.

Si presentano per l'inserzione negli *Atti* i lavori seguenti:

1° Galeazzo Piccinini: *Sulla determinazione della durezza delle acque col metodo Clark*, dal Socio Guareschi;

2° Chelli Fernando, *Riduzione trigonometrica delle posizioni medie delle stelle fisse dalla data 1850.0* + t *alla data 1850.0* + t′ *assumendo come eclittica fissa l'eclittica media del 1850.0,* dal Socio Jadanza;

3° Peyroleri M., *Relazione fra calcolo delle differenze e calcolo differenziale,* dal Socio Peano;

4° Giudice F., *Sull'inscrivibilità circolare dei poligoni articolati,* dal Socio Peano;

5° Panetti M., *Sul modulo di elasticità a trazione delle funi metalliche,* dal Socio Guidi;

6° A. G. Rossi, *Apparecchi galvanometrici sensibilissimi per corrente alternata fondati sulle vibrazioni torsionali di risonanza in fili metallici,* dal Socio Grassi;

7° Giovetti R., *Azione dell'acqua sulle nitrosoidrazine,* dal Socio Fileti;

8° Sforza G., *Corpi rotondi e baricentro nella metrica proiettiva,* dal Socio Naccari a nome del Presidente D'Ovidio;

9° Cisotti Umberto, *Alcune proprietà integrali delle quadriche,* dal Socio Naccari a nome del Socio Volterra;

10° Prever P. L., *Coralli giurassici del Gran Sasso d'Italia,* dal Socio Parona.

Il Socio Parona, ad invito del Presidente, legge la relazione sulla Memoria del Dr. Angelo Casu, *Salsola Kali L. e Salsola Tragus L. Specie critiche,* redatta dal collega Mattirolo. La relazione favorevole alla stampa nei volumi delle *Memorie,* viene approvata ed a voti unanimi la Memoria del Dr. Casu è accettata.

Il Presidente comunica una lettera del prof. Gino Loria, colla quale dà notizia delle onoranze, che si faranno al nostro Socio corrispondente Maurizio Cantor in occasione del suo ottantesimo anno, e si invita l'Accademia ad associarsi alle manifestazioni in onore dell' illustre vegliardo. La Classe dà mandato alla Presidenza perchè prenda parte nel modo che crederà più opportuno alle progettate manifestazioni.

LETTURE

Sulla determinazione della durezza delle acque col metodo di Clark.

Nota di GALEAZZO PICCININI.

Fino dal 1850, anno in cui comparve descritto nel Jahresbericht il metodo di Clark per la determinazione volumetrica della calce e magnesia nelle acque potabili, apparvero anche le prime critiche di Campbell. Il metodo, modificato nel 1852 da Faist e Knauss, per la sua rapidità e comodità assunse presto un'importanza forse un po' esagerata in confronto all'empirismo del saggio, spiegabile tuttavia con la necessità, di quel periodo laborioso di avere a disposizione mezzi rapidi di analisi atti a stabilire in modo sufficiente la potabilità delle acque.

Dopo il Campbell, le cui conclusioni furono contestate dal Faist e dal Wilson, altri chimici, come lo Schneider, il Fleck, il Reichardt e Ludwig, mossero acerbe critiche a questo metodo volumetrico; e in considerazione di saggio empirico e poco esatto lo ritennero Mauro, Nasini e Piccini e Marino-Zuco nelle relazioni sulle analisi chimiche delle acque di Roma.

Pur nondimeno, o col metodo originale o attraverso a modificazioni, che non chiarirono affatto le cause della talvolta stragrande variabilità di risultati, il saggio della durezza ebbe e ha avuto vita abbastanza durevole, perchè ancora troviamo in trattati classici di analisi delle acque, quali il Kubel-Tiemann nella edizione del 1889, il Fresenius, l'Ohlmüller, il Post e Neumann (1), descritto e sostenuto, con piccole riserve, questo metodo volumetrico, e nei regolamenti d'Igiene è tuttora pre-

(1) *Traité complet d'Analyse chimique*, 2ª ediz. francese tradotta dalla 3ª ediz. tedesca da L. Gautier (1907).

scritto questo saggio, per la determinazione della potabilità delle acque.

Dai numerosi lavori, pubblicati negli ultimi anni, è ben difficile farsi un'idea sulle cause di errore, che rendono in alcuni casi così fallace il metodo; nella maggior parte dei lavori non si tenne conto nè della composizione dei saponi adoprati, nè di quella dei sali di calcio e magnesio insolubili, che si formano nelle condizioni di esperienza o anche in soluzioni più concentrate.

È ripetuto tuttavia come cosa stabilita, che il saggio di Clark dà risultati erronei principalmente quando le acque contengono una considerevole quantità di sali di magnesio.

Il Prof. Magnanini (1) avrebbe fissata una *regolarità* interessante e cioè che se le titolazioni delle acque calcareo-magnesiache si effettuano *rapidamente* " si ottengono dei valori che corrispondono al solo contenuto in calce delle acque, la magnesia non avendo influenza sensibile, perchè non prese parte alla reazione „. Se poi si opera lentamente (aspettando cioè parecchi minuti dopo l'aggiunta del sapone prima di sbattere il liquido) si hanno secondo l'A. resultati esatti.

Lo Schneider (2) già molto prima aveva osservato qualche cosa di simile, senonchè questo A., a maggior ragione, diceva: " la prova con soluzione titolata di sapone dà resultati esattissimi, quando nell'acqua accanto alla calce sieno contenute solo piccole quantità di magnesia e quando *anche il contenuto in calce sia solo moderato* „. E Albert Lévy (3) aveva d'altro lato insistito molto, a proposito del saggio idrotimetrico, sulla necessità di aggiungere la soluzione di sapone lentamente e in modo determinato per trovarsi in ogni dosamento nelle stesse condizioni.

Nel 1907 mi occupai del metodo di Clark; come però in ogni caso avevo avuto valori della durezza molto esatti volli studiare più addentro la questione: e le esperienze, allora interrotte per varie cause, furono riprese al principio di quest'anno.

---

(1) " Gazz. Chim. „, 1906, I, pag. 369.
(2) " Wagner's Jahresber. „ (1865), p. 564.
(3) " Annuaire de l'Observatoire de Montsouris „ (1892).

Per cercare di riprodurre almeno in qualche caso le condizioni nelle qnali si era posto il Prof. Magnanini, dacchè nel suo lavoro non era dato nè il metodo di preparazione nè l'analisi del sapone usato nei saggi, ritenni utile studiare il comportamento di 7 od 8 varietà di saponi nelle condizioni più diverse.

Dirò subito che non mi riuscì di riprodurre quelle condizioni, nelle quali l'A. ottenne risultati così definitivi.

Le esperienze hanno dimostrato tuttavia che esiste una differenza molto netta fra i saponi alcalini, costituiti principalmente da oleati, e gli stearati per quanto riguarda il loro comportamento con le soluzioni magnesiache o calcareo-magnesiache.

Con una soluzione di stearato di sodio in alcool a 56 $^0/_0$ (fatta in modo che 45 cm^3 corrispondano a mgr. 12 di CaO) si possono titolare benissimo soluzioni calcaree-magnesiache (anche quando i sali di magnesio sieno in grande prevalenza) indipendentemente dal tempo trascorso tra l'aggiunta del sapone e l'agitazione del liquido, avendo risultati molto prossimi al vero.

Quando poi si adoperino soluzioni di saponi contenenti in prevalenza oleato di sodio o di potassio o si usi l'oleato di sodio puro, le determinazioni volumetriche danno valori buoni per le acque contenenti calce o barite; danno invece resultati molto variabili con soluzioni magnesiache in relazione a varie condizioni e cioè, modo di aggiungere il sapone, tempo trascorso fra l'aggiunta del sapone e l'agitazione del liquido per produrre la schiuma, temperatura delle soluzioni saggiate.

E i valori ottenuti, operando molto *rapidamente*, anzichè essere minori, come sarebbe da aspettarsi, sono più *elevati* del tenore reale in magnesio delle soluzioni stesse; il che è in perfetta disarmonia con le idee che si hanno sull'influenza dei sali magnesiaci nel saggio di Clark.

In una soluzione, di cui si conosce il titolo in sali di magnesio, si versi *tutta in un tempo* la quantità di soluzione di sapone necessaria (secondo le tabelle di Faist-Knauss) a precipitare i sali magnesiaci, si lasci a sè 1-2 minuti; agitando non si producono che poche bolle di una schiuma, che subito si rompe: la soluzione si comporta come se contenesse ancora del sale di magnesio da precipitare. Se si lascia a sè e dopo

30-45 minuti, si sbatte, compare una bella schiuma a bolle fini e perfettamente *persistente*,

Lo stesso fenomeno si verifica, aggiungendo in breve tempo a 2 a 3 cm³ alla volta, il volume di soluzione di sapone che dovrebbe essere sufficiente per produrre la schiuma persistente.

Cosicchè, se *si opera rapidamente*, per avere la schiuma persistente occorre adoprare un volume di soluzione saponosa, molto maggiore del necessario, il che significa che si ottengono dei valori della durezza *più grandi* del vero.

Il fenomeno è meno sensibile a 25°-30°; quanto più bassa è la temperatura e tanto più facile e manifesto si rende.

Le titolazioni eseguite *lentamente* danno invece resultati esatti e concordanti con l'analisi gravimetrica.

In sostanza, a chi osservi il fatto, fa l'impressione che nei primi momenti si formi un sale di magnesio, che tenga combinato in modo *labile* o dell'acido oleico o dell'oleato alcalino, e l'ipotesi che prima viene alla mente è che si generino dapprima dei saponi di magnesio acidi o dei sali doppi instabili che l'acqua lentamente scinde di nuovo in sali neutri e in saponi alcalini o in acidi grassi.

Il verificare se veramente la reazione avviene così non è molto facile in pratica, perchè è noto che in soluzioni diluite i saponi di magnesio e di calcio, all'atto della formazione, sono finamente suddivisi nella massa del liquido e la filtrazione, per sè stessa molto lenta, non permette di raccogliere il sale formato. Ho tentato, operando in soluzioni più concentrate, di separare il sale di magnesio, ma le esperienze sinora eseguite non mi permettono di trarre una conclusione definitiva.

Questa ipotesi, che non ha nulla di inverosimile, data la facilità dei sali magnesiaci a formare sali doppi con i sali alcalini, permetterebbe di spiegare anche come i risultati della determinazione della durezza sieno un po' diversi, qualora si aggiunga il sapone rapidamente, ma a poco alla volta o se ne versi una stessa quantità tutta di un tratto nella soluzione magnesiaca, perchè necessariamente si produrrebbero quantità diverse di tali sali in dipendenza dalla quantità di sapone, che nel primo momento viene a reagire con i sali magnesiaci dell'acqua.

Se poi si titolano con l'oleato di sodio le soluzioni calcareo-magnesiache, *operando rapidamente e a 15°*, si ottengono valori

della durezza un po' *minori* del vero, quando la quantità di magnesia sia *molto piccola* rispetto alla calce, mentre si hanno valori *maggiori* del reale, se la magnesia prevale sulla calce. Questo fatto dimostra la giustezza, in parte, dell'osservazione surriferita dello Schneider. Anche nei casi, in cui ebbi valori minori, non constatai quella regolarità accennata dal Prof. Magnanini.

È vero tuttavia che, nelle soluzioni prevalentemente calcaree, dopo aggiunta una quantità di oleato di sodio un po' superiore a quella sufficiente a precipitare i soli sali calcarei, seguitando a versare il sapone rapidamente e sbattendo si forma una schiuma che si rompe un po' più lentamente, ma sempre dentro 1-2 minuti. Per *schiuma persistente* si deve intendere, secondo i migliori trattatisti, quella che si mantiene inalterata alla superficie del liquido per un tempo non minore di *5 minuti.* Non credo che si debba ritenere schiuma persistente, quella che per ulteriore agitazione non scompare, come dice il Prof. Magnanini; prendendo come norma questo concetto si rischierebbe, specialmente dagli inesperti, di confondere, ad es.: il sapone di magnesio leggero, che si porta alla superficie, con la vera schiuma.

D'altra parte non sono d'accordo con il signor Lévy (1), il quale consiglia di aggiungere 1-2 goccie di ammoniaca al liquido per far sparire la cosidetta *falsa schiuma*. Le esperienze che ho fatto in proposito mi hanno dimostrato, da un lato che 100 cm^3 di acqua distillata addizionati di 5-10 goccie di soluzione a 1 $^0/_0$ di NH_3, richiedono un volume di sapone maggiore di quello richiesto dall'acqua distillata stessa, per produrre la schiuma persistente e dall'altro lato che in presenza della stessa quantità di ammoniaca si ottengono valori della durezza *minori*, sia per le soluzioni calcaree, sia per le baritiche o magnesiache.

In conclusione, stando alle considerazioni svolte a proposito dell'uso di soluzioni di oleati, credo *necessario*, se si vuole mantenere questo saggio volumetrico, così utile nella pratica, sostituire a saponi di composizione variabile, un sale *ben definito e poco suscettibile di alterazione*, quale lo stearato di sodio, che, come si vedrà dalle esperienze, dà esatti valori della durezza.

---

(1) Loco citato.

Parte sperimentale.

Nei saggi volumetrici della durezza, usai acque artificiali preparate con soluzioni neutre, titolate (gravimetricamente) di cloruro di calcio, cloruro e solfato di magnesio, e con acqua distillata conservata in modo che non si caricasse di anidride carbonica. La soluzione tipica di cloruro di calcio fu fatta partendo da un carbonato purissimo (privo di magnesio) e ridotta a tal volume che 1 cm^3 corrispondesse a gr. 0,001 di CaO, cioè a 1 grado di durezza tedesco. Fu controllata due volte con l'analisi ponderale.

Nello stesso modo fu preparata la soluzione di cloruro di magnesio, usando il carbonato puro (privo di $CaCO_3$) e facendone una soluzione tale che 1 cm^3 contenesse una quantità di $MgCl_2$ corrispondente a mgr. 1,07 di CaO, ossia a gradi tedeschi di durezza 1,07: anche questa soluzione fu dosata gravimetricamente 3 volte.

Ho adoperato inoltre una soluzione di solfato di magnesio (gr. 4,402 in 1000 cm^3) di cui 1 cm^3 corrisponde a mgr. 1 di CaO.

Per la soluzione normale di cloruro di bario, che serve per stabilire il titolo delle soluzioni di sapone (gr. 0,523 di $BaCl_2 + 2H_2O$ in 1000 cm^3), mi servii di un sale purissimo, che all'analisi diede resultati perfettamente concordanti con la formula.

Le soluzioni di sapone furono preparate partendo da 6 varietà ottenute dal sapone di piombo con carbonato di potassio puro.

Uno di questo campioni proveniva dalla fabbrica Kahlbaum, era un po' rossiccio, lo chiamerò A. Gli altri cinque furono preparati da me; uno di questi (F) era stato ottenuto dal 1907 e conservato per quasi due anni in essiccatore su calce caustica; un altro (E) lo ebbi da un cerotto diachilon vecchio e molto colorato, questo sapone fu adoprato soltanto per vedere se dava le curiose regolarità riscontrate dal Magnanini; gli altri tre quasi incolori furono preparati durante il corso delle esperienze da tre campioni diversi di sapone di piombo bianchissimo, ottenuto da olio di oliva finissimo e da due varietà di litargirio

ugualmente pure, quasi prive di ferro (Chiamerò *B* e *C* due di questi campioni, di cui più mi sono servito).

D'altra parte per le soluzioni di oleato e di stearato di sodio adoprai sali commerciali puri di Kahlbaum.

L'alcool che serviva alle soluzioni era stato rettificato e non era per niente acido.

Nella tabella seguente sono riportati i resultati dell'analisi di questi saponi per quel che riguarda il contenuto percentuale in acqua e in metallo alcalino.

	H_2O % del sale	K % del sale secco a 100°	Na % del sale secco a 100°	Calcolato
Sapone di potassio (B)	0.7	11.95	—	12.15
Sapone di „ (C)	1.55	12.3	—	12.15
Stearato di „ (Kahlbaum)	1.31-1.12	12.8-13.03	—	12.15
Oleato di sodio „	7.5	—	7.42	7.53
Stearato di sodio „	23.8-23.7	—	8.19-8.09	7.52
Stearato di „ (neutro)	2.4	—	7.68	7.52

Come si vede dalla tabella, la composizione di questi saponi corrisponde bene in genere a quella dei sali neutri dei singoli acidi oleico e stearico, se si eccettua lo stearato di sodio e potassio commerciali che contengono una quantità di alcali un po' superiore.

Dallo stearato di sodio (Kahlbaum) preparai due soluzioni.

Sospesi in 500 cm^3 di alcool a 56 % gr. 10 di stearato polverizzato; dopo 2 giorni filtrai la soluzione; sul filtro rimasero circa 5 gr. di un sale che asciutto all'aria e analizzato dimostrò di contenere una quantità di sodio corrispondente a quella del sale neutro. Con questo sale feci la seconda soluzione in alcool a 56 % che doveva presentare maggiori garanzie, in considerazione che il sale adoprato aveva una composizione corrispondente a quella del sale neutro. Tuttavia l'alcalinità della 1ª soluzione non ha influenza sui risultati della durezza, i numeri ottenuti, usando ora l'una ora l'altra, sono perfettamente uguali.

Fu determinata anche l'alcalinità dei singoli saponi; essi si mostrarono, in soluzione alcoolica, neutri o appena leggermente alcalini.

Comportamento delle soluzioni calcaree e magnesiache con i saponi.

Nei saggi volumetrici mi attenni sempre al modo di operare, che è prescritto nei migliori trattati, quali il Kubel-Tiemann e il Fresenius, e cioè feci le titolazioni su 100 cm^3 di acqua in cilindri graduati da 200-250 cm^3, versandovi le soluzioni alcooliche di sapone delle quali 45 cm^3 corrispondevano a 12 gradi tedeschi di durezza cioè a gr., 0,012 di CaO.

Le acque artificiali erano preparate con acqua distillata priva più che possibile di CO_2, aggiungendovi con pipette (divise in decimi di cm^3) esattamente calibrate volumi noti delle soluzioni titolate surricordate di sali di calcio e di magnesio.

I saggi furono eseguiti a temp. di 12°-15° e anche a 25°-30°.

Nelle tabelle seguenti sono segnate con asterisco * le titolazioni eseguite *molto lentamente* (1). Sono contraddistinte con una crocetta -+- le esperienze condotte *rapidamente*, nelle quali si versava il sapone a 1 o 2 cm^3 alla volta, si mescolava dibattendo per qualche secondo; indi si proseguiva l'aggiunta del sapone sino ad ottenere la schiuma persistente.

---

(1) In altri casi si aggiunse tutta in una volta la quantità di soluzione di sapone necessaria (secondo le tabelle di Faist-Knauss) a precipitare i sali di calcio e magnesio. Le soluzioni dibattute dopo 1-2 minuti di riposo *non* davano schiuma persistente; questa principiava a comparire e si faceva via via più persistente agitando i liquidi dopo un tempo più o meno lungo ($^1/_2$-1 ora), variabile a seconda della quantità di sale magnesiaco presente.

TABELLA N. I.

Sapone adoperato	Temperatura dell'acqua saggiata	Natura del sale	Durezza in gradi tedeschi effettiva	Durezza in gradi tedeschi trovata
Sapone di K (A) comm.	12°-13°	$CaCl_2$	6	6,1
(Kahlbaum) preparato	„	$BaCl_2$	6	6
dal sapone di piombo	„	$MgSO_4$	6	6 *
	„	„	6	6.2 *
	„	„	6	6.1 *
	„	„	6	6.8 $^{+}$
	„	„	6	7.6 $^{+}$
	„	„	6	7.7 $^{+}$
Sapone di K (D)	12°-13°	$CaCl_2$	6	5.95
(preparato nel 1907 dal	„	$BaCl_2$	6	6.00
sapone di piombo e la-	„	$MgCl_2$	6.4	8.93 $^{+}$
sciato in sol. di alcool	„	„	5.35	7.5 $^{+}$
a 95 °/₀ per quasi due	„	$MgSO_4$	5	7.4 $^{+}$
anni)				
Sapone di K (E)	12°-13°	$CaCl_2$	6	6.0
(preparato da un sapone	„	$BaCl_2$	7	7.05
di piombo molto vec-	„	$MgSO_4$	6	7.0 $^{+}$
chio e scuro)	„	„	6	7.6 $^{+}$
	„	„	6	8.0 $^{+}$
	„	$CaCl_2$ }	3 } 6	6.7 $^{+}$
	„	$MgSO_4$ }	3 }	
Sapone di K (F)	13°-15°	$BaCl_2$	6	6
(preparato nel 1907 dal	„	$CaCl_2$	6	5.95
sapone di piombo e con-	„	$MgCl_2$	6	6 *
servato per 2 anni in	„	„	6	7.7 $^{+}$
essiccatore)				

Sapone adoperato	Temperatusa dell'acqua saggiata	Natura del sale	Durezza in gradi tedeschi	
			effettiva	trovata
Sapone di K (C) (preparato da un sapone di piombo bianco e recente)	15°	$BaCl_2$	12	12
	„	$CaCl_2$	6	5.96
	„	$MgSO_4$	6	7.42 +
	„	$MgSO_4$	6	6.55 +
	„	$MgCl_2$	6	6.05 *
Oleato di Na (Kahlbaum)	15°	$BaCl_2$	12	11.96
	„	$CaCl_2$	6	5.85
	„	$MgSO_4$	6	7.05 +
	„	„	6	6.05 *
	25°-27°	$MgCl_2$	6.42	6.74 +
Stearato di Na (comm.) Kahlbaum	15°	$CaCl_2$	12	11.9
	„	$MgSO_4$	6	6.1
	„	$MgSO_4$	10	9.86
	„	$MgCl_2$	11	10.9
Stearato di Na (neutro)	15°	$CaCl_2$	10	9.92
	„	$MgSO_4$	9	8.95
	„	$MgCl_2$	8	8.1

Per questi due ultimi sali è *affatto indifferente* effettuare le titolazioni *rapidamente* o *lentamente*; le soluzioni magnesiache, in ogni caso, si comportano come le baritiche o le calcaree.

Nelle tabelle si trova spesso che le acque prese in esame avevano una durezza corrispondente a 6 gradi tedeschi: ciò fu fatto per varie ragioni: 1° perchè, se è vero che i sali magnesiaci stentano a precipitare, ciò doveva verificarsi meglio con le soluzioni più diluite; 2° perchè adoprando una quantità rilevante di sali di magnesio si esce dal caso pratico; 3° perchè usando molto sale di magnesio avrei dovuto adoperare, durante i saggi rapidi, un volume di soluzione di sapone maggiore del limite fissato dalle tabelle di Faist-Knauss; 4° infine una, non

ultima, ragione della scelta sta nel fatto che nell'intervallo fra 20 e 30 cm^3 di soluzione di sapone si ha nelle tabelle suddette una miglior proporzione fra i gradi di durezza e il volume della soluzione adoprato.

Debbo anche accennare che tutte le soluzioni di saponi usate precipitavano rapidamente con le soluzioni magnesiache. E questo ricordo perchè due anni fa mi capitò di fare saggi di durezza con una soluzione alcoolica di sapone di potassio, preparata in laboratorio da lungo tempo, la quale veramente impiegava varie ore per precipitare i sali di magnesio. Non sapendo in modo preciso le condizioni di preparazione e non avendo a disposizione il sapone, da cui era stata preparata la soluzione, non potei studiare le cause di questo interessante comportamento.

Non sarebbe strano che la soluzione di sapone adoprata dal Prof. Magnanini nei suoi saggi, si trovasse in condizioni somiglianti.

Mettendomi nelle condizioni le più svariate non ho potuto con tutti i saponi ricordati riprodurre questo ritardo della precipitazione dei sali di magnesio e anzi, come riesce chiaro dall'esame delle tabelle date, tutti i saponi composti principalmente di oleato dànno il fenomeno inverso, quando si titolino *rapidamente* le soluzioni magnesiache, cioè sembra si combinino col magnesio in quantità superiore alla necessaria (1).

Vengo ora alla parte più interessante della questione, e cioè come si comportino le soluzioni *calcareo-magnesiache* nel saggio di Clark. Anche qui mi limiterò a raccogliere in tabelle qualcuno dei risultati ottenuti con due saponi di potassio (B e C) preparati di recente da due campioni diversi di sapone di piombo, e le esperienze fatte con le soluzioni di oleato di sodio e di stearato di sodio. Per riguardo ai segni valgono le stesse avvertenze accennate per le tabelle precedenti.

---

(1) A una soluzione alcoolica di sapone di Marsiglia (10 cm^3 = gr. 0,012 di CaO), che reagiva nello stesso modo come le soluzioni di oleati, venne aggiunto 10 % di soda caustica normale. I saggi volumetrici fatti colla nuova soluzione, mostrarono che questa reagiva con i sali magnesiaci nello stesso modo come le soluzioni di oleato, quando le titolazioni furono eseguite *rapidamente*. Cosicchè l'alcalinità delle soluzioni di sapone nei limiti possibili per i sali commerciali non modifica il comportamento suaccennato dei saponi verso le soluzioni magnesiache.

Natura del sapone	Temperatura dell'acqua	Natura dei sali	Durezza in gradi tedeschi dovuta ai sali		Durezza in gradi tedeschi complessiva	
			calcarei	magnesiaci	reale	trovata
Sapone di K (F)	24°-25°	$CaCl_2 + MgSO_4$	3.06	1	4.06	3.96 (1)
(preparato nel 1907 dal sapone	"	"	4.08	1	5.08	5.02
di piombo e conservato per	"	"	5.1	1	6.1	6
2 anni in essiccatore)	"	"	6.1	1	7.1	7.03
	"	"	7.14	1	8.14	8.08
	"	"	8.16	1	9.16	9.13
	"	"	9.18	1	10.18	10.21
	"	"	10.2	1	11.2	11.1
	"	"	1	2	3	2.95
	"	"	1	3	4	3.88
	"	"	1	4	5	4.85
	"	"	1	5	6	5.9
	"	"	1	6	7	7.2
	"	"	4	3	7	7.25

(1) In queste esperienze si ebbe cura di procedere abbastanza lentamente e i risultati ottenuti infatti sono molto buoni.

Natura del sapone	Temperatura dell'acqua	Natura dei sali	Durezza in gradi tedeschi dovuta ai sali		Durezza in gradi tedeschi complessiva	
			calcarei	magnesiaci	reale	trovata
Sapone di K (B)	20°	$CaCl_2 + MgCl_2$	6	2.14	8.14	8.2 +
(preparato di recente da un ot-	"	"	2	6.42	8.42	10.27 +
timo sapone di piombo)	"	"	10	2.14	12.14	12.02 +
	"	"	2	6.42	8.42	8.58 *
Sapone di K (C)	15°	$CaCl_2 + MgSO_4$	2	2	4	4.52 +
(preparato di recente da un	"	"	2	2	4	4.0 *
altro campione pure bello di	"	"	8	4	12	12.15 +
sapone di piombo)	"	"	4	8	12	11.87 *
	"	"	3	5	8	9.21 +
	"	"	3	5	8	8.1 *
Oleato di sodio	15°	$MgSO_4 + CaCl_2$	3	4	7	7.9 +
(Kahlbaum)	"	$MgCl_2 + CaCl_2$	3	5.35	8.35	9.44 +
	"	"	6	2.14	8.14	7.3 +
	"	"	5	1.07	6.07	5.47 +
	"	"	1	5.35	6.35	7.15 +
	"	"	1	5.35	6.35	6.15 *
	27°-30°	$MgCl_2 + CaCl_2$	6	2.14	8.14	7.6 +
	"	"	2	6.42	8.42	8.68 +

Natura del sapone	Temperatura dell'acqua	Natura dei sali	Durezza in gradi tedeschi dovuta ai sali		Durezza in gradi tedeschi complessiva	
			calcarei	magnesiaci	reale	trovata
Stearato di sodio (comm.)	20°	$MgCl_2 + CaCl_2$	6	2.14	8.14	8.24 (1)
	"	"	2	6.42	8.42	8.52
	"	"	7	3	10	10.04
	"	$MgSO_4 + CaCl_2$	5	1	6	6.15
Stearato di sodio (neutro)	20°	$CaCl_2 + MgCl_2$	6	2.14	8.14	8.2 (1)
	"	"	2	6.42	8.42	8.6
Stearato di sodio + oleato di sodio (miscela di volumi uguali di soluzioni corrispondenti di titolo)	20°	$MgSO_4$	—	5	5	5.4 (1)
	"	$MgSO_4 + CaCl_2$	5	1	6	6.25
	"	"	6	2	8	7.95

(1) Le titolazioni con lo stearato di sodio comm. e neutro, o con la miscela a parti uguali vennero eseguite *rapidamente*; altre esperienze hanno dimostrato che si ottengono con gli stearati uguali valori anche *operando lentamente*.

I resultati consegnati nelle tabelle a pag. 853-855 non rappresentano che una parte delle moltissime esperienze fatte.

Dall'esame dei valori ottenuti, risultano varie cose degne di nota, e cioè: 1° quanta importanza abbia nelle determinazioni, anche per le acque calcareo-magnesiache, la maggiore o minore rapidità, con cui si conducono i dosamenti, se si adoperano soluzioni di sapone costituite in prevalenza da oleati alcalini; 2° che non si ottengono risultati molto inferiori al vero, quando i sali di calcio prevalgono sui sali di magnesio, anche *operando rapidamente*, pur di adoperare soluzioni di sapone di potassio, preparate col metodo usuale dal sapone di piombo e carbonato di potassio; 3° che *non si deve assolutamente*, come fu proposto da qualche autore (1), adoperare l'oleato di sodio e di potassio puri, perchè con le soluzioni di questi sali si possono ottenere resultati molto erronei della durezza, e cioè *valori minori* del vero quando i sali di calcio prevalgono su quelli di magnesio, molto *maggiori* del vero quando si ha il caso inverso nelle proporzioni di sali presenti (2); 4° che l'influenza perturbatrice portata da una notevole quantità di sali di magnesio, sui dosamenti si manifesta nel senso di produrre errori in *più* anzichè in *meno* sulla durezza reale di un'acqua; 5° che utilizzando soluzioni alcooliche di stearato di sodio preparate in modo che corrispondano alle tabelle di Faist e Knauss, si ha il doppio vantaggio: *a)* di partire da un sale ben definito e non alterabile, e che si trova quindi nelle condizioni migliori per avere sempre una composizione costante; *b)* di conseguire resultati ugualmente esatti, tanto se le determinazioni furono eseguite rapidamente, quanto se lentamente.

Cosicchè, mentre le mie conclusioni sul comportamento delle soluzioni magnesiache o calcareo-magnesiache sono opposte con quelle del Prof. Magnanini, andiamo d'accordo nel riconoscere la necessità di lasciar trascorrere un certo tempo durante la titolazione di dette soluzioni. Del resto, data la variabilità di

---

(1) A. P. Lidow, " Zeitschr. f. Nahr. und Genuss. mittel " (1908), pag. 194. A. Gawalowski, " Ch. Centralbl. ", 1903, I, pag. 357.

(2) Gli stessi fenomeni si verificano con soluzioni concentrate dei detti saponi.

composizione dei saponi di potassio o di Marsiglia, che si adoprano normalmente in tale saggio, il fatto di risultati così opposti dimostra come sia facile cadere in inganno, in queste reazioni più complicate di quel che si pensi, quando ci si creda autorizzati a trarre una conclusione generale da un numero troppo ristretto di esperienze. Questo mi convince ancora di più della necessità di eliminare tali incertezze, sostituendo a saponi di composizione variabile, un sale ben definito. Il metodo di Clark, modificato nel senso da me accennato, può dare ancora risultati molto buoni e non deve essere messo da parte, come molti autori ritengono, e tanto meno sostituito con metodi, quali quello di Wartha-Pfeiffer, che alla critica hanno dimostrato di non essere scientificamente rigorosi e nemmeno più esatti o più utilizzabili in pratica dell'antico processo di Clark.

Torino. Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologica della R. Università.

Riduzione trigonometrica delle posizioni medie delle stelle fisse dalla data 1850,0 + t alla data 1850,0 + t' prendendo come eclittica fissa l'eclittica media del 1850,0.

Nota di FERNANDO CHELLI.

Introduzione. — La posizione media di una stella fissa è la sua posizione apparente sulla sfera celeste, come sarebbe veduta da un osservatore che si trovasse sul Sole.

Essa si esprime comunemente in coordinate riferite al polo medio (dell'eclittica o dell'equatore) e al medio equinozio del cominciamento dell'anno stesso.

Quando si cerca la posizione media di una stella per una data epoca t' si parte generalmente da quella data in un catalogo per una certa epoca t; ma quest'epoca t varia da catalogo

a catalogo e quindi perchè si potesse eseguire tale riduzione occorrerebbe avere le costanti di riduzione per tutte le date possibili. Invece le formole che verranno determinate in questo lavoro sono tali che avendo a disposizione le sole costanti di riduzione per un'epoca arbitraria t_0 (per pura comodità si è scelta per t_0 la data 1850,0) è possibile sempre ridurre una posizione media dalla data t alla data t' qualunque siano t e t'.

Saranno considerati i casi che la posizione della stella sia espressa in coordinate eclittiche (λ e β) o in coordinate equatoriali (α e δ), e si vedrà che la riduzione in coordinate eclittiche è più comoda pel calcolo numerico quando la variazione di α è fortissima (come nel caso delle stelle circumpolari nella posizione di minima distanza dal polo). I risultati a cui si giunge sono rigorosi e perciò i soli applicabili quando $t' - t$ è molto grande e nella riduzione delle stelle circumpolari.

I. Riduzione pel moto proprio applicata direttamente alla posizione data dal catalogo (fig. 1).

Si sa che il ridurre la posizione media di una stella da una data t ad un'altra data t' consiste nell'applicare alla posizione data due riduzioni: 1° Riduzione pel moto proprio (la posizione assoluta della stella varia, ma gli assi di riferimento rimangono fissi): 2° riduzione per la precessione (la posizione assoluta della stella non varia, ma gli assi di riferimento sono cambiati). Queste due riduzioni si possono applicare in un ordine arbitrario, ma a seconda che la riduzione pel moto proprio si eseguisce prima o dopo di quella per la precessione si hanno due sistemi di formole alquanto diversi.

Formole fondamentali. — " Nello stato presente dell'Astronomia possiamo convenire che per effetto del suo moto proprio ogni stella si muova su di un cerchio massimo della sfera celeste con velocità angolare costante „ [1]. Allora detta μ questa

[1] Newcomb, *Spherical Astronomy*, pag. 262.

velocità angolare costante, M ed N gli angoli che la sua direzione fa col meridiano della stella, rispettivamente quando si assume come piano di riferimento quello dell'eclittica, o quello dell'equatore, contati dal nord verso est si ha:

moto proprio

$$(1) \qquad \text{in } \lambda \quad \mu_\lambda = \mu \operatorname{sen} M \sec\beta \qquad \text{in } \beta \quad \mu_\beta = \mu\cos M$$

$$(2) \qquad \text{in } \alpha \quad \mu_\alpha = \mu \operatorname{sen} N \sec\delta \qquad \text{in } \delta \quad \mu_\delta = \mu\cos N.$$

Viceversa se sono noti μ_β e μ_λ o μ_δ e μ_α si trova μ ed M o rispettivamente μ ed N mediante le formole seguenti:

$$(3) \qquad \operatorname{tang} M = \frac{\mu_\lambda}{\mu_\beta}\cos\beta \qquad \mu = \begin{cases} \mu_\lambda \operatorname{cosec} M \cos\beta \\ \mu_\beta \sec M \end{cases}$$

$$(4) \qquad \operatorname{tang} N = \frac{\mu_\alpha}{\mu_\delta}\cos\delta \qquad \mu = \begin{cases} \mu_\alpha \operatorname{cosec} N \cos\delta \\ \mu_\delta \sec N. \end{cases}$$

Passaggio di un sistema all'altro di coordinate. — Studiamo

Fig. 1

ora le relazioni che intercedono tra λ, β ed M e α, δ ed N per

poter fare le riduzioni in un sistema quando siano date le coordinate e le componenti il moto proprio nell'altro. Consideriamo perciò il triangolo CPS in cui C è il polo dell'eclittica, P quello dell'equatore ed S una stella. Detta ϵ l'obliquità dell'eclittica ed $\hat{\omega}$ l'angolo in S, che evidentemente è uguale a M-N, dalla figura risulta:

$$CP = \epsilon \quad CS = 90^\circ - \beta \quad PS = 90^\circ - \delta$$
$$\text{ang } SCP = 6^h - \lambda \quad \text{ang } SPC = 6^h + \alpha.$$

Allora applichiamo al nostro triangolo le formole fondamentali della trigonometria sferica: si ha:

per passare da λ, β, M a α, δ, N:

$$(5) \quad \begin{cases} \cos\delta \operatorname{sen}\hat{\omega} = + \operatorname{sen}\epsilon \cos\lambda \\ \cos\delta \cos\hat{\omega} = + \cos\epsilon \cos\beta - \operatorname{sen}\epsilon \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\lambda \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} \operatorname{sen}\delta = + \cos\epsilon \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\epsilon \cos\beta \operatorname{sen}\lambda \\ \cos\delta \operatorname{sen}\alpha = - \operatorname{sen}\epsilon \operatorname{sen}\beta + \cos\epsilon \cos\beta \operatorname{sen}\lambda \\ \cos\delta \cos\alpha = + \cos\beta \cos\lambda \end{cases}$$

$$(7) \quad N = M - \hat{\omega}$$

per passare da α, δ, N a λ, β, M

$$(8) \quad \begin{cases} \cos\beta \operatorname{sen}\hat{\omega} = \operatorname{sen}\epsilon \cos\alpha \\ \cos\beta \cos\hat{\omega} = \cos\epsilon \cos\delta + \operatorname{sen}\epsilon \operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

$$(9) \quad \begin{cases} \operatorname{sen}\beta = \cos\epsilon \operatorname{sen}\delta - \operatorname{sen}\epsilon \cos\delta \operatorname{sen}\alpha \\ \cos\beta \operatorname{sen}\lambda = \operatorname{sen}\epsilon \operatorname{sen}\delta + \cos\epsilon \cos\delta \operatorname{sen}\alpha \\ \cos\beta \cos\lambda = \cos\delta \cos\alpha \end{cases}$$

$$(10) \quad M = N + \hat{\omega}$$

λ ed α possono assumere tutti i valori da 0^h a 24^h; M ed N tutti quelli da 0° a 360°; β e δ quelli da -90° a $+90^\circ$; $\hat{\omega}$ varia da 0° a 180° e da 180° a 0° nella regione in cui λ e α variano da 18^h a 0^h e da 0^h a 6^h, e varia da 0° a -180° e da -180° a 0° nella regione in cui λ e α variano da 6^h a 12^h e da 12^h a 18^h.

Riduzione pel moto proprio quando la posizione della stella è data mediante le sue coordinate eclittiche λ *e* β. — Nel caso che consideriamo occorre che siano noti per l'epoca t le quantità λ, β, μ, M: se non si hanno occorrerà trovarle mediante le formole trovate precedentemente. Occorre inoltre conoscere il tempo $t' - t$ che per brevità esprimeremo con T: l'unità di misura di T dipende dall'unità secondo cui è espresso il valore di μ: per es. se μ è indicato come l'arco percorso dalla stella in 100 anni, anche T si esprimerà in secoli.

Ciò posto consideriamo il triangolo CSS' in cui C è il polo dell'eclittica per la data t, S la posizione della stella al tempo t, S' la posizione al tempo t'. Se μ è il moto proprio, λ_0 β_0 M_0 le coordinate e l'angolo della direzione del moto proprio della stella col suo meridiano al tempo t, λ β M le stesse quantità al tempo t' riferite all'eclittica e all'equinozio del tempo t, si ha:

$$CS = 90^\circ - \beta_0 \quad CS' = 90^\circ - \beta \quad SS' = \mu T$$
$$C(S')S = 180^\circ - M \quad C(S)S' = M_0 \quad S(C)S' = \lambda - \lambda_0$$

e allora le formole fondamentali della trigonometria sferica danno:

$$(11) \quad \begin{cases} \cos\beta \operatorname{sen}(\lambda - \lambda_0) = \operatorname{sen} M_0 \operatorname{sen} \mu T \\ \cos\beta \cos(\lambda - \lambda_0) = \cos\beta_0 \cos\mu T - \operatorname{sen}\beta_0 \operatorname{sen}\mu T \cos M_0 \\ \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\beta_0 \cos\mu T + \cos\beta_0 \operatorname{sen}\mu T \cos M_0 \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} \cos\beta \cos M = -\operatorname{sen}\beta_0 \operatorname{sen}\mu T + \cos\beta_0 \cos\mu T \cos M_0 \\ \cos\beta \operatorname{sen} M = \operatorname{sen} M_0 \cos\beta_0 \end{cases}$$

di cui le (11) servono pel calcolo di λ e β e le (12) per quello di M.

Riduzione pel moto proprio quando la posizione della stella è data mediante le sue coordinate equatoriali α e δ. — In questo caso occorre che oltre al tempo T si abbiano per la data t le quantità α, δ, N che indicheremo con α_0, δ_0, N_0 e inoltre il moto proprio μ. Indichiamo con α δ N le coordinate e l'angolo della direzione del moto proprio col meridiano della stella al tempo t', riferite all'equatore e all'equinozio del tempo t. Allora il trian-

golo PSS' dove P è il polo dell'equatore per la data t, S ed S' le posizioni della stella rispettivamente alle date t e t' ci dà:

$$PS = 90^\circ - \delta_0 \qquad PS' = 90^\circ - \delta \qquad SS' = \mu T$$
$$P(S')S = 180^\circ - N \qquad P(S)S' = N \qquad S(P)S' = \alpha - \alpha_0$$

e applicando le formole fondamentali della trigonometria sferica si ha:

$$(13) \begin{cases} \cos\delta \operatorname{sen}(\alpha - \alpha_0) = \operatorname{sen} N_0 \operatorname{sen} \mu T \\ \cos\delta \cos(\alpha - \alpha_0) = \cos\delta_0 \cos\mu T - \operatorname{sen}\delta_0 \operatorname{sen}\mu T \cos N_0 \\ \operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}\delta_0 \cos\mu T + \cos\delta_0 \operatorname{sen}\mu T \cos N_0 \end{cases}$$

$$(14) \begin{cases} \cos\delta \cos N = - \operatorname{sen}\delta_0 \operatorname{sen}\mu T + \cos\delta_0 \cos\mu T \cos N_0 \\ \cos\delta \operatorname{sen} N = \operatorname{sen} N_0 \cos\delta_0 \end{cases}$$

di cui le (13) servono pel calcolo di α e δ e le (14) per quello di N.

II. Riduzione per la precessione.

Riduzione delle posizioni date in coordinate eclittiche λ *e* β. — Consideriamo sulla sfera celeste (fig. 2) la posizione dell'eclittica al tempo t_0, che considereremo come fissa, quella pel tempo t e quella pel tempo t': nella figura esse sono indicate rispettivamente con E_0, E, E', e C_0, C, C' ne sono i rispettivi poli. Si vede subito che ☋ è il nodo discendente di E su E_0 e ☋$'$ quello di E' su E_0; Υ_0 è l'equinozio medio all'epoca t_0, k l'inclinazione di E su E_0 e k' quella di E' su E_0. Nel triangolo C_0CC' si avrà evidentemente: $\qquad C_0C = k \qquad C_0C' = k'$.

Facciamo $\qquad N_1 = ☋\Upsilon_0 \qquad N_1' = ☋'\Upsilon_0$.

Allora: $\qquad ☋'☋ = C(C_0)C' = N_1' - N_1$.

Posto su E e su E' rispettivamente ☋$\Upsilon_0' = N_1$ ☋$'\Upsilon_0'' = N_1'$ Υ_0' e Υ_0'' se non intervenisse la precessione generale rappresenterebbero l'equinozio medio rispettivamente per le date t e t', ma per effetto della precessione generale ψ_1 e ψ_1' essi hanno retrocesso fino ai punti Υ e Υ': quindi si ha:

$$☋\Upsilon = N_1 - \psi_1 \qquad ☋'\Upsilon' = N_1' - \psi_1'.$$

Ciò premesso sia S una stella: siano λ e β le sue coordinate al tempo t, λ' e β' quelle al tempo t'. Sarà allora:

$$\lambda = \gamma S_1 \qquad \beta = S_1 S \qquad \lambda' = \gamma' S' \qquad \beta' = S'S.$$

Fig. 2

Consideriamo ora il triangolo C_0CC': per quel che si è detto si ha:

$$C_0C' = k' \qquad C_0C = k \qquad C(C_0)C' = N_1' - N_1$$

facciamo poi le convenzioni seguenti:

$$C_0(C)C' = p \qquad C_0(C')C = p' \qquad CC' = k_1.$$

Per trovare gli elementi incogniti $p\ p'\ k_1$ le analogie di Nepero ci danno:

$$(15)\begin{cases}\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p+p')=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(k'-k)}{\cos\frac{1}{2}(k'+k)}\operatorname{cotang}\frac{1}{2}(N_1'-N_1)\\[2ex] \operatorname{tang}\frac{1}{2}(p-p')=\dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(k'-k)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(k'+k)}\operatorname{cotang}\frac{1}{2}(N_1'-N_1)\\[2ex] \operatorname{tang}\frac{1}{2}k_1=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(p+p')}{\cos\frac{1}{2}(p-p')}\operatorname{tang}\frac{1}{2}(k'+k)=\dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(p+p')}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(p-p')}\operatorname{tang}\frac{1}{2}(k'-k).\end{cases}$$

Consideriamo infine il triangolo $CC'S$: in esso si ha:

$$CC'=k_1 \qquad CS=90^\circ-\beta \qquad C'S=90^\circ-\beta'$$

$$C'(C)S=C_0(C)S-C_0(C)C'=6^h+(\lambda+N_1-\psi_1-p)=6^h+L$$

$$C(C')S=24^h-C_0(C')C-C_0(C')S=24^h-p'-6^h-$$

$$-(\lambda'+N_1'-\psi_1')=18^h-(\lambda'+N_1'-\psi_1'+p')=18^h-L'$$

essendosi posto $\lambda+N_1-\psi_1-p=L$

$$\lambda'+N_1'-\psi_1'+p'=L'.$$

E applicando le formole fondamentali della trigonometria sferica si ha:

$$(16)\begin{cases}\operatorname{sen}\beta'=-\operatorname{sen}L\cos\beta\operatorname{sen}k_1+\operatorname{sen}\beta\cos k_1\\ \cos\beta'\operatorname{sen}L'=-\operatorname{sen}L\cos\beta\cos k_1-\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}k_1\\ \cos\beta'\cos L'=-\cos L\cos\beta\end{cases}$$

con cui si passa dalla posizione al tempo t a quella al tempo t'.

Riduzione delle posizioni date in coordinate equatoriali α *e* δ. — Si hanno in tal caso due metodi di riduzione. Cominciamo con quello simile all'altro trattato riguardo alla riduzione con coordinate eclittiche. Consideriamo dunque (fig. 3) sulla sfera celeste le tre posizioni C_0, C, C' del polo dell'eclittica e quelle P_0, P, P' del polo dell'equatore rispettivamente per le date t_0, t, t': sia ϵ_0 l'obliquità dell'eclittica al tempo t_0 ed ϵ_1 e ϵ_1' l'inclinazione dell'equatore al tempo t e t' sull'eclittica al tempo t_0: allora:

$$C_0P_0=\epsilon_0 \qquad C_0P=\epsilon_1 \qquad C_0P'=\epsilon_1'.$$

Ciò premesso poniamo:

$$C_0(P_0)P = 6^h - \zeta_0 \qquad C_0(P_0)P' = 6^h - \zeta_0'$$
$$C_0(P)P_0 = 6^h - \zeta \qquad C_0(P')P_0 = 6^h - \zeta'$$
$$P_0P = \theta \qquad P_0P' = \theta'$$

Fig. 3

e quindi θ e θ' indicano la inclinazione dell'equatore a t e t' rispettivamente sull'equatore a t_0.

Siano poi α e δ le coordinate della stella S al tempo t e α' e δ' quelle al tempo t'.

Ciò premesso consideriamo il triangolo P_0PP': in esso si ha:

$$P_0P' = \theta' \qquad P_0P = \theta$$
$$P(P_0)P' = P(P_0)C_0 - P'(P_0)C_0 = 6^h - \zeta_0 - 6^h + \zeta_0' = \zeta_0' - \zeta_0.$$

Poniamo $\quad P_0(P)P' = t \qquad P_0(P')P = t' \qquad PP' = \theta_1.$

Per trovare gli elementi incogniti $t\,t'\,\theta_1$ le formole di Nepero danno:

$$(17)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\frac{1}{2}(t+t') = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(\theta'-\theta)}{\cos\frac{1}{2}(\theta'+\theta)}\operatorname{cotang}\frac{1}{2}(\zeta_0'-\zeta_0) \\[2ex] \operatorname{tang}\frac{1}{2}(t-t') = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\theta'-\theta)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\theta'+\theta)}\operatorname{cotang}\frac{1}{2}(\zeta_0'-\zeta_0) \\[2ex] \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta_1 = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(t+t')}{\cos\frac{1}{2}(t-t')}\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta'+\theta) = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(t+t')}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(t-t')}\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta'-\theta). \end{cases}$$

Consideriamo infine il triangolo $PP'S$. In esso si ha:

$$PP' = \theta_1 \qquad PS = 90^\circ - \delta \qquad P'S = 90^\circ - \delta'$$

$$P'(P)S = 24^h - P_0(P)S - P_0(P)P' = 24^h - 12^h + \alpha - z - t =$$
$$= 12^h + (\alpha - z - t) = 12^h + A$$

$$P(P')S = P_0(P')S - P_0(P')P = 12^h - (\alpha' - z') - t' =$$
$$= 12^h - (\alpha' - z' + t') = 12^h - A' \text{ (1)}$$

essendosi posto $\alpha - z - t = A \qquad \alpha' - z' + t' = A'$.

Quindi applicando le formole fondamentali della trigonometria sferica si ha:

$$(18) \quad \begin{cases} \operatorname{sen}\delta' = -\cos A \cos\delta \operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\delta \cos\theta_1 \\ \cos\delta' \cos A' = -\cos A \cos\delta \cos\theta_1 - \operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}\theta_1 \\ \cos\delta' \operatorname{sen} A' = -\operatorname{sen} A \cos\delta \end{cases}$$

con cui si passa dalla posizione al tempo t a quella pel tempo t'.

Possiamo risolvere il problema per altra via. Indicata con ψ la precessione lunisolare per $t - t_0$ anni e con ψ' quella per $t' - t_0$ anni si ha evidentemente nel triangolo C_0PP': $C_0P' = \epsilon_1'$

$$C_0P = \epsilon_1 \qquad P(C_0)P' = P_0(C_0)P' - P_0(C_0)P = \psi' - \psi$$

Poniamo $\quad C_0(P)P' = 6^h - \vartheta \quad C_0(P')P = 6^h - \vartheta' \quad PP' = \theta_1$.

Dopo aver notato che

$$\frac{1}{2}[(6^h - \vartheta) + (6^h - \vartheta')] = 6^h - \frac{1}{2}(\vartheta' + \vartheta)$$

e
$$\frac{1}{2}[(6^h - \vartheta) - (6^h - \vartheta')] = \frac{1}{2}(\vartheta' - \vartheta)$$

applicando le formole di Nepero si avrà per calcolare gli elementi incogniti $\vartheta\ \vartheta'\ \theta_1$:

---

(1) Infatti; $P_0(P)S = d(P)S + d(P)P_0 = d(P)S + 12^h - 6^h + \zeta = d(P)S + 6^h + \zeta$ essendo Pd il prolungamento di C_0P. Indicando ora con φ la precessione planetaria da t_0 a t si ha: $d(P)S = 12^h - C_0(P)S = 12^h - C_0(P)C - C(P)S = 12^h - \varphi - 6^h - \alpha = 6^h - \alpha - \varphi$ e sostituendo $P_0(P)S = 6^h - \alpha - \varphi + 6^h + \zeta = 12^h - [\alpha - (\zeta - \varphi)] = 12^h - (\alpha - z)$ essendosi posto $\zeta - \varphi = z$.

Similmente per l'angolo $P_0P'S$.

$$
(19)\quad\begin{cases}
\operatorname{tang}\frac{1}{1}(\vartheta'+\vartheta)=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(\epsilon_1'+\epsilon_1)}{\cos\frac{1}{2}(\epsilon_1'-\epsilon_1)}\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\psi'-\psi)\\[2ex]
\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\vartheta'-\vartheta)=\dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\epsilon_1'-\epsilon_1)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\epsilon'_1+\epsilon_1)}\operatorname{cotang}\frac{1}{2}(\psi'-\psi)\\[2ex]
\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta_1=\dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\vartheta'+\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\vartheta'-\vartheta)}\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\epsilon_1'+\epsilon_1)=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(\vartheta'+\vartheta)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\vartheta'-\vartheta)}\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\epsilon_1'-\epsilon_1).
\end{cases}
$$

Detta φ la precessione planetaria per $t - t_0$ anni e φ' quella per $t' - t_0$ anni si ha dunque:

$$
\begin{aligned}
C(P)P' &= C_0(P)P' - C_0(P)C = 6^h - \vartheta - \varphi = 6^h - (\vartheta + \varphi)\\
C'(P')P &= C_0(P')P + C_0(P')C' = 6^h - \vartheta' + \varphi' = 6^h - (\vartheta' - \varphi').
\end{aligned}
$$

Consideriamo il triangolo $PP'S$: in esso si ha:

$$PP' = \theta_1 \qquad PS = 90^\circ - \delta \qquad PS' = 90^\circ - \delta'$$

$$P'(P)S = C(P)S - C(P)P' = 6^h + \alpha - 6^h + (\vartheta + \varphi) = \alpha + \vartheta + \varphi$$

$$
\begin{aligned}
P(P')S &= 24^h - C'(P')S - C'(P')P =\\
&= 24^h - 6^h - \alpha' - 6^h + (\vartheta' - \varphi') = 12^h - (\alpha' - \vartheta' + \varphi')
\end{aligned}
$$

e applicando le formole fondamentali della trigonometria sferica:

$$
(20)\quad\begin{cases}
\operatorname{sen}\delta' = \cos(\alpha+\vartheta+\varphi)\cos\delta\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\delta\cos\theta_1\\
\cos\delta'\cos(\alpha'-\vartheta'+\varphi') = \cos(\alpha+\vartheta+\varphi)\cos\delta\cos\theta_1 - \operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\theta_1\\
\cos\delta'\operatorname{sen}(\alpha'-\vartheta'+\varphi') = \operatorname{sen}(\alpha+\vartheta+\varphi)\cos\delta.
\end{cases}
$$

Significato geometrico di alcune costanti. — Di alcune delle costanti introdotte nelle formole precedenti non è stato detto ancora quale ne sia il significato geometrico. Per trovarlo trasportiamo il nostro campo di vista dalla regione dei poli a quella degli equinozi. Siano dunque (fig. 4) E_0 ed E le posizioni dell'eclittica ai tempi t_0 e t rispettivamente, e siano e_0 ed e quelle dell'equatore pure ai tempi t_0 e t: quindi γ_0 e γ rappresentano le rispettive posizioni dell'equinozio. Sappiamo già che si ha:

$$\text{ang in ☋} = k \qquad \text{ang in } Q = \theta \qquad ☋\gamma_0 = N_1.$$

$$E_0(\gamma_0)Q = \epsilon_0 \qquad E(\gamma)\,Q = \epsilon \qquad E_0(\gamma')Q = \epsilon_1.$$

Siccome la precessione lunisolare è dovuta al moto del polo dell'equatore, $\gamma_0\,\gamma'$ rappresenta la precessione lunisolare in lon-

gitudine, ψ; essendo la precessione planetaria dovuta al moto del polo dell'eclittica, $\gamma' \gamma$ è la precessione planetaria in ascensione retta, φ.

Fig. 4

Allora posto su E ☋$\gamma_0'' =$ ☋$\gamma_0 = N_1$ ☋$\gamma'' =$ ☋γ'

si ha $\gamma_0''\gamma'' = \gamma_0\gamma' = \psi \qquad \gamma_0''\gamma'' = \gamma_0''\gamma + \gamma\gamma''$.

Siccome γ rappresenta l'equinozio del tempo t è evidente che $\gamma_0'' \gamma$ è la precessione generale in longitudine, ψ_1; allora $\gamma\gamma''$ rappresenta la precessione planetaria in longitudine, che indichiamo con φ_1.

Confrontando la nostra figura con la fig. 3 risulta immediatamente: $\gamma_0 Q = 6^h - \zeta_0 \qquad \gamma Q = 6^h + z = 6^h + \zeta - \varphi$.

Posto su $\gamma Q \qquad \gamma_0' Q = \gamma_0 Q = 6^h - \zeta_0$

si ha per la precessione generale in ascensione retta:

$$\gamma\gamma_0' = \gamma Q - \gamma_0' Q = z + \zeta_0.$$

Infine si ha per la precessione lunisolare in ascensione retta:

$$\gamma'\gamma_0' = \gamma'\gamma + \gamma\gamma_0' = \varphi + z + \zeta_0 = \varphi + \zeta - \varphi\, \zeta_0 = \zeta + \zeta_0.$$

Le costanti ϑ e ϑ' sono quantità simili alla ζ già considerata, essendo $6^h + \vartheta$ e $6^h + \vartheta'$ gli archi intercetti tra il nodo dei due equatori considerati e l'eclittica al tempo t_0.

III. Riduzione pel moto proprio applicata dopo di quella per la precessione (fig. 1).

Quando si sia applicata per prima la riduzione per la precessione le coordinate che si sono ottenute rappresentano la posizione della stella al tempo t riferita all'eclittica o all'equatore e all'equinozio del tempo t': quindi essendo cambiati gli assi di riferimento devono essere cambiati gli angoli M ed N della direzione del moto proprio col meridiano della stella onde occorrerà determinarli prima di applicare le formole (11) e (12) o (13) e (14).

Riduzione pel moto proprio quando la posizione della stella è data in coordinate eclittiche λ *e* β. — Consideriamo le posizioni S ed S' della stella ai tempi t e t' e per le stesse date le posizioni C e C' del polo dell'eclittica. Eseguita la riduzione per la precessione si hanno le coordinate λ_1 e β_1 di S riferite all'eclittica e all'equinozio del tempo t': devono naturalmente essere noti il moto proprio μ e l'angolo M_0 (vedi cap. I) che nella figura è l'angolo CSr: occorre dunque anzitutto trovare l'angolo $C'Sr$ che indicheremo con M_0' legato al precedente dalla relazione:

$$M_0' = M_0 + S \tag{21}$$

dove S è l'angolo CSC'. Per trovare S consideriamo il triangolo CSC': se λ_0 e β_0 sono le coordinate di S riferite a C e al suo equinozio e λ' e β' quelle di S' riferite a C' e al suo equinozio per quel che si vide nel secondo capitolo si ha:

$$CC' = k_1 \qquad CS = 90^\circ - \beta_0 \qquad C'S = 90^\circ - \beta_1$$
$$C(S)C' = S \qquad C(C')S = 18^h - L' \qquad C'(C)S = 6^h + L$$

e applicando il teorema del seno

$$\operatorname{sen} S = \operatorname{sen} k_1 \cos L \sec \beta_1 \quad \text{oppure} \quad \operatorname{sen} S = -\operatorname{sen} k_1 \cos L' \sec \beta_0. \tag{22}$$

Indicato poi con M' l'angolo $C'S'r$ il triangolo $C'SS'$ ci dà:

$$C'S = 90^\circ - \beta_1 \qquad C'S' = 90^\circ - \beta' \qquad SS' = \mu T$$
$$C'(S')S = 180^\circ - M' \qquad C'(S)S' = M_0' \qquad S(C')S' = \lambda' - \lambda_1$$

e applicando le formole fondamentali della trigonometria sferica:

$$(23)\quad \begin{cases} \cos\beta' \operatorname{sen}(\lambda'-\lambda_1)=\operatorname{sen} M_0' \operatorname{sen}\mu T \\ \cos\beta' \cos(\lambda'-\lambda_1)=\cos\beta_1\cos\mu T-\operatorname{sen}\beta_1\operatorname{sen}\mu T\cos M_0' \\ \operatorname{sen}\beta'=\operatorname{sen}\beta_1\cos\mu T+\cos\beta_1\operatorname{sen}\mu T\cos M_0' \end{cases}$$

$$(24)\quad \begin{cases} \cos\beta'\cos M'=-\operatorname{sen}\beta_1\operatorname{sen}\mu T+\cos\beta_1\cos\mu T\cos M_0' \\ \cos\beta'\operatorname{sen} M'=\operatorname{sen} M_0'\cos\beta_1 \end{cases}$$

le (23) ci danno le coordinate al tempo t' riferite all'eclittica e all'equinozio di t'; le (24) l'angolo M'.

Riduzione pel moto proprio quando la posizione della stella è data in coordinate equatoriali α *e* δ. — Consideriamo ora invece delle posizioni C e C' del polo dell'eclittica quelle P e P' del polo dell'equatore ai tempi t e t': eseguita la riduzione per la precessione abbiamo dunque le coordinate α_1 e δ_1 di S riferite all'equatore e all'equinozio del tempo t': si hanno anche il moto proprio μ e l'angolo N_0 (vedi cap. I) rappresentato nella figura dall'angolo PSr: occorre trovare l'angolo $P'Sr$ che indicheremo con N_0'; se si indica con S_1 l'angolo PSP' si ha:

$$(25)\qquad N_0' = N_0 + S_1.$$

Per cercare S_1 consideriamo il triangolo PSP' (vedi cap. II)

si ha: $PP' = \theta_1$ $\quad PS = 90^\circ - \delta_0$ $\quad P'S = 90^\circ - \delta_1$

$P(S)P' = S_1$ $\quad P(P')S = 12^h - A'$ $\quad P'(P)S = 12^h + A$

essendo α_0 e δ_0 le coordinate di S riferite a P e al suo equinozio, mentre α' δ' rappresenteranno quelle di S' riferite a P' e al suo equinozio. Il teorema del seno ci dà per trovare S_1:

$$(26)\quad \operatorname{sen} S_1 = -\operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen} A \sec\delta_1 \quad \text{oppure} \quad \operatorname{sen} S_1 = \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen} A' \sec\delta_0$$

Indicato con N' l'angolo $P'S'r$ il triangolo PSS' ci dà:

$P'S = 90^\circ - \delta_1$ $\quad P'S' = 90^\circ - \delta'$ $\quad SS' = \mu T$

$P(S')S = 180^\circ - N'$ $\quad P'(S)S' = N_0'$ $\quad S(P')S' = \alpha' - \alpha_1$

e applicando le formole fondamentali della trigonometria sferica:

$$(27)\quad \begin{cases} \cos\delta' \operatorname{sen}(\alpha' - \alpha_1) = \operatorname{sen} N_0' \operatorname{sen} \mu T \\ \cos\delta' \cos(\alpha' - \alpha_1) = \cos\delta_1 \cos\mu T - \operatorname{sen}\delta_1 \operatorname{sen}\mu T \cos N_0' \\ \operatorname{sen}\delta' = \operatorname{sen}\delta_1 \cos\mu T + \cos\delta_1 \operatorname{sen}\mu T \cos N_0' \end{cases}$$

$$(28)\quad \begin{cases} \cos\delta' \cos N' = -\operatorname{sen}\delta_1 \operatorname{sen}\mu T + \cos\delta_1 \cos\mu T \cos N_0' \\ \cos\delta' \operatorname{sen} N' = \operatorname{sen} N_0' \cos\delta_1 \end{cases}$$

le (27) danno le coordinate al tempo t' riferite all'equatore e all'equinozio di t'; la (28) l'angolo N'.

Componenti il moto proprio riferite alla posizione finale della stella. — I° CASO CHE LA RIDUZIONE PEL MOTO PROPRIO SIA STATA ESEGUITA PRIMA DI QUELLA PER LA PRECESSIONE. — 1) *Componenti del moto proprio in coordinate eclittiche.* — Dette λ e β le coordinate al tempo t' riferite all'eclittica e all'equinozio del tempo t; λ' e β' le stesse coordinate riferite però all'eclittica e all'equinozio del tempo t'; L_1 e L_1' le quantità già indicate con L ed L' (allo scopo di mettere in evidenza che le λ e λ' che vi entrano sono già state corrette pel moto proprio) vediamo subito che pel nostro scopo occorrono λ' β' μ e M': di queste quantità solo M' è incognito ma è noto l'angolo M dato dalla (12) e che nella figura è rappresentato dall'angolo $CS'r$ mentre l'angolo M' è dato da $C'S'r$: quindi detto S' l'angolo $CS'C'$ si avrà:

$$(29)\qquad M' = M + S'.$$

Pel calcolo di S' consideriamo il triangolo $CS'C'$ in cui:

$$CC' = k_1 \qquad CS' = 90^\circ - \beta \qquad C'S' = 90^\circ - \beta'$$

$$C(S')C' = S' \qquad C(C')S' = 18^h - L'_1 \qquad C'(C)S' = 6^h + L_1$$

quindi il teorema del seno dà:

$$(30)\quad \operatorname{sen} S' = \operatorname{sen} k_1 \cos L_1 \sec\beta' \quad \text{oppure} \quad \operatorname{sen} S' = -\operatorname{sen} k_1 \cos L_1' \sec\beta.$$

Calcolato poi M' con la (29) si ha per le componenti del moto proprio in S' e in coordinate eclittiche:

$$(31)\qquad \mu_{\lambda'} = \mu \operatorname{sen} M' \sec\beta' \qquad \mu_{\beta'} = \mu \cos M'.$$

2) *Componenti del moto proprio in coordinate equatoriali.* — Indicate con α e δ le coordinate al tempo t' riferite all'equa-

tore e all'equinozio di t; con α' e δ' quelle riferite all'equatore e all'equinozio di t'; con A_1 e A_1' le quantità già indicate con A e A' rispettivamente (e ciò per la ragione addotta riguardo alle L_1 e L_1') si vede che occorre avere α' δ' μ N': di esse solo N' è incognito (ossia l'angolo $P'S'r$) ma è noto l'angolo $PS'r$ già indicato con N e che si ha dalle formole (14): indicato con S_1' l'angolo $PS'P'$ si ha pel calcolo di N':

$$N' = N + S_1'. \tag{32}$$

Pel calcolo di S_1' consideriamo il triangolo $PS'P'$ in cui:

$$PP' = \theta_1 \qquad PS' = 90^\circ - \delta \qquad P'S' = 90^\circ - \delta'$$
$$P(S')P' = S_1' \qquad P(P')S' = 12^h - A_1' \qquad P'(P)S' = 12^h + A_1$$

applicando il teorema del seno si ha:

$$\text{sen} S_1' = -\text{sen}\theta_1 \text{sen} A_1 \sec\delta' \quad \text{oppure} \quad \text{sen} S_1' = \text{sen}\theta_1 \text{sen} A_1' \sec\delta \tag{33}$$

da cui per le componenti del moto proprio in S' e in coordinate equatoriali:

$$\mu_{\alpha'} = \mu \,\text{sen} N' \sec\delta' \qquad \mu_{\delta'} = \mu \cos N'. \tag{34}$$

II° Caso che la riduzione pel moto proprio sia stata eseguita dopo di quella per la precessione. — 1) *Componenti il moto proprio in coordinate eclittiche.* — Essendo noti λ' e β' mediante le (23), M' mediante le (24), e inoltre μ, non resta che applicare le (31).

2) *Componenti il moto proprio in coordinate equatoriali.* — Essendo noti α' e δ' mediante le (27), N' mediante le (28) e inoltre μ, non resta che applicare le (34).

IV. Valore numerico delle costanti occorrenti per la riduzione.

Nella " Spherical Astronomy „ di Simone Newcomb si trovano sviluppati in serie di potenze del tempo i valori numerici di molte delle costanti occorrenti per la riduzione delle posizioni delle stelle per effetto della precessione degli equinozii: esse sono riferite al 1850,0 come data iniziale. Occorre ora sviluppare quelle costanti che nel libro stesso non sono state calcolate, e ricalcolare quelle il cui sviluppo è insufficiente, spingendone l'esattezza fino all'estremo limite consentito dai dati

di partenza. Ricalcoleremo perciò il valore dell'angolo N, che esprime la distanza angolare dell'asse istantaneo di rotazione dall'equinozio attuale e le costanti che ne sono funzione, le costanti θ e ϵ_1 e poi $\psi_1\, k\, N_1$ che mancano nel libro suddetto.

Valore numerico dell'angolo N *e di* ϵ. — N_0 essendo la distanza angolare dell'asse istantaneo di rotazione dall'equinozio del 1850,0 ed N essendo quella dall'equinozio attuale, segue che le loro velocità differiscono dalla velocità l, della precessione generale in longitudine, così che abbiamo:

$$D_T N = D_T N_0 - l \quad (35)$$ [1]

ove detta p la costante meccanica della precessione, cioè $5490'',66$ [2] κ la velocità del movimento dell'eclittica attorno al suo asse istantaneo di rotazione, ϵ l'obliquità dell'eclittica

$$l = p \cos\epsilon - \kappa \operatorname{sen} N \operatorname{cotang}\epsilon$$ [3].

Occorre perciò procedere per approssimazioni successive, di cui la prima si trova eseguita nel libro citato. Si ha:

$$N_0 = 6^o 30'.32 + 28'.972\, T + 0'.0112\, T^2$$ [4]

da cui $$D_T N_0 = 28'.972 + 0'.0224\, T.$$

Sviluppando i valori di κ dati a pag. 231 dell'opera citata si ottiene: $$\kappa = 47''.141 - 0''.0680\, T + 0''.00080\, T^2$$

mentre sviluppando i valori di l dati a pag. 406 dell'opera suddetta si ottiene: $$l = 83'.742 + 0'.0371\, T.$$

Con questo valore di l passiamo alla seconda approssimazione. Sostituendo nella (35) i valori di $D_T N_0$ e di l si ha:

$$D_T N = -54'.770 - 0'.0147\, T$$

da cui integrando $N = 6^o 30'.32 - 54'.770\, T - 0'.00734\, T^2$.

Con questo nuovo valore di N ricalcoliamo l. Calcolando dapprima una serie di valori di 50 in 50 anni dal 1750 al 2100

---

(1) Newcomb, *Spherical Astronomy*, pag. 237. Avvertiamo qui che il segno di derivata rispetto al tempo sarà indicato con D_T.

(2) Op. cit., pag. 236.

(3) Op. cit., pag. 235.

(4) Op. cit., pag. 237.

e poi sviluppando in serie secondo la formola di interpolazione di Stirling si ha:

$$D_T\epsilon = -\kappa \cos N\text{(1)} = -46''.837 - 0''.0174\, T + 0''.0052\, T^2$$

e integrando:

$$\epsilon = 23^\circ 27' 31''.68 - 46''.837\, T - 0''.0087\, T^2 + 0''.0017\, T^3$$

essendosi aggiunta come costante di integrazione il valore di ϵ pel 1850. Dopo di ciò calcoliamo l che esprimeremo in primi di arco. Operando come precedentemente sulla formola data prima si ha: $l = 83'.742 + 0'.0371\, T$

siccome questa coincide con quella da cui si è partiti l'approssimazione è finita e quindi:

$$N = 6^\circ 30',32 - 54'.770\, T - 0'.00734\, T^2.$$

Valore numerico di ψ_1. — Sviluppiamo dapprima la costante φ_1 (precessione planetaria in λ) legata a ψ_1 dalla relazione:

$$\psi_1 = \psi - \varphi_1. \tag{36}$$

A tal uopo consideriamo il triangolo ☊γγ′ della fig. 4: in esso è:

$$☊\gamma' = N_1 - \psi \qquad ☊\gamma = N_1 - \psi_1 \qquad \gamma\gamma' = \varphi$$
$$☊(\gamma)\gamma' = \epsilon \qquad ☊(\gamma')\gamma = 180^\circ - \epsilon_1$$

allora tenendo conto della (36) le analogie di Nepero danno:

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}\,(\psi - \psi_1) = \text{tang}\,\frac{1}{2}\,\varphi_1 = \frac{\cos\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon)}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\varphi$$

e osservando che $\frac{1}{2}\varphi$ $\frac{1}{2}\varphi_1$ e $\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon)$ sono sempre angoli molto piccoli

$$\varphi_1 = \varphi \cos\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon) \tag{37}$$

e derivando rispetto a T:

$$D_T\varphi_1 = D_T\varphi \cos\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon) - \frac{1}{2}\varphi \,\text{sen}\, \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon) D_T(\epsilon_1 + \epsilon). \tag{38}$$

---

(1) Newcomb, Op. cit., pag. 235.

Ora si ha: $\varphi = 13''.416\, T - 2''.380\, T^2 - 0''.0014\, T^3$ [1]

da cui: $D_T \varphi = 13''.416 - 4''.760\, T - 0''.0042\, T^2$

inoltre: $\epsilon_1 = 23^\circ\, 27'\, 31''.68 + 0''.06521\, T^2 - 0''.00773\, T^3$ [2]

$D_T \epsilon_1 = 0''.13042\, T - 0''.02320\, T^2$ [2]

questi ultimi combinati coi valori di ϵ e $D_T \epsilon$ già trovati danno:

$$\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon) = 23^\circ 27' 31''.68 - 23''.4185\, T + 0''.02825\, T^2 - 0''.0030\, T^3$$

$$D_T(\epsilon_1 + \epsilon) = -46''.837 + 0''.1130\, T - 0''.0180\, T^2.$$

Da questi calcolando la (38) si ha:

$$D_T \varphi_1 = 12''.307 - 4''.3653\, T - 0''.0042\, T^2$$

avendosi inoltre [3] $D_T \psi = 5036''.84 - 2''.130\, T - 0''.010\, T^2$

risulta: $D_T \psi_1 = 5024''.53 + 2''.235\, T - 0''.006\, T^2$

e integrando rispetto a T:

$$\psi_1 = 5024''.53\, T + 1''.118\, T^2 - 0''.002\, T^3.$$

Valore numerico di k. — Consideriamo (fig. 3) il polo C_0 dell'eclittica al 1850,0 e il polo C' dell'eclittica per un'altra data qualunque. Sia C_1 la posizione di questo polo consecutiva alla C'; se κ è la velocità del movimento dell'eclittica attorno al suo asse istantaneo di rotazione: $C'C_1 = \kappa dT$.

Ma C_0C' è eguale a k, quindi: $C_0C_1 = k + dk$

e facendo $C_0C_1' = C_0C'$ $\qquad C_1'C_1 = dk$.

Condotta la $C's$ prolungamento di C_0C' e la $C'r$ parallela a C_0P_0 dalle definizioni già date si ha:

$$r(C')s = P_0(C_0)C' = N_1 \qquad C_1(C')r = N_0$$

quindi: $\qquad C_1(C')s = N_0 - N_1.$

Il triangolo $C_0C'C_1'$ avendo i lati molto piccoli si può considerare piano e con gli angoli alla base retti perchè l'angolo in C_0 è infinitesimo. Quindi il triangolo infinitesimo $C'C_1'C_1$ ci dà:

---

[1] Newcomb, Op. cit., pag. 243.
[2] Id., pag. 244.
[3] Id., pag. 242.

$$\text{ang in } C' = 90^\circ - (N_0 - N_1) \qquad \text{ang in } C_1 = N_0 - N_1$$

e perciò:

$$dk = \kappa dT \cos (N_0 - N_1)$$

da cui:

$$D_T k = \kappa \cos (N_0 - N_1). \tag{39}$$

Assumiamo per N_1 i valori scritti a pag. 232 dell'Astronomia sferica di Newcomb, e i valori di N_0 e κ trovati precedentemente: si ottiene così:

$$D_T k = 47''.141 - 0''.0680\, T + 0''.00038\, T^2$$

e integrando rispetto a T:

$$k = 47''.141\, T - 0''.0340\, T^2 + 0''.00013\, T^3.$$

Valore numerico dell'angolo N_1. — Seguitiamo a considerare la fig. 3. Essendo l'angolo P_0C_0C' eguale a N_1, l'angolo $C'C_0C_1$ è eguale a dN_1: ora siccome $C'C_1'$ rappresenta la distanza tra due archi di cerchio massimo C_0C' e C_0C_1 alla distanza k da C_0 si ha un teorema di trigonometria sferica differenziale che dice: se due cerchi massimi intersecantisi in C_0 formano l'angolo infinitesimo dN_1 la loro distanza presa ad una distanza k da C_0 è data da (essendo k molto piccolo) $\quad C'C_1' = kdN_1$
e considerando ancora il triangolo infinitesimale $C'C_1'C_1$ rettangolo in C_1' si ha: $\quad C'C_1' = \kappa dT \text{sen}(N_0 - N_1)$
quindi: $\quad kdN_1 = \kappa dT \text{sen}(N_0 - N_1)$
da cui:

$$kD_T N_1 = \kappa \text{sen}(N_0 - N_1). \tag{40}$$

Per evitare il metodo delle approssimazioni successive eliminiamo $(N_0 - N_1)$ tra la (39) e la (40) quadrando e sommando membro a membro. Si ottiene:

$$D_T N_1 = \frac{\sqrt{(\kappa - D_T k)(\kappa + D_T k)}}{k}.$$

Per determinare $\kappa + D_T k$ basta sommare le espressioni che già si hanno: riguardo a $\kappa - D_T k$ osserviamo che partendo dalla (39) e derivando si ha per la data iniziale

$$D_T k = \kappa \qquad D_T^2 k = D_T \kappa \qquad D_T^3 k = D_T^2 \kappa - \kappa [D_T N_1]^2 \text{ (1)}$$

(1) Bisogna infatti ricordare che applicando alla (40) il teorema de l'Hôpital, tenendo conto della (39) e passando al limite per $T = 0$ si ottiene $\quad D_T N_1 = \frac{1}{2} D_T N_0.$

si deduce che i termini in T^0 e in T devono mancare, ma vi è quello in T^2, quindi $\kappa - D_T k = \frac{1}{2} \kappa [D_T N_1]^2 T^2$.

Per determinare il coefficiente di T^2 partiamo dal triangolo ☋γγ′ (fig. 4): siccome φ e k sono molto piccoli il teorema del seno e quello del coseno ci danno:

$$\text{(41)} \quad \operatorname{sen}(N_1 - \psi) = \frac{\varphi}{k} \operatorname{sen}\epsilon \qquad \text{(42)} \quad k \cos(N_1 - \psi) = \operatorname{sen}(\epsilon_1 - \epsilon).$$

Derivando la (41) tenendo conto della (42) si ha:

$$D_T N_1 = D_T \psi + \frac{\operatorname{sen}\epsilon}{\operatorname{sen}(\epsilon_1 - \epsilon)} \left[D_T \varphi - \frac{\varphi}{k} D_T k + \varphi \operatorname{cotang}\epsilon \, D_T \epsilon \right].$$

Applicando ora due volte il teorema de l'Hôpital e passando al limite per $T = 0$ ricordando che per l'epoca iniziale:

$$D_T(\epsilon_1 - \epsilon) = -D_T \epsilon \qquad D_T \psi - \cos\epsilon . D_T \varphi = D_T \psi - D_T \varphi_1 = D_T \psi_1$$

si ottiene:

$$\text{(43)} \qquad D_T N_1 = D_T \psi_1 + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}\epsilon}{D_T(\epsilon_1 - \epsilon)} \left[D_T^2 \varphi - D_T \varphi \frac{D^2{}_T k}{D_T k} \right].$$

Per la data iniziale sappiamo che si ha:

$$\epsilon = 23^\circ\, 27'\, 31''.68 \qquad D_T k = 47''.141$$
$$D_T^2 k = -0''.0680 \qquad D_T \psi_1 = 5024''.53.$$

Per avere $D_T \varphi$ e $D_T^2 \varphi$ col maggior numero possibile di cifre deriviamo una e due volte la (41) scritta nella forma $\varphi = k \operatorname{sen}(N_1 - \psi) \operatorname{cosec}\epsilon$ e passiamo al limite per $T = 0$: si ha rispettivamente:

$$\text{(44)} \qquad D_T \varphi = D_T k \operatorname{sen} N_1 \operatorname{cosec}\epsilon$$

$$\text{(45)} \qquad D_T^2 \varphi = D_T^2 k \operatorname{sen} N_1 \operatorname{cosec}\epsilon +$$
$$+ 2 D_T k \cos N_1 \operatorname{cosec}\epsilon \, D_T(N_1 - \psi) - 2 D_T k \operatorname{sen} N_1 \operatorname{cotang}\epsilon \operatorname{cosec}\epsilon \, D_T \epsilon.$$

Ora pel 1850 $\qquad N_1 = N = N_0 = 6^\circ 30'.32$

$$D_T N_1 = \frac{1}{2} D_T N_0 = 14'.486 \qquad D_T \psi = 5036''.84 = 83'.947 \text{ [1]}$$

---

[1] Si confronti l'opera di Newcomb più volte citata, cap. IX.

e sostituendo nella (44) e (45):

$$D_T\varphi = 13''.4163 \qquad D_T^2\varphi = -4''.75987.$$

Inoltre essendo $-D_T\epsilon = \kappa \cos N$

si ha pel 1850 $-D_T\epsilon = D_T(\epsilon_1 - \epsilon) = 46''.8375.$

Sostituendo nella (43) si ottiene pel 1850 $D_T N_1 = 869''.17.$
Allora detto R'' il numero dei secondi in un radiante si avrà:

$$R''\sqrt{\kappa - D_T k} = 4219.77\ T$$

si ha poi $\kappa + D_T k = 94''.282 - 0''.1360 T + 0''.00118 T^2$ quindi

$$D_T N_1 = \frac{4219.77\sqrt{94''.282 - 0''.1360\,T + 0''.00118\,T^2}}{47''.141 - 0''.0340\,T + 0''.00013\,T^2}.$$

Calcolando separatamente l'espressione di $\sqrt{\kappa + D_T k}$ e quella di $\frac{T}{k}$ e poi moltiplicando i risultati fra loro e per $\frac{R''}{T}\sqrt{\kappa - D_T k}$ si ottiene

$$D_T N_1 = 869''.17 - 0''.0012\,T + 0''.00287\,T^2.$$

Da cui integrando e aggiungendo come costante il valore di N_1 pel 1850 si ha [1]:

$$N_1 = 6°30'19''.20 + 869''17\,T - 0''.0006\,T^2 + 0''.00096\,T^3.$$

Valore numerico dell'angolo ϵ_1. — In molti casi non basta il valore che di ϵ_1 dà Newcomb a pag. 244 della sua “ Sphe-

---

[1] Trasformando in secondi le frazioni di minuto di $N_1 = 6°30'.32$ si ha $6°30'19''.20$. Ma perchè questo valore si potesse considerare esatto occorrerebbe che almeno la cifra dei millesimi del primo fosse zero: l'assumeremo tale in base alle seguenti considerazioni: il calcolo fatto precedentemente per avere il valore di $D_T N_1$ pel 1850 può riguardarsi come calcolo di seconda approssimazione partendo dal valore $D_T N_1 = 14'.486$; ma il valore nuovo risultante è quasi eguale al primitivo e per giungervi non abbiamo dovuto supporre che N_1 fosse esattamente $6°30'.32$ perchè dove occorreva sen N_1 bastava calcolare al massimo con 4 decimali, mentre dove ne occorrevano 5 o 6 non c'era che $\cos N_1$ o $\cos N$. Quindi si può dire che pel 1850 $N_1 = 6°30'.320 = 6°30'19''.20 \pm 0''.03.$

rical Astronomy „: quindi è opportuno ricalcolarlo col massimo numero possibile di cifre consentito dai dati con cui il calcolo si eseguisce. Partendo dalla formola [1]:

$$D_T \epsilon_1 = p k \cos\epsilon \operatorname{sen}(N_1 - \psi)$$

e usando dei dati più volte adoperati si arriva all'espressione:

$$D_T\epsilon_1 = 0''.130420\,T - 0''.023191\,T^2 - 0''.0000061\,T^3 + 0''.0000016\,T^4$$

e integrando: $\epsilon_1 = 23°27'31''.68 + 0''.065210\,T^2 -$

$$0''.007730\,T^3 - 0''.0000015\,T^4 + 0''.00000032\,T^5.$$

Valore numerico dell'angolo θ. — Newcomb a pag. 246 dell'opera citata dà per θ un valore che molte volte non basta: ricalcoliamolo partendo dalla formola:

$$D_T\theta = p \operatorname{sen}\epsilon \cos\epsilon \cos z \text{ [2]}$$

dove: $z = 2303''.555\,T + 1''.094\,T^2 + 0''.0189\,T^3$ [3]

si ottiene così: $D_T\theta = 2005''.11 - 0''.852\,T - 0''.125\,T^2$

e integrando: $\theta = 2005''.11\,T - 0''.426\,T^2 - 0''.0417\,T^3$.

Riassumendo, ecco lo specchio dei valori numerici delle costanti occorrenti per la riduzione trigonometrica: l'epoca di partenza è il 1850.0:

1° Obliquità dell'eclittica:

$$\epsilon = 23°27'31''.68 - 46''.837\,T - 0''.0087\,T^2 + 0''.0017\,T^3$$

2° Inclinazione dell'eclittica mobile su quella iniziale:

$$k = 47''.141\,T - 0''.0340\,T^2 + 0''.00013\,T^3$$

3° Angolo che il nodo discendente dell'eclittica mobile sull'eclittica iniziale fa con l'equinozio iniziale:

$$N_1 = 6°30'19''.20 + 869''.17\,T - 0''.0006\,T^2 + 0''.00096\,T^3$$

---

[1] NEWCOMB, *Spherical Astronomy*, pag. 241.
[2] Id., pag. 246.
[3] Id., pag. 245.

4° Inclinazione dell'equatore mobile sull'eclittica iniziale:

$$\epsilon_1 = 23°27'31''.68 + 0''.065210\,T^2 - 0''.007730\,T^3 - \\ - 0''.0000015\,T^4 + 0''.00000032\,T^5$$

5° Inclinazione dell'equatore mobile su quello iniziale:

$$\theta = 2005''.11\,T - 0''.426\,T^2 - 0''.0417\,T^3$$

6° Precessione lunisolare in λ:

$$\psi = 5036''.84\,T - 1''.065\,T^2 - 0''.0033\,T^3$$

7° Precessione generale in λ:

$$\psi_1 = 5024''.53\,T + 1''.118\,T^2 - 0''.0020\,T^3$$

8° Precessione planetaria in α:

$$\varphi = 13''.416\,T - 2''.380\,T^2 - 0''.0014\,T^3$$

9° Costanti per la riduzione in α:

$$\zeta_0 = 2303''.555\,T + 0''.302\,T^2 + 0''.0185\,T^3$$

$$z = 2303''555\,T + 1''.094\,T^2 + 0''.0189\,T^3.$$

Con questi dati è stato possibile calcolare in 6 modi diversi la posizione della stella 1 Bode Ursae Minoris ottenendosi risultati pienamente concordanti sebbene si operasse nelle condizioni di calcolo più difficili.

Torino, 21 maggio 1909.

Relazioni fra Calcolo delle differenze e Calcolo differenziale.

Nota di M. PEYROLERI.

Esistono numerose analogie fra il calcolo delle differenze finite e il calcolo differenziale.

Mi propongo di esporne alcune già note di cui darò dimostrazioni nuove, ed alcune proposizioni nuove.

Si consideri la successione di quantità reali

$$f(-2),\ f(-1),\ f0,\ f1,\ f2,\ \dots fn,\ \dots$$

estesa indefinitamente in ambi i sensi. Cioè suppongasi:

$$f \in \mathrm{q\,F\,n}.$$

Se la successione considerata fosse data solo nell'intervallo discontinuo $a \cdots b$, cioè pei valori $a, a+1, a+2, \dots b$, si può sempre immaginare prolungata ad arbitrio a destra ed a sinistra.

I.

Un noto teorema di algebra (cfr. p. es. Formul. tomo V, pag. 239 P 2 · 1), dice: *Se una funzione reale continua definita in un intervallo assume agli estremi valori di segno contrario, essa si annulla per un valore intermedio.*

Se al posto di una funzione consideriamo una successione di quantità, supposto ancora che essa pei valori interi a e $b > a$ assuma valori di segno contrario, non si può più affermare che essa necessariamente si annulli nell'interno dell'intervallo.

Si può solo conchiudere che o essa si annulla o assume due valori consecutivi di segno contrario.

Per semplificare il linguaggio dirò che una successione f

presenta nel valore intero x una variazione se $fx \times f(x+1) \leqq 0$ cioè se una delle due quantità è nulla, ovvero esse sono di segno contrario.

Allora il teorema diventa:

$$a, b \epsilon n \,.\, a < b \,.\, fa \times fb < 0 \,.\, \supset .\, \exists a \cdots (b-1) \cap x \ni [fx \times f(x+1) \leqq 0].$$

" *Data una successione di quantità e due interi* a, b *con* a<b, *se* fa *e* fb *sono di segno contrario allora esiste un valore fra* a *e* b — 1 *(inclusi gli estremi) in cui la successione presenta una variazione* „.

Infatti, supposto per fissare le idee, $fa < 0$, sarà $fb > 0$. Detto x il massimo dei valori tra a e b per i quali f è negativa, sarà x minore di b cioè compreso tra a e $b-1$; fx sarà negativo, $f(x+1)$ positivo o nullo, onde in x c'è variazione

$$\mathrm{Hp} \,.\, x = \max a \cdots b \cap z \ni (fz < 0) \,.\, \supset .\, x \epsilon a \cdots (b-1) \,.\, fx \times f(x+1) \leqq 0.$$

Si può anche dire: se 0 è un valor medio fra quelli assunti dalla successione, allora la successione presenta una variazione.

$$0 \,\epsilon\, \mathrm{Med} fa \cdots b \,.\, \supset .\, \exists a \cdots (b-1) \cap x \ni [fx \times f(x+1) \leqq 0].$$

II.

Il teorema del massimo e minimo per le funzioni reali di variabile reale è (cfr. Form., pag. 286):

Se una funzione definita in un campo u *diventa massima o minima pel valore* x *interno al campo e ivi ha derivata, questa è nulla.*

L'analogo teorema per il calcolo delle differenze è:

Se la successione f *diventa massima o minima per un valore* x *interno all'intervallo* a⋯b, *allora la differenza* Δf *presenta una variazione pel valore* x — 1

$$a, b \epsilon n \,.\, a < b+1 \,.\, x \epsilon (a+1) \cdots (b-1) \,.\, fx = \max f` a \cdots b \cup fx =$$
$$= \min f` a \cdots b \,.\, \supset .\, \Delta f(x-1) \times \Delta fx \leqq 0.$$

Infatti: supposta la fx massima, sarà $f(x-1) \leqq fx \geqq f(x+1)$

cioè $\Delta f(x-1)$ sarà positivo o nullo, e Δfx negativo o nullo, dunque c'è variazione in $(x-1)$.

Lo stesso si dica pel minimo.

III.

Il teorema di Rolle (Form. pag. 287): *Se una funzione reale* f *definita in un intervallo continuo ed avente derivata, è nulla negli estremi, la sua derivata si annulla per un certo valore intermedio* ha per corrispondente:

Dati due numeri interi a, b *tali che* $a < b+1$, *se la successione* f *si annulla per i valori* a *e* b, *allora esiste un valore* x *dell'intervallo* $a \cdots (b-1)$ *per il quale la differenza ammette una variazione:*

$$a,\ b \,\epsilon\, \mathrm{n} : a < b \,.\, f \epsilon \mathrm{qFn} \,.\, fa = fb =$$
$$= 0 \,.\, \supset .\, \exists a \cdots (b-1) \cap x \ni [\Delta fx \times \Delta f(x+1) \leqq 0].$$

Infatti se f assume valori positivi, essa diventa massima per un valore dell'intervallo diverso dagli estremi, ove è nulla, ed ivi, pel teorema II la differenza avrà una variazione.

Se la funzione f assume valori negativi, $-f$ assume valori positivi, e dal ragionamento precedente segue la tesi.

Se poi la funzione assume valori non positivi e non negativi è sempre nulla, e la differenza sarà sempre nulla essa pure, sicchè è ancora vero il teorema.

IV.

Ma il teorema così esteso non può servire come quello del Calcolo per dedurne altri. Modifichiamolo nell'ipotesi e nella tesi come segue:

Consideriamo la successione f dei valori della funzione f per i valori interi dell'intervallo discontinuo $a \cdots b$. Allora se f *è tale che esista una variazione in* a *e una in* $b-1$, *dico che nella successione* $\Delta f a$, $\Delta f(a+1)$, ..., $\Delta f(b-1)$ *c'è una variazione.*

Dimostrazione. — Suppongo dapprima $f a < 0, f(a+1) > 0$. Allora $\Delta f a > 0$.

Se in tutta la successione data non vi sono più variazioni per i valori $(a+1) \ldots (b-2)$, ma c'è una variazione pel valore $b-1$ allora sarà $f(b-1) > 0, f b < 0$ e perciò $\Delta f(b-1) < 0$. Allora la successione delle differenze $\Delta f a, \Delta f(a+1), \ldots, \Delta f(b-1)$ è tale che i due valori estremi sono di segno contrario, sicchè esisterà un valore x tale da far acquistare alla successione delle differenze una variazione.

Ripetendo il ragionamento per il caso che sia $f a > 0$ e $f(a+1) < 0$ si dimostra ancora il teorema.

Se nella successione f esiste una variazione per un valore c compreso tra a e $b-1$, ragionando sulla successione definita nell'intervallo $a \cdots c+1$ risulta che anche la successione delle differenze $\Delta f a$, $\Delta f(a+1), \ldots, \Delta f c$ avrà una variazione.

Considero ora il caso che la funzione si annulli per un valore estremo, ad es., che sia $f a = 0$. Se è $f(a+1) > 0$ sarà $f(b-1) > 0$, $f b < 0$ e allora $\Delta f a > 0$. $\Delta f b < 0$. Dunque nella successione delle Δ si avrà una variazione.

Se fosse $f a = 0$, $f b = 0$, nell'ipotesi che esista una variazione in a e una in $b-1$, poichè sarà $f a = 0$ ed $f(b-1)$ avrà lo stesso segno di $f a$, se non esistono altre variazioni, le differenze $\Delta f a$ e $\Delta f(b-1)$ assumeranno segni opposti e si conclude che esiste una variazione nella successione delle Δ.

Se si annulla in a la differenza, ossia $\Delta f a = 0$, ed è $f(a+1) > 0$ sarà $\Delta f b > 0$ ossia c'è una variazione nel 1° e nell'ultimo termine della successione, dunque vi saranno due Δ successive di cui una nulla e l'altra negativa.

V.

Dimostriamo il teorema: *Se la successione* f *si annulla per* $a < b < c$, *allora nella successione delle differenze seconde vi sarà una variazione fra* a *e* $c-2$.

Infatti per il teorema II stabilito prima come analogo del teorema di Rolle, la successione delle differenze prime $\Delta f a$, $\Delta f(a+1), \ldots \Delta f(b-1)$ avrà una variazione tra a e $(b-1)$ e un'altra fra b e $(c-1)$. Applicando a questa successione il teorema precedente si deduce che la successione delle differenze seconde avrà una variazione tra a e $(c-2)$.

In generale se in una successione f si hanno n elementi nulli: $fa\ fb\ fc\ ...fk$ ove $a < b < c ... < k$, la successione delle differenze di ordine $n - 1$ avrà una variazione tra a e $k - n + 1$. Si può vedere applicando lo stesso ragionamento alle varie successioni di valori assunti dalla funzione negli intervalli $a \cdots b$, $b \cdots c$, ..., $n \cdots k$ in cui si può scomporre la successione data, e poi alle successioni delle differenze fino all'ordine $n - 2$.

VI.

In calcolo si ha la proposizione:

Se si considerano tre funzioni f g h *definite nell'intervallo* $\mathrm{a} \vdash\!\dashv \mathrm{b}$ *ove* $\mathrm{a} < \mathrm{b}$ *e aventi derivate prime in tutto l'intervallo, allora esiste un valore* x *dell'intervallo* $\mathrm{a} \vdash\!\dashv \mathrm{b}$ *tale che il determinante:*

$$\begin{vmatrix} Dfx & Dgx & Dhx \\ fa & ga & ha \\ fb & gb & hb \end{vmatrix} \quad \textit{si annulla.}$$

Il corrispondente del calcolo delle differenze sarà:

Dati due numeri a, b *con* $\mathrm{a} < \mathrm{b}$, *se* f g h *sono 3 funzioni definite da* a *a* b *si ha che* 0 *è un valor medio tra quelli assunti dal determinante*

$$(\alpha) \quad \begin{vmatrix} \Delta fx & \Delta gx & \Delta hx \\ fa & ga & ha \\ fb & gb & hb \end{vmatrix} \quad \textit{ove varia } \mathrm{x} \textit{ da } \mathrm{a} \textit{ a } (\mathrm{b} - 1).$$

Dimostrazione. — Considero la funzione determinante

$$Kx = \begin{vmatrix} fx & gx & hx \\ fa & ga & ha \\ fb & gb & hb \end{vmatrix}.$$

Essa si annulla per i valori estremi $x = a$ e $x = b$. Applicando ad essa il teorema IV per il caso che siano nulli gli

estremi della successione avremo che la successione delle differenze di Kx avrà una variazione — perciò 0 sarà un valore medio tra quelli assunti dalle differenze da a a $b - 1$. Ma la differenza di Kx è il determinante che da esso si ottiene ponendo nella 1ª orizzontale le differenze di fx, gx, hx, onde è vero il teorema.

Il teorema si estende al caso che il determinante contenga le differenze di ordine n, essendo le ipotesi opportunamente modificate.

Posto $n = 2$ si ha a dimostrare che 0 è un valore medio tra quelli assunti dal determinante

$$(\beta) \qquad \begin{vmatrix} \Delta^2 fx & \Delta^2 gx & \Delta^2 hx & \Delta^2 kx \\ fa & ga & ha & ka \\ fb & gb & hb & kb \\ fc & gc & hc & kc \end{vmatrix}$$

ove vari x da a a $(c - 2)$, essendo la funzione definita da a a c.

Infatti la successione dei valori assunti dalla funzione

$$Rx = \begin{vmatrix} fx & gx & hx & kx \\ fa & ga & ha & ka \\ fb & gb & hb & kb \\ fc & gc & hc & kc \end{vmatrix}$$

definita da a a c, ha nulli i termini Ra, Rb, Rc, perciò avrà una variazione tra a e $(c - 2)$ la successione delle differenze seconde della funzione Rx (teor. V) ossia il determinante in questione. Per n qualunque si arriva alla stessa conclusione dopo aver applicato il teorema generale V per il caso che la successione dei valori della funzione abbia nullo un numero finito di termini.

VII.

Enunciamo il teorema del valor medio del calcolo differenziale:

Se a *e* b *sono quantità differenti tra loro e la funzione reale* f *ha derivate in tutto l'intervallo da* a *a* b, *allora il rapporto dell'incremento della funzione all'incremento della variabile è uno dei valori della derivata nell'interno dell'intervallo.*

Esteso al calcolo delle differenze diventa:

Considerata una successione f *definita da* a *a* b *ove* a$<$b, *si ha che il rapporto* $\frac{\mathrm{fb}-\mathrm{fa}}{\mathrm{b}-\mathrm{a}}$ *è un valor medio tra quelli assunti dalle differenze di* f *per i valori interi da* a *a* (b — 1). — *Sarà il medio aritmetico.*

1° Si può dimostrare ricorrendo al teor. VI. — Nel determinante (α) pongasi $hx = 1$ e $gx = x$. Allora si ha:

$$0 \,\epsilon\, \mathrm{Med} \begin{vmatrix} \Delta fx & 1 & 0 \\ fa & a & 1 \\ fb & b & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ove varia } x \text{ da } a \text{ a } (b-1)$$

ossia, svolgendo il determinante:

$$(a - b) \times \mathrm{Med}\, \Delta fx \,|\, x,\, a \cdots (b - 1) = fa - fb$$

ossia

$$\mathrm{Med}\, \Delta fx \,|\, x,\, a \cdots (b - 1) = \frac{fb - fa}{b - a}$$

che è quanto si voleva dimostrare.

2° Si può tenere un procedimento simile a quello del calcolo per il teor. del valore medio:

Considero la funzione $hx = fa + (x - a)\, D\,(f, a, b)$ la quale è tale che $ha = fa$, $hb = fb$. Allora se formiamo la successione dei valori assunti dalla funzione $gx = fx - hx$ ove varia x nell'intervallo dato, in essa si annullano i due termini estremi. Il teorema IV parallelo al teorema di Rolle applicato in questo caso ci dice che la successione delle differenze Δga, $\Delta g\,(a + 1)$ ..., $\Delta g\,(b - 1)$ avrà una variazione tra a e $(b - 1)$, ossia 0 è un valor medio tra quelli assunti dalle differenze della funzione gx in quell'intervallo.

Formiamo la differenza di g: sarà $\Delta gx = \Delta fx - \frac{fb - fa}{b - a}$. Dunque 0 è un valor medio tra quelli assunti dall'espressione $\Delta fx - \frac{fb - fa}{b - a}$ ossia $\frac{fb - fa}{b - a}$ è un valor medio tra quelli assunti dalla differenza Δfx nell'intervallo da a a $(b - 1)$ come si voleva dimostrare.

VIII.

Il 2° teorema del valore medio che dice: *Considerata una nuova funzione* g *definita nell'intervallo* $a^{-}b$ *la quale abbia derivata finita e non nulla in quell'intervallo, allora il rapporto degli incrementi delle due funzioni è uno dei valori assunti dal rapporto delle derivate nello stesso intervallo.*

Si estende così il calcolo delle differenze:

Se si considera una nuova funzione g *la cui differenza sia sempre positiva, il rapporto* $\frac{\mathrm{fb}-\mathrm{fa}}{\mathrm{gb}-\mathrm{ga}}$ *sarà un valor medio tra quelli assunti dalla funzione* $\frac{\Delta fx}{\Delta gx}$ *ove varia se da* a *a* (b — 1).

Infatti posto $hx = fx - fa - (gx - ga)\frac{fb - fa}{gb - ga}$ tale funzione si annulla per i valori estremi a e b, onde applicando il teorema di Rolle alla successione dei valori assunti dalla funzione h nell'intervallo $a \cdots b$ si deduce il teorema.

IX.

Mediante il teorema V si può estendere alle differenze il teorema dell'interpolazione. In calcolo differenziale:

Se a *e* b *sono quantità differenti tra loro ed* f *una funzione definita nell'intervallo da* a *a* b *continuo, allora la funzione* $\mathrm{fa} + (\mathrm{x} - \mathrm{a})\frac{\mathrm{fb}-\mathrm{fa}}{\mathrm{b}-\mathrm{a}}$ *coincide con* fx *per* x = a *ed* x = b. Il valore di questa funzione è considerato come un valore approssimato di fx. L'errore che si commette in questa approssimazione è espresso da $\frac{(x-a)(x-b)D^2f'a^{-}b}{2}$.

Per estenderlo al calcolo delle differenze diremo:

Data la successione f *definita nell'intervallo* a ⋯ b, *la funzione di 1° grado che coincide con* fx *per* x = a *e per* x = b *è ancora*

$fa + (x - a)\dfrac{fb - fa}{b - a}$. *L'errore che si commette in questa approssimazione è della forma:* $\dfrac{(x-a)(x-b)}{2}$ *per un valor medio tra quelli assunti dalla differenza seconda della funzione* f *nell'intervallo da* a a $(b - 2)$:

$$x \epsilon a \cdots b . \supset . fx - fa - (x - a)\frac{fb - fa}{b - a} \;\epsilon\; \frac{(x-a)(x-b)}{2} \mathrm{Med}\,\Delta^2 f \text{‘} a \cdots (b - 2).$$

Si possono dare due dimostrazioni di questa proposizione:

1ª Considero il determinante (β) del teor. VI, ed in esso pongo:

$$gz = 1 \qquad hz = z - a \qquad kz = (z - a)(z - b),$$

allora si ha:

$$0 \,\epsilon\, \mathrm{Med} \begin{vmatrix} \Delta^2 fz & 0 & 0 & 2 \\ fa & 1 & 0 & 0 \\ fb & 1 & b - a & 0 \\ fx & 1 & x - a & (x - a)(x - b) \end{vmatrix} \quad \text{ove vari } z \text{ da } a \text{ a } b - 2.$$

Divido per 2 la 1ª orizzontale. Dalla 3ª e 4ª sottraggo la 2:

$$0 \,\epsilon\, \mathrm{Med} \begin{vmatrix} \dfrac{\Delta^2 fz}{2} & 0 & 0 & 1 \\ fa & 1 & 0 & 0 \\ fb - fa & 0 & b - a & 0 \\ fx - fa & 0 & x - a & (x - a)(x - b) \end{vmatrix}$$

ossia:

$$0 \,\epsilon\, \mathrm{Med} \begin{vmatrix} \dfrac{\Delta^2 fz}{2} & 0 & 0 \\ fb - fa & b - a & 0 \\ fx - fa & x - a & (x - a)(x - b) \end{vmatrix}.$$

Dalla 3ª orizzontale sottraggo la 2ª moltiplicata per $(x-a)$ e divisa per $(b-a)$:

$$0 \in \mathrm{Med} \begin{vmatrix} \frac{\Delta^2 fz}{2} & 0 & 1 \\ fb-fa & b-a & 0 \\ fx-fa-(x-a)\frac{fb-fa}{b-a} & 0 & (x-a)(x-b) \end{vmatrix}$$

ossia

$$0 \in \mathrm{Med} \begin{vmatrix} \frac{\Delta^2 fz}{2} & 1 \\ fx-fa-(x-a)\frac{fb-fa}{b-a} & (x-a)(x-b) \end{vmatrix}$$

ove z vari da a a $b-2$, e di qui segue la formola di interpolazione di 1° grado.

2ª Considero la funzione di z:

$$(\gamma) \qquad hz = fz - fa - (z-a)\frac{fb-fa}{b-a} - (z-a)(z-b)k$$

la quale si annulla per $z=a$ e per $z=b$ e determino k in guisa che h si annulli pure per $z=x$. Dall'equazione

$$fx - fa - (x-a)\frac{fb-fa}{b-a} - (x-a)(x-b)k = 0$$

si ha

$$k = \left[fx - fa - (x-a)\frac{fb-fa}{b-a}\right] / (x-a)(x-b).$$

Sostituendo questo valore in (γ) e considerando la successione dei valori assunti da hz nell'intervallo $a \cdots b$, risultano in essa nulli i termini ha, hx, hb. Applicando a questa successione il teorema V, deduciamo che la successione

$$\Delta^2 ha \quad \Delta^2 h(a+1) \quad \ldots \quad \Delta^2 h(b-1)$$

avrà una variazione tra a e $(b-2)$ ossia 0 è un valor medio tra quelli assunti dalla differenza seconda da a a $(b-2)$. Tale differenza si ha dalla (γ): ed è data da $\Delta^2 fz - 2k$ onde

$$0 \in \mathrm{Med}' \left\{ \Delta^2 fz - 2\left[fx - fa - (x-a)\frac{fb-fa}{b-a}\right] / (x-a)(x-b) \right\}$$

ossia

$$fx - fa - (x-a)\frac{fb-fa}{b-a} \in \mathrm{Med} \left\} \Delta^2 fz \,|\, z,\ a \cdots b-2 \right\{ \times \frac{(x-a)(x-b)}{2}.$$

X.

Come analoga della formola di quadratura a pag. 367 P·6 del Formulario citato, la quale esprime la differenza tra il valore esatto dell'integrale di una funzione f definita nell'intervallo $a^{-}b$ e il valore approssimato dato dalla formula dei trapezi, sotto forma di integrale, abbiamo una proposizione sulle differenze, pag. 131, P4·4. Essa dà la differenza tra la somma dei valori assunti dalla funzione f definita nell'intervallo $a \cdots b$ in questo intervallo e il valore approssimato dato dalla formola $(b-a+1)\dfrac{fa+fb}{2}$ analoga a quella dei trapezi, mediante una somma di $b-a+1$ termini.

Seguendo le notazioni del Formulario, la proposizione si enuncia:

$$a, b \varepsilon \mathrm{n} \,.\, a > b+1 \,.\, f \varepsilon \mathrm{qF} a \cdots b \,.\, \supset .\, \Sigma(f, a \cdots b) =$$

$$=(b-a+1)\frac{fa+fb}{2} - \Sigma\left[(x-a)(b-x)\frac{\Delta^2 f(x-1)}{2}\Big| x,(a+1)\cdots(b-1)\right].$$

Dimostrazione. — Considero la funzione $gx=(x-a)(x-b)$. Calcolo la differenza:

$$\Delta(fx\Delta gx - gx\Delta fx)$$

ove varia x. Si ha:

$$(\alpha) \qquad \Delta(fx\Delta gx - gx\Delta fx) = f(x+1)\Delta^2 gx - g(x+1)\Delta^2 fx.$$

Opero per Σ, $a \cdots (b-1)$ sopra ambo i membri della (α), osservando che

$$\Sigma[\Delta h, a \cdots (b-1)] = hb - ha$$

per la prop. 3·1 pag. 131 del Formulario

$$fb\Delta gb - gb\Delta fb - fa\Delta ga + ga\Delta fa = \Sigma[f(x+1)\Delta^2 gx \,|\, x, a\cdots(b-1)] -$$
$$- \Sigma[g(x+1)\Delta^2 fx \,|\, x, a\cdots(b-1)]$$

e tenendo conto che

$$gx=(x-a)(x-b)\,;\ \Delta gx = 2x+1-a-b,\ \Delta^2 gx = 2,\ ga=gb=0,$$

sostituendo:

$$fb(b-a+1)+fa(b-a-1)=2\Sigma[f(x+1)|x,\ a\cdots(b-1)]-$$
$$-\Sigma[g(x+1)\Delta^2fx|x,\ a\cdots(b-1)]=2\Sigma[fx|x,\ (a+1)\cdots b]-$$
$$-\Sigma[g(x+1)\Delta^2fx|x,\ a\cdots(b-1)]$$

Aggiungo ai 2 membri la quantità $2fa$:

$$fb(b-a+1)+fa(b-a+1)=2\Sigma(f,\ a\cdots b)-$$
$$-\Sigma[(x+1-a)(x+1-b)\Delta^2fx|x,\ a\cdots(b-1)].$$

Da questa relazione si ricava:

$$\Sigma(f,\ a\cdots b)=(b-a+1)\frac{fa+fb}{2}-$$
$$-\frac{1}{2}\Sigma[(x+1-a)(b-x-1)\Delta^2fx|x,\ a\cdots(b-2)]$$

e ponendo $x+1=x'$:

$$\Sigma(f,\ a\cdots b)=(b-a+1)\frac{fa+fb}{2}-$$
$$(\beta)\qquad -\frac{1}{2}\Sigma(x'-a)(b-x')\Delta^2f(x'-1)|x',\ (a+1)\cdots(b-1)].$$

XI.

Ci potremmo servire di questo procedimento per dimostrare a formola seguente (Cfr. Form. pag. 134, P 3·5 ove trovasi enunciata):

$$(1)\qquad \Sigma(f,a\cdots b)-(b-a+1)\frac{fa+fb}{2}\,\epsilon-\mathrm{C}(b-a+1,3)\frac{\mathrm{Med}\Delta^2f`a\cdots(b-2)}{2}.$$

Essa è l'analoga pel calcolo delle differenze della formola di quadratura che trovasi nel Formul. pag. 366, P44·2:

Se nell'intervallo da a *a* b *la funzione* f *ha la derivata seconda, allora la differenza tra l'integrale di* f *esteso tra i limiti* a *e* b *e l'area del trapezio costruito sulle ordinate* fa *e* fb, *ovvero l'errore che risulta se all'integrale noi sostituiamo il trapezio è espressa dalla formola* $-(\mathrm{b}-\mathrm{a})^3\,\frac{\mathrm{D^2f`a{-}b}}{12}$

$$a,\ b\epsilon\mathrm{q}\ .\ a<b.\ f,\mathrm{D}^2f\epsilon\mathrm{qF}a\vdash\!\dashv b.\supset.\mathrm{S}(f,\ a\vdash\!\dashv b)-(b-a)\frac{fa+fb}{2}\ \epsilon$$
$$(b-a)^3(\mathrm{D}^2f`a\vdash\!\dashv b)/12.$$

Per dimostrare la formola (1) procediamo analogamente a quanto si è fatto per questa.

Pongasi $gx = fa + (x - a) \frac{fb - fa}{b - a}$. La formola simile alla formola di interpolazione di 1° grado ci dà:

$$fx - gx \,\epsilon - (x - a)(b - x) \frac{\mathrm{Med}\Delta^2 f' a \cdots (b-2)}{2}.$$

Operando per $(\Sigma, a \cdots b)$ si ottiene:

$$\Sigma(f, a \cdots b) - \Sigma(g, a \cdots b) \,\epsilon - \Sigma(x - a)(b - x) \frac{\mathrm{Med}\Delta^2 f' a \cdots (b-2)}{2}.$$

La $\Sigma(g, a \cdots b)$ ci è data da una formula dei trapezi. Ma calcoliamola direttamente:

$$\Sigma(f, a \cdots b) - (b - a + 1) fa + \frac{fb - fa}{b - a} \Sigma\{(x - a) | x, a \cdots b\} \,\epsilon$$

$$- \Sigma\{(x - a)(b - x)\ x, a \cdots b\} \times \frac{\mathrm{Med}\Delta^2 f' a \cdots b - 2}{2}$$

$$\Sigma(f, a \cdots b) - (b - a + 1) \frac{fa + fb}{2} -$$

$$- \Sigma\{(x - a)(b - x) | x, a \cdots b\} \times \frac{\mathrm{Med}\Delta^2 f' a \cdots (b-2)}{2}.$$

Per eseguire la $\Sigma\{(x-a)(b-x) | x, a \cdots b\}$ pongo: $x = a + y$; $b = a + n$. Essa si trasforma nell'altra:

$$(2) \quad \Sigma[y(n - y) | y, 0 \cdots n] = n\Sigma(y | y, 0 \cdots n) - \Sigma(y^2 | y, 0 \cdots n).$$

La 1ª somma del 2° membro è la somma dei termini di una progressione aritmetica; per la 2ª applichiamo la formula che dà la somma dei quadrati dei numeri naturali da 0 ad n (Form. pag. 122, P5 · 3). Avremo:

$$\Sigma[y(n - y) | y, 0 \cdots n] = \frac{n(n+1)n}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}.$$

In ultima analisi, sostituendo ad n il valore $(b - a)$

$$\Sigma(fx \mid x,\ a \cdots b) - (b - a + 1)\,\frac{fa + fb}{2}\ \epsilon\ -$$

$$-\ \frac{(b - a + 1)(b - a)(b - a - 1)}{6} \times \frac{\mathrm{Med}\Delta^2 f\text{‘}\ a \cdots (b - 1)}{2}$$

che equivale alla formula (1).

Lo stesso risultato si sarebbe ottenuto partendo dalla formula (β) del teorema precedente e trasformando la somma

$$\Sigma(x' - a)(b - x')\,\Delta^2 f(x' - 1) \mid x,\ a \cdots (b - 2).$$

Poichè i termini come $(x - a)(b - x)$ sono tutti positivi, quella somma sarà:

$$\Sigma[(x' - a)(b - x') \mid x',\ (a + 1) \cdots (b - 1) \times \mathrm{Med}\Delta^2 f\text{‘}\ (a + 1) \cdots (b - 1).$$

XII.

Applicazioni. — Facciamo un'applicazione della formula XI.

Vogliamo calcolare la somma dei reciproci dei numeri da 10 a 20, cioè:

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{20}.$$

Si avrà:

$$\Sigma(/,\ 10 \cdots 20) = \frac{11}{2}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20}\right) - \frac{11\,.\,10\,.\,9}{6}\,.\,\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$$

ove x è compreso tra 10 e 18. Il valore approssimato, cioè il 1° termine, sarà:

$$\frac{11}{2}\,.\,\frac{3}{20} = 0 \cdot 825.$$

L'errore, cioè il 2° termine, è negativo e siccome $11\,.\,10\,.\,9 = 10 \times (10^2 - 1) < 10^3$ e $x(x + 1)(x + 2) > 10^3$, sarà

$$\frac{11\,.\,10\,.\,9}{x(x+1)(x+2)} < 1$$

dunque l'errore sarà minore di $\frac{1}{6} = 0 \cdot 166$, onde:

$$0 \cdot 825 > \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{20} > 0 \cdot 659.$$

Calcolando direttamente questa somma, si ha per essa il valore:

$$\begin{aligned}
1/10 &= 0 \cdot 100000000 \\
1/11 &= 0 \cdot 090909090 \\
1/12 &= 0 \cdot 083333333 \\
1/13 &= 0 \cdot 076923076 \\
1/14 &= 0 \cdot 071428571 \\
1/15 &= 0 \cdot 066666666 \\
1/16 &= 0 \cdot 062500000 \\
1/17 &= 0 \cdot 058823529 \\
1/18 &= 0 \cdot 055555555 \\
1/19 &= 0 \cdot 052631578 \\
1/20 &= 0 \cdot 050000000 \\
\hline
& 0 \cdot 768771398
\end{aligned}$$

che è compreso fra i limiti indicati.

Come seconda applicazione della formola XI calcoliamo la somma dei reciproci dei numeri interi da 100 a 200.

Si ha:

$$\Sigma\,(/,\,100 \cdots 200) = \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \dots + \frac{1}{200} =$$

$$= 101\,\frac{\frac{1}{100} + \frac{1}{200}}{2} - \frac{101 \,.\, 100 \,.\, 99}{2}\;\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$$

ove x è compreso tra 100 e 198.

La somma cercata sarà espressa dunque da

$$\frac{101}{2}\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{200}\right) - \frac{\theta}{6}\;\frac{101 \,.\, 100 \,.\, 99}{100^3} \quad \text{ove } 0 < \theta < 1.$$

Il valore approssimato di essa è $\frac{101}{2}\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{200}\right)=0\cdot7575$ e l'errore è minore di $\frac{1}{6}=0\cdot1666$. Dunque:

$$0\cdot7575 > \Sigma(/,\ 100\cdots200) > 0\cdot59.$$

Siccome l'approssimazione è troppo grossolana, possiamo applicare lo stesso procedimento usato nell'applicazione precedente. Divideremo la $\Sigma(/,\ 100\cdots200)$ in 10 somme parziali ed applicheremo a ciascuna di esse la formula solita.

Avremo:

$$\Sigma(/,100\cdots200)=\Sigma(/,\ 100\cdots110)+\Sigma(/,110\cdots120)+\ldots+\Sigma(/,190\cdots200) - \left(\frac{1}{110}+\frac{1}{120}+\ldots+\frac{1}{190}\right).$$

Calcolo per approssimazione, colla formola dei trapezi ognuna di quelle somme parziali, e la somma cercata sarà $=$ per approssimazione

$$\frac{11}{2}\left(\frac{1}{100}+\frac{2}{110}+\frac{2}{120}+\ldots+\frac{2}{190}+\frac{1}{200}\right)-\left(\frac{1}{110}+\frac{1}{120}+\ldots+\frac{1}{190}\right)$$

cioè:

$$=10\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{110}+\ldots+\frac{1}{190}+\frac{1}{200}\right)-\frac{9}{2}\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{200}\right)$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{20}-\frac{9}{2}\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{200}\right).$$

Servendoci del risultato dell'esercizio precedente:

$$=0\cdot7687-0\cdot0675=0\cdot7012.$$

L'errore commesso in questa approssimazione sarà la somma degli errori commessi in ciascun intervallo, ossia sarà minore di

$$10\,\frac{11\,.\,10\,.\,9}{6\times x(x+1)(x+2)}<\frac{1}{600}=0\cdot00166,\text{ ove } x>100.$$

Dunque

$$0\cdot7012 > \Sigma(/,\ 100\cdots200) > 0\cdot6996.$$

XIII.

La formula XI applicata alle funzioni di 1° grado ne dà la somma in un intervallo mediante l'area del trapezio costruito sulle ordinate estreme e che ha per altezza l'ampiezza dell'intervallo. Ma consideriamo invece l'ordinata media (perchè esista si deve supporre che il numero dei termini della somma sia dispari). Allora la somma è data da quell'ordinata moltiplicata per il numero dei termini. Ne segue che se la funzione f è di 1° grado si ha:

$$\Sigma(f, a - r \cdots a + r) = (2r + 1) fa.$$

Se la funzione è di grado superiore al 1°, o non ha grado, quel 2° membro ci dà il valore approssimato di $\Sigma(f, a - r \cdots a + r)$ a meno di un errore della forma $\frac{r(r+1)(2r+1)}{6} \times$ valore medio di $\Delta^2 f$, notevole risultato che io credo nuovo

$$a \epsilon \mathrm{n} \,.\, r \epsilon N_1 \,.\, \supset .\, \Sigma(f, a - r \cdots a + r) - (2r + 1) fa$$

$$\epsilon \frac{r(r+1)(2r+1)}{6} \mathrm{Med} \Delta^2 f \text{ ‘ } (a - r) \cdots (a + r - 2).$$

Dimostrazione. — Sia g una funzione di 1° grado la quale coincida coi valori della funzione per i valori 0 e 1 della variabile: $f0 = g0 \,.\, f1 = g1$. (Suppongo per maggiore semplicità $a = 0$). Allora per la formula analoga ad una del calcolo differenziale (Cfr. Form. p. 297 P 31)

$$fx = gx + x(x - 1) \frac{\Delta^2 fy}{2}$$

ove $\Delta^2 fy$ è un valore medio fra quelli assunti da $\Delta^2 f$ nel campo considerato.

Opero per $(\Sigma, - r \cdots r)$ sui due membri della precedente eguaglianza; cioè faccio la somma, variando x, da $-r$ a $+r$:

$$\Sigma(f, -r \cdots r) = \Sigma(g, -r \cdots r) + \frac{\mathrm{Med} \Delta^2 f - r \cdots r}{2} \times \Sigma [x(x-1) \,|\, x, -r \cdots r].$$

Per la formula XI precedente applicata alla funzione g di 1° grado

$$\Sigma(g, \; -r \cdots r) = (2r+1) f0.$$

D'altra parte

$$\Sigma[x(x-1) \,|\, x, \; -r \cdots r] = \Sigma(x^2 \,|\, x, \; -r \cdots r) - \Sigma(x, \; -r \cdots r) =$$
$$= 2\Sigma(x^2 \,|\, x, \; 0 \cdots r) = r(r+1)(2r+1)/3$$

e quindi la formula a dimostrarsi.

XIV.

Se applichiamo questa formula al calcolo di $\Sigma(/, \; 10 \cdots 20)$, trovo:

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{20} = 11 \,.\, \frac{1}{15} + \frac{5 \,.\, 6 \,.\, 11}{6} \operatorname{Med} \Delta^2 f.$$

Il valore approssimato di quella somma è dato da $\frac{11}{15} = 0{\cdot}733$. L'errore è positivo ed è espresso da $55 \frac{2}{x(x+1)(x+2)}$ ove x è un valore maggiore di 10.

Dunque l'errore è rappresentato da $2\theta \times 0 \cdot 055$; e si avrà:

$$0 \cdot 733 + 0 \cdot 110 = 0 \cdot 843,$$

onde

$$0 \cdot 733 < \Sigma(/, \; 10 \cdots 20) < 0 \cdot 843.$$

Si noti che il valore approssimato per difetto è più prossimo al valore esatto di $\Sigma(/, 10 \cdots 20)$ che quello trovato al n. XI.

XV.

Le due formule trovate

$$\Sigma(f, a-r \cdots a+r) = (2r+1) fa + \frac{r(r+1)(2r+1)}{6} \operatorname{Med} \Delta^2 f \text{ ‘ } a-r \cdots a+r$$

$$\Sigma(f, a-r \cdots a+r) = (2r+1) \frac{f(a-r) + f(a+r)}{2} -$$
$$- \frac{(2r+1) r (2r-1)}{6} \operatorname{Med} \Delta^2 f \text{ ‘ } a-r \cdots a+r$$

contengono entrambe al 2° membro un valor medio tra quelli assunti dalle differenze nell' intervallo considerato. Ma i due valori medî non sono necessariamente eguali tra loro.

Se prendiamo a considerare funzioni di grado non superiore al secondo, per le quali la differenza seconda è costante, quelle formule diventano:

$$\Sigma(f,\ a-r\cdots a+r)=(2r+1)fa+\frac{r(r+1)(2r+1)}{6}\Delta^2 f$$

$$\Sigma(f,\ a-r\cdots a+r)=(2r+1)\frac{f(a-r)+f(a+r)}{2}-\frac{(2r+1)r(2r-1)}{6}\Delta^2 f.$$

Possiamo eliminare la differenza seconda, riducendone eguali i coefficienti e sommando le due relazioni. Perciò moltiplico la 1ª per $2r-1$, la 2ª per $r+1$. Sommando, il coefficiente del 1° membro diventa $2r-1+r+1=3r$. Dividendo i due membri per esso si ha in ultima analisi:

$$\Sigma(f,\ a-r\cdots a+r)=(2r+1)\frac{(r+1)f(a-r)+(r+1)f(a+r)+2(2r-1)fa}{6r}$$

o anche:

$$\Sigma(f,\ a-r\cdots a+r)= \tag{1}$$

$$=(2r+1)\left[\frac{f(a-r)+f(a+r)+4fa}{6}+\frac{f(a-r)+f(a+r)-2fa}{6r}\right].$$

Limitandoci al 1° termine in parentesi si avrebbe la formula di Cavalieri-Simpson del calcolo integrale.

XVI.

La formula (1) vale anche per le funzioni di 3° grado. Infatti la più generale funzione di 3° grado si può sempre ridurre alla forma $f=a_0x^3+a_1x^2+a^2x+a_3$, e la $\Sigma(f,\ -r\cdots r)$ si ha sommando i singoli termini. Ma $\Sigma(x^3|x,\ -r\cdots r)=0$, e con ciò siamo ridotti ancora ad una funzione di 2° grado cui applicheremo le considerazioni precedenti.

XVII.

La (1) può servire a calcolare la somma dei quadrati e la somma dei cubi dei numeri naturali in un certo intervallo.

Si ha

$$\Sigma(1\cdots 2r)^2 = \Sigma(0\cdots 2r)^2 = (2r+1)\,\frac{0+(r+1)4r^2+2(2r-1)r^2}{6r} =$$

$$= \frac{2r(2r+1)(4r+1)}{6}$$

e questa formula coincide con quella data dal Formulario a pag. 122 P5·3 quando si ponga $2r = r'$.

Si potrebbe analogamente calcolare la somma dei cubi dei numeri interi in un certo intervallo. Tralasciamo questa applicazione che presenta nulla di notevole.

La formula (1), se in essa poniamo $a = 0$, caso a cui ci possiamo sempre ridurre, diventa:

$$\Sigma(f, -r\cdots r) = (2r+1)\left[\frac{f-r+fr+4f0}{6} + \frac{f-r+fr-2f0}{6r}\right] =$$

$$= (2r+1)\,\frac{(r+1)f-r+(r+1)fr+2(2r-1)f0}{6r}.$$

Casi particolari. — Per $r = 2$:

$$\Sigma(f, -2\cdots 2) = 5\,\frac{f(-2)+f2+2f0}{4}.$$

Per $r = 5$:

$$\Sigma(f, -5\cdots 5) = 11\,\frac{f-5+f5+3f0}{5}.$$

XVIII.

Se la funzione f è qualunque, vogliamo calcolare l'errore che si commette assumendo la formula precedente come approssimazione, cioè l'analogo del resto nella Formula di Simpson (Peano 1887, Markov 1889).

Chiamiamo gx la funzione intera di 3° grado la quale coincida coi valori della funzione f per $x=0$, $x=1$, $x=r$, $x=-r$:

$$g0 = f0,\quad g1 = f1,\quad gr = fr,\quad g-r = f-r.$$

Allora per un teorema di calcolo (Cfr. Form. p. 308 P39·2) sarà:

$$fx = gx + x(x-1)(x-r)(x+r)\,\frac{\Delta^4 fy}{4!}$$

ove $\Delta^4 fy$ è un valore medio fra quelli assunti dalla differenza quarta.

Operando per $(\Sigma, -r \cdots r)$:

$$(2) \quad \Sigma(f, -r \cdots r) = \Sigma(g, -r \cdots r) + \Sigma x(x-1)(x-r)(x+r)\frac{\Delta^4 fy}{4!}.$$

La 1ª somma (essendo g di 3° grado) ci dà il valore approssimato in questione.

Per la 2ª somma del 2° membro, osserviamo che il termine $x(x-1)(x-r)(x+r)$ si conserva sempre negativo o nullo.

Dunque:

$$\Sigma x(x-1)(x-r)(x+r)\frac{\Delta^4 fy}{4!} =$$
$$= \frac{\mathrm{Med}\,\Delta^4 fy}{4!}\Sigma\{x(x-1)(x-r)(x+r)\,|\,x, -r \cdots r\}.$$

Ora si ha:

$$\Sigma[x(x-1)(x-r)(x+r)\,|\,x, -r \cdots r] = \Sigma[x^2(x^2-r^2)\,|\,x, -r \cdots r]$$
$$= 2\Sigma(x^4\,|\,x, 0 \cdots r) - 2r^2\Sigma(x^2\,|\,x, 0 \cdots r)$$
$$= -2r^2\frac{r(r+1)(2r+1)}{6} + 2\frac{r(r+1)(2r+1)(3r+3r^2+2r-1)}{30}$$

(Cfr. Form. p. 122 P6·1)

$$= -\frac{1}{15}r(r+1)(2r+1)[2r^2-3r+1] = -\frac{1}{15}r(r^2-1)(4r^2-1)$$

onde il resto è della forma, semplice e nuova

$$-\theta\frac{4r^5}{15.4!}\mathrm{Med}\Delta^4 f.$$

La formula (2) diventa:

$$(3) \qquad a\epsilon n \,.\, r\epsilon N_1 \,.\, \supset .\, \Sigma(f, a-r \cdots a+r) =$$
$$= (2r+1)\frac{(r+1)f(a-r)+2(2r-1)fa+(r+1)f(a+r)}{6r} -$$
$$-\frac{r(r^2-1)(4r^2-1)\mathrm{Med}\Delta^4 f\text{‘}(a-r \cdots a+r-4)}{15 \times 4!}.$$

XIX.

Vogliamo calcolare la $\Sigma(/, 10 \cdots 20)$ con la formula trovata ora.

In valore approssimato sarà:

$$\Sigma(/, 10 \cdots 20) = 11\frac{\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{3}{15}}{5} = \frac{2}{5}\cdot\frac{11}{2}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{20}\right)+\frac{3}{5}\cdot\frac{11}{15}$$

cioè è la media dei valori approssimati dati dalle formule XII e XIV, coi pesi 2 e 3:

$$= \frac{2}{5} \times 0{\cdot}8250000 + \frac{3}{5} \times 0{\cdot}73333 = 0{\cdot}3300000 + 0{\cdot}4400000$$
$$= 0{\cdot}770000.$$

L'errore è, come abbiamo visto, della forma

$$-\frac{4\theta r^5}{15.4!}\Delta^4 f \quad \text{ma} \quad \Delta^4 f = \Delta / = \frac{4!}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

ove x è maggiore di 10. L'errore sarà:

$$-\frac{4\theta r^5}{15}\,\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}.$$

Calcoliamolo:

$$= -\frac{4\theta 10^5}{2^5.15}\cdot\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}.$$

La 2ª frazione è minore di $1/10^5$, dunque l'errore è della forma $-\frac{\theta}{120}$, ossia è minore di $\frac{1}{120} = 0{\cdot}00833$. Potremo scrivere:

$$0{\cdot}77 > \Sigma(/,\ 10 \cdots 20) > 0{\cdot}76.$$

Calcoliamo ancora la $\Sigma(/,\ 100 \cdots 200)$. Dividiamo la somma in 10 intervalli ed applichiamo a ciascuna la formula (3).

Il valore approssimato sarà dato da:

$$\Sigma(/,\ 100 \cdots 200) =$$
$$= \frac{11}{5}\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{110} + \frac{3}{105} + \frac{1}{110} + \frac{1}{120} + \frac{3}{115} + \frac{1}{120} + \frac{1}{130} + \frac{3}{125}\cdots\right) -$$
$$-\left(\frac{1}{110} + \frac{1}{120} + \ldots + \frac{1}{190}\right) = \frac{17}{5}\left(\frac{1}{110} + \frac{1}{120} + \ldots + \frac{1}{190}\right) +$$
$$+ \frac{11}{5}\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{200}\right) + \frac{33}{5}\left(\frac{1}{105} + \frac{1}{115} + \ldots + \frac{1}{195}\right).$$
$$= 0{\cdot}2103822753 + 0{\cdot}033 + 0{\cdot}4572713112 = 0.7006535865.$$

L'errore è la somma degli errori commessi in ogni intervallo, ossia:

$$-10\,\frac{r(r^2-1)(4r^2-1)}{15\,.\,4!}\,\Delta^4 f,$$

ossia:

$$-10\,\frac{4\theta r^5}{2^5 15}\cdot\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

ove x è maggiore di 100. Quindi l'errore è:

$$= -\theta \cdot \frac{10}{120} \cdot \frac{10^5}{100^5} = -\frac{\theta}{1200000}.$$

L'errore che si commette, essendo minore di $\frac{1}{1200000}$ sarà minore di una unità del 7° ordine decimale, e perciò

$$\Sigma(1,100 \cdots 200) = 0 \cdot 7006535.$$

Questo risultato numerico si può verificare prendendo la formula dei trapezi del calcolo integrale (Cfr. Form. p. 367 P·3) la quale ci dà:

$$\Sigma(/, 100 \cdots 200) = S(/, 100 \vdash\!\dashv 200) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{200}\right) + 100^3 \frac{1}{12 \,.\, x^3\, 100^3}$$

ove x è maggiore di 100.

Ora:

$$S(/,\ 100 \vdash\!\dashv 200) = \log\frac{200}{100} = \log 2 = 0 \cdot 69314718.$$

Inoltre:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{200}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{200} = 0 \cdot 0075.$$

L'errore, calcolato, dà

$$\frac{\theta\, 100^3}{12 \,.\, 100^3 \,.\, 100^2} = \frac{\theta}{120000},$$

dunque è minore di una unità del 5° ordine.

Sarà $\Sigma(/, 100 \cdots 200) = 0 \cdot 693147 + 0 \cdot 0075 = 0 \cdot 70064$.

Si può verificare ancora l'esattezza del risultato ottenuto mediante la formula dovuta ad Eulero (Cfr. Formul., p. 408, P·8):

$$a \epsilon N_1 \,.\, n \epsilon N_1 + 1 \,.\, \supset .\, \Sigma(/, 1 \cdots a) \epsilon \log a + \gamma + /2a +$$

$$+ \Sigma[(-1)^r B_r/(2ra^{2r}) \mid r,\ 1 \cdots (n-1)] + \theta(-1)^n B_n/(2na^{2n})$$

ossia:

$$\Sigma(/,\ 1 \cdots a) = \log a + \gamma + \frac{1}{2a} - \frac{1}{12 \,.\, a^2} + \frac{1}{120 \,.\, a^4} - \frac{1}{252 \,.\, a^6} + \cdots$$

La formula scritta dà il valore della somma cercata mediante una serie semi-convergente. L'errore commesso fermandoci ad un certo termine è minore del 1° termine che si trascura.

Applicata al caso nostro la formula di Eulero ci dà:

$$\Sigma(/, 100 \cdots 200) = \Sigma(/, 1 \cdots 200) - \Sigma(/, 1 \cdots 100) + \frac{1}{100}$$

$$= \log 200 + \gamma + \frac{1}{400} - \frac{1}{12.(200)^2} + \frac{1}{120.(200)^4} - \frac{1}{252.(200)^6} + \cdots$$

$$- \log 100 - \gamma - \frac{1}{200} + \frac{1}{12.(100)^2} - \frac{1}{120.(100)^4} + \frac{1}{252.(100)^6} - \cdots$$

$$+ \frac{1}{100} = \log 2 + \left(\frac{1}{400} - \frac{1}{200}\right) - \left(\frac{1}{12.(200)^2} - \frac{1}{12.(100)^2}\right) + \cdots + \frac{1}{100}.$$

Presi i due primi termini della serie si commette un errore che è minore del 1° termine che si trascura, ossia di

$$\frac{1}{120.(100)^4} = \frac{1}{12000000000}.$$

Ora si ha:

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0 \cdot 6931471805 \\ 1/400 &= 0 \cdot 0025 \\ 1/120000 &= 0 \cdot 0000083333 \\ 1/100 &= 0 \cdot 01 \\ -1/200 &= -0 \cdot 005 \\ -1/12 \times (200)^2 &= -0 \cdot 0000020833 \\ \hline & \quad 0 \cdot 7006534305 \end{aligned}$$

valore esatto con 9 cifre decimali.

Sull'inscrivibilità circolare dei poligoni articolati.

Nota di FRANCESCO GIUDICE.

Un recente articolo del Prof. Padoa [1] mi ha suggerito alcune considerazioni, che possono interessare e per ciò riferisco insieme con la soluzione completa, semplice ed affatto elementare, della questione d'esistenza di poligono, che abbia lati dati e sia inscritto in circonferenza.

Pervengo a tale soluzione attenendomi appunto alla via indicata dallo Steiner [2] ed accennata dal Prof. Padoa nel suo articolo.

1. — Se si può inscrivere in un circolo un poligono a lati rispettivamente uguali a dati segmenti, l'inscrizione è possibile con qualsiasi ordine dei lati ed i poligoni inscritti nel medesimo circolo con gli stessi lati diversamente ordinati son tutti equivalenti fra loro perchè due corde uguali della medesima circonferenza ne sottendono uguali archi e dividono il cerchio in uguali segmenti.

L'equivalenza dei poligoni ad uguali lati in ordine differente, che siano inscritti nello stesso circolo, si può riconoscere anche con la seguente osservazione, che insegna ad ordinare arbitrariamente i lati d'un poligono qualsiasi senza alterarne l'area: *si può cambiare l'ordine di due lati consecutivi d'un poligono senza alterare il loro angolo e con ciò non s'altera neppure l'area del poligono*, perchè sono uguali due triangoli aventi un angolo uguale tra due lati uguali.

2. — Se sono uguali le corde di due archi circolari diversi e nessuno dei due archi supera mezza circonferenza, l'arco di

[1] V. A. Padoa, *Inscriptibilité des polygones articulés dans une circonférence*, " L'Enseignement Mathématique „; 15 mars 1909, p. 105-109.

[2] V. Steiner, *Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général*, " Journal de Crelle „, Berlin, 1842; pag. 93-152, 189-250, e particolarmente pag. 108.

maggior raggio ha minore ampiezza circolare, ossia è opposto a minor angolo al centro. Ne segue immediatamente che: se due spezzate d'uguali lati sono inscritte in archi circolari diversi e l'arco di maggior raggio non è minore di mezza circonferenza, l'altro arco è più di mezza circonferenza e, se questo è meno d'una circonferenza, dei due archi circolari che completano le circonferenze, ha maggiore ampiezza circolare quello di maggior raggio per cui esso ha certamente corda maggiore.

Supponiamo ora che due spezzate d'uguali lati siano inscritte in archi circolari diversi e che l'arco di maggior raggio non superi mezza circonferenza: siano $ABCDE \ldots M$ la spezzata inscritta in quest'arco ed $A'B'C'D'E' \ldots M'$ quella inscritta nell'altro: $AC > A'C'$ perchè $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ e l'angolo $ABC > A'B'C'$. Similmente quella parte dell'arco di maggior raggio, che è somma dell'arco sotteso da CD con arco sotteso da corda uguale ad $A'C'$, sottende corda maggiore di $A'D'$; con più ragione quindi, per le proprietà relative agli archi d'uno stesso circolo ed alle loro corde,

$$AD > A'D'.$$

Si prova similmente che

$$AE > A'E'$$

e, continuando, si riconosce che

$$AM > A'M'.$$

Adunque: *Se due spezzate di lati rispettivamente uguali sono inscritte in due archi circolari diversi, minori di circonferenze, l'arco di maggior raggio ha maggior corda*, ossia l'intervallo degli estremi della spezzata inscritta in quest'arco è maggiore dell'intervallo degli estremi dell'altra spezzata.

Ne segue immediatamente l'impossibilità che i lati d'un poligono inscritto in un circolo sian tutti rispettivamente uguali a quelli di poligono inscritto in un secondo circolo, che non sia uguale al primo.

Resta così stabilito con ragionamenti elementari semplicis-

simi [1] che: Se si può inscrivere in un circolo un poligono di lati dati, e qui intendiamo parlare di poligoni a perimetro non intrecciato, *l'inscrizione è possibile in unico circolo.* Vedremo ora ch'essa è sempre possibile.

3. — Un poligono non può essere inscritto in un circolo, che abbia diametro minore di qualche suo lato. Sia l un lato del poligono, che non sia minore di nessuno degli altri lati. Nel circolo di diametro uguale al lato l si inscriva la spezzata di lati rispettivamente uguali agli altri lati $a_1, a_2, \ldots, a_n$ del poligono: essa potrà anche riuscire inscritta in arco circolare superante la circonferenza. Distingueremo tre casi:

1° Caso: La spezzata risulta inscritta in mezza circonferenza.

2° Caso: Risulta inscritta in un arco minore di mezza circonferenza.

3° Caso: Risulta inscritta in un arco maggiore di mezza circonferenza.

Nel 1° caso il poligono è inscrivibile in un circolo di diametro l e, precisamente, vi risulta inscritto in mezza circonferenza.

Passiamo al 2° caso: l'intervallo degli estremi della spezzata di lati $a_1, a_2, \ldots, a_n$, che è minore di l quando la spezzata è inscritta in circolo di diametro l, è manifestamente maggiore di l quando la spezzata è inscritta in circolo di raggio uguale al rimanente cateto del triangolo rettangolo, che ha un cateto uguale ad $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ ed ha uguale ad $\frac{l}{2}$ l'altezza corrispondente all'ipotenusa. Per ciò e per quanto fu detto al n° 2 vi è un circolo ed uno solo tale che risulta uguale ad l l'intervallo degli estremi della spezzata inscritta di lati a_1, $a_2, \ldots, a_n$, tale cioè che vi sia inscrivibile un poligono di lati $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ed l; il centro del circolo è necessariamente esterno a questo poligono inscritto.

Passiamo al 3° caso: la somma delle ampiezze circolari degli archi non maggiori di mezza circonferenza sottesi dalle

[1] V. H. Weber und J. Wellstein, *Encyklopädie der Elementar Mathematik*, Leipzig, 1907, p. 331-32 in nota.

corde $a_1, a_2, ..., a_n$ ed l è maggiore di 2π nel circolo di diametro l ed è manifestamente minore di 2π nel circolo di diametro uguale ad $a_1 + a_2 + ... + a_n + l$; per ciò e per quanto fu detto al n° 2 vi è un circolo, ed uno solo, tale che in esso è 2π la somma di quelle ampiezze circolari, ossia tale che in esso sia inscrivibile un poligono di lati $a_1, a_2, ..., a_n$ ed l: il centro del circolo è necessariamente interno a questo poligono inscritto.

4. — Nel terzo caso la somma delle ampiezze circolari degli archi non maggiori di mezza circonferenza e sottendenti le corde $a_1, a_2, ..., a_n$ ed l sia s quando il diametro del circolo è l; questa somma d'ampiezze circolari decresce con continuità ed indefinitamente mentre il diametro del circolo cresce con continuità ed indefinitamente; per cui, se il massimo intero contenuto in $\frac{s}{2\pi}$

$$E\left(\frac{s}{2\pi}\right) = n,$$

essa somma prenderà una volta ciascuno dei valori

$$n2\pi,\ (n\text{-}1)2\pi,\ ...,\ 2\pi$$

cosicchè, se s'ammettessero anche perimetri intrecciati, sarebbero n differenti i circoli nei quali sono inscrivibili poligoni di lati uguali a quelli dati e perimetri giranti sempre in un verso intorno al centro: soltanto il poligono inscritto nel circolo di raggio maggiore non avrà perimetro intrecciato; i perimetri dei poligoni inscritti negli altri circoli faranno rispettivamente 2, 3, ..., n giri intorno ai centri.

Nel 3° caso dunque, oltre ad uno ed unico circolo nel quale si può inscrivere un poligono ordinario coi lati dati, ve ne sono altri

$$E\left(\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{a_1}{l} + \operatorname{arc\,sen}\frac{a_2}{l} + ... + \operatorname{arc\,sen}\frac{a_n}{l}\right) - \frac{1}{2}\right)$$

in ognuno dei quali è inscrivibile un poligono a perimetro intrecciato girante sempre in un verso intorno al centro e di lati rispettivamente uguali a quelli dati.

5. — Se si indicano con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ gli archi sottendenti i lati $a_1, a_2, \ldots, a_n$, la condizione d'inscrivibilità nel circolo di raggio r è espressa dall'equazione

$$\frac{l}{r} = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{2}.$$

Per ciò e per quanto fu detto ai numeri 2 e 3 si ha così che: *Il raggio* r *del circolo circoscritto a poligono, ordinario, di lati* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *ed* l *è la maggior radice positiva dell'equazione*

$$\frac{l}{2r} = s_1 - s_3 + s_5 - s_7 + \ldots$$

dove, se per complementare di u s'intenda $\sqrt{1-u^2}$, s_m è zero se m supera n e, se m non supera n, è uguale alla somma di tutti i possibili prodotti di m delle quantità $\frac{a_1}{2r}, \frac{a_2}{2r}, \ldots, \frac{a_n}{2r}$ per le complementari delle altre $n-m$.

6. — Siano A, B due punti fissi d'un piano ed l sia la loro distanza. Se per coordinate di un punto del piano si prendono la distanza ρ di esso punto da A e il raggio r del circolo passante per esso punto e pei due punti fissi A e B, e si conserva per s_m il significato attribuitogli nel precedente numero, allora

$$\frac{\rho}{2r} = s_1 - s_3 + s_5 - s_7 + \ldots$$

è l'equazione della linea, che genera il termine della spezzata di lati $a_1, a_2, \ldots, a_n$ quando questa spezzata, deformandosi in modo da mantenersi inscritta in circolo variabile passante pei punti fissi A e B, roti intorno alla sua origine, che sia fissa in A. Tal linea, per quanto si è visto, passa per B.

7. — La questione, che ci eravamo proposta, resta così trattata esaurientemente. Prima di finire vogliamo però accennare alla proprietà più notevole dei poligoni inscritti in un

circolo e che generalmente si dimostra [1] mediante la proprietà che ha il segmento circolare, limitato da un arco e dalla sua corda, di essere massima delle superficie limitate dalla corda e da una linea della stessa lunghezza dell'arco. Vogliamo precisamente indicare un'altra via, forse più semplice, per riconoscere quella proprietà.

Dei quadrilateri di lati dati è massimo quello a diagonali di massimo rettangolo ossia quello inscritto in un circolo [2].

Se un poligono P non è inscritto in un circolo, esso ha almeno quattro vertici consecutivi, che non sono sullo stesso circolo; siano tali, p. es., A, B, C, D e sia $AB'C'D$, dal medesimo lato di $ABCD$ rispetto ad AD, il quadrilatero inscritto di lati AB', $B'C'$, $C'D$ rispettivamente uguali ad AB, BC, CD: sostituendo i vertici B', C' ai vertici B, C e conservando tutti gli altri vertici s'ottiene un poligono, che ha gli stessi lati del poligono P ed ha maggior area.

Da queste due proposizioni segue immediatamente che: *Dei poligoni di lati rispettivamente uguali a quelli d'un poligono dato è massimo quello convesso inscritto in un circolo.*

Genova, maggio 1909.

---

[1] V. p. es. ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, *Traité de Géométrie*, 1e partie. Paris, 1891, p. 351.

[2] V. p. es. F. GIUDICE, *Geometria piana*, F. Apollonio, Brescia, 1897; p. 209 in fin di pagina e p. 358.

Sul modulo di elasticità a trazione delle funi metalliche.

Nota dell'Ing. MODESTO PANETTI.

1. Premesse. — È noto che le funi nuove presentano in grado molto elevato l'attitudine a subire forti allungamenti quasi elastici, quando si assoggettano a sforzi di trazione moderati, e che la grandezza di questi allungamenti va riducendosi abbastanza rapidamente coll'uso della fune per effetto della ripetizione degli sforzi, mentre diminuisce il suo diametro.

Esperienze eseguite sulle funi metalliche di montacarichi per miniere (*) avrebbero provato che le loro proprietà elastiche, durante l'esercizio, tendono in breve tempo ad uno stato limite, il quale sembra poi si conservi inalterato per quasi tutta la vita della fune. Soltanto verso il termine del periodo utile di esercizio il modulo di elasticità, che prima andò aumentando, pare diminuisca. Ma non si tratta qui di un fenomeno reale, bensì della conseguenza di un apprezzamento errato, dovuto al fatto che il modulo di elasticità si calcola tuttavia in base alla sezione iniziale, mentre, per la rottura di un numero sempre più grande di fili, la sezione resistente della fune si è considerevolmente ridotta.

Il valore del modulo di elasticità delle funi di acciaio usate è stato recentemente determinato dal prof. Guidi con una importante serie di esperienze di Laboratorio pubblicate in questi stessi *Atti*.

Ma già in un anteriore importantissimo studio sperimentale sui cavi d'acciaio e di canapa, intrapreso per proporre un nuovo Capitolato di appalto alla Direzione generale di Artiglieria ed armamenti della nostra Marina (**), il Guidi aveva

(*) J. Hrabák, *Die Drahtseile*. Springer, Berlino, 1902.

(**) C. Guidi, *Risultati sperimentali di cavi di acciaio e di canapa*, " Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino " 1908.

potuto analizzare un fenomeno che ha molta analogia con quello a cui qui si accenna, cioè l'indurimento causato dalla ripetizione degli sforzi nel periodo ultra-elastico. Tale indurimento, come Egli osservava, esercita un'influenza svantaggiosa sull'attitudine a resistere alle azioni dinamiche, in quanto riduce il lavoro meccanico necessario a rompere le funi, e le fa apparire fragili in certe condizioni di esercizio, come quelle dei cavi di ormeggio.

Ma evidentemente anche l'aumento del modulo di elasticità che si verifica in un cavo, in conseguenza del prolungato suo esercizio, è un carattere che ne peggiora la resistenza dinamica; e interessa perciò disporre di funi che perdano il meno possibile della loro cedevolezza iniziale, al quale fine insieme colle proprietà del materiale coopera nel più alto grado la struttura.

È poi importante in ogni caso disporre di norme facili ad applicarsi per decidere con sufficiente approssimazione quale possa essere il valor limite verso cui tende il modulo di elasticità di un cavo col prolungarsi del suo esercizio. È questo infatti il valore da introdurre nel calcolo degli effetti della temperatura sulle catenarie secondo cui si dispongono tanto le funi dei trasporti aerei quanto le gomene dei ponti sospesi.

Tale lo scopo pratico delle seguenti ricerche, colle quali, svolgendo fino alle ultime deduzioni un'analisi accennata dal Hrabák nella citata sua opera, si deducono le formole per il calcolo del modulo di elasticità delle funi metalliche usate, dipendentemente dalle caratteristiche della loro struttura.

2. Relazione fondamentale esprimente il rapporto fra i moduli di elasticità di un cavo e dei fili. — Cominciamo a considerare una fune in cui tutti i fili siano avvolti ad elica intorno ad un medesimo asse (cavo semplice). Sia α l'inclinazione sull'asse, comune a tutti i fili, condizione, come è noto, obbligatoria, anche nel caso in cui siano distribuiti in più strati concentrici, per assicurare fra di essi l'uguale ripartizione dello sforzo. Facciamo astrazione nel caso di anima metallica dai fili che la compongono, che sono sempre di materiale più dolce.

Sia AB un tronco di detto cavo la cui lunghezza assumiamo come unità. Ciascuno dei suoi fili sarà quindi lungo

$$(1) \qquad l = \sqrt{1 + \mathrm{tang}^2\alpha}.$$

Se il tronco AB per effetto di uno sforzo di trazione subisce un allungamento ϵ, e simultaneamente si contrae in modo che tutti i punti situati ad una distanza r dall'asse gli si accostino della quantità ηr, ne segue che la lunghezza comune a tutti i tronchi di filo diverrà

$$(2) \qquad l + \Delta l = \sqrt{(1+\epsilon)^2 + (1-\eta)^2 \mathrm{tang}^2\alpha}.$$

Quindi l'allungamento Δl del filo è la differenza delle due espressioni precedenti.

Esaminiamo anzi tutto l'ordine di grandezza delle quantità considerate.

Per l'inclinazione media di avvolgimento dei fili ($\alpha = 17^\circ$ circa) $\mathrm{tang}^2\alpha$ è prossimo a 0,10, quindi $\mathrm{tang}^6\alpha = 0{,}001$ si può ritenere confrontabile coll' allungamento unitario ϵ, provocato in una fune usata dal carico di sicurezza. Il coefficiente di contrazione η può variare moltissimo. Vogliamo tuttavia ammettere, ragguagliandolo alle altre due quantità, che sia sempre

$$(3) \qquad \eta < \frac{\epsilon}{\mathrm{tang}^2\alpha}.$$

Presa dunque come grandezza fondamentale $\mathrm{tang}^2\alpha$, riterremo rispetto ad essa ϵ del 3° ordine ed η *almeno* del 2° ordine; cosicchè, se nel calcolo di Δl si trascurano tutte le quantità di ordine superiore al 4°, risulta per differenza degli sviluppi in serie dei secondi membri della (2) e della (1)

$$(4) \qquad \Delta l = (\epsilon - \eta\, \mathrm{tang}^2\alpha)\left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{tang}^2\alpha\right).$$

Notiamo subito che, in virtù dell'ipotesi (3), è escluso il caso, privo di significato pratico, in cui Δl, in conseguenza dell'esuberante contrazione trasversale, possa annullarsi.

Dividiamo ora membro a membro la (4) per la (1) e alla frazione $\frac{1-\frac{1}{2}\,\mathrm{tang}^2\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tang}^2\alpha}}$ che compare nel 2° membro sostituiamo, come è lecito entro i limiti di approssimazione che ci siamo prefissi, la quantità $\cos^2\alpha$.

Si deduce così l'allungamento unitario del filo corrispondente a quello ϵ della fune sotto la forma

$$(5) \qquad \frac{\Delta l}{l} = (\epsilon - \eta\,\mathrm{tang}^2\alpha)\cos^2\alpha.$$

Introduciamo ora la *tensione unitaria nominale* σ, quella cioè che si computa nei calcoli abituali, facendo il rapporto fra lo sforzo totale da cui è cimentato il cavo e la somma delle sezioni rette dei fili che lo costituiscono. Trattandosi di un cavo semplice si ha la tensione unitaria effettiva uguale a $\frac{\sigma}{\cos\alpha}$, e per conseguenza

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E_0\cos\alpha} \qquad \epsilon = \frac{\sigma}{E},$$

dove con E_0 si indica il modulo di elasticità del materiale col quale sono fabbricati i fili e con E il modulo di elasticità del cavo.

Sostituendo questi valori nella (5) risulta

$$(6) \qquad E = E_0\,\frac{\cos^3\alpha}{1+\mathsf{H}},$$

posto

$$\mathsf{H} = \eta\,\frac{E_0}{\sigma}\,\mathrm{sen}^2\alpha\cos\alpha.$$

Questa formola dimostra che il rapporto fra la rigidità longitudinale del cavo e quella del filo dipende da due termini uno dei quali ha relazione soltanto coll'inclinazione dell'avvolgimento α, l'altro H dipende anche dal quoziente della contrazione trasversale del cavo η all'allungamento simultaneo unitario del filo (*).

(*) Il Hrabák nella risoluzione del presente quesito trascurò l'influenza della contrazione trasversale e giunse per conseguenza alla formola

$$E = E_0\cos^3\alpha\,;$$

gli mancò quindi modo di continuare l'analisi del fenomeno.

3. Analisi delle cause della contrazione trasversale. — Il rapporto $\eta \frac{E_0}{\sigma}$ è il termine più difficile ad apprezzarsi della formola (6), ed è al tempo stesso quello dal quale dipende la graduale modificazione delle proprietà elastiche di un cavo durante il suo primo periodo di esercizio. Con quale legge si modifichi questo rapporto è cosa che soltanto uno studio sperimentale potrebbe determinare per ciascun tipo di cavo. È tuttavia possibile prevederne, con buon fondamento di accostarsi al vero, il valore limite; quello cioè che tende a verificarsi a mano a mano che l'adattamento del cavo si compie. Servono a tale scopo le seguenti considerazioni.

Una prima causa di contrazione del cavo consiste nell'assottigliamento elastico dei fili, conseguenza del loro allungamento longitudinale, provocato dalla tensione unitaria che li sollecita.

Tale tensione è uguale a $\frac{\sigma}{\cos\alpha}$, dando a σ il significato convenuto.

Detta η_1 la contrazione dovuta a questa prima causa, e ritenuto uguale a 0,3 il coefficiente di Poisson, si può scrivere:

$$\eta_1 = 0{,}3 \frac{\sigma}{E_0 \cos\alpha}.$$

Conseguentemente una prima parte del termine H è

$$H_1 = \eta_1 \frac{E_0}{\sigma} \operatorname{sen}^2\alpha \cos\alpha = 0{,}3 \operatorname{sen}^2\alpha. \tag{7}$$

La contrazione procede altresì dalla deformazione dei fili per schiacciamento, sia per effetto della pressione mutua fra ciascun filo e gli adiacenti del medesimo strato, sia per effetto della pressione esercitata dai fili degli strati esterni su quelli interni.

Nell'ipotesi di una perfetta uguaglianza di diametro dei fili la pressione mutua fra i fili di un medesimo strato dovrebbe verificarsi soltanto nello strato più interno o *strato di nocciolo* del cavo; e ciò perchè fra i fili degli strati esterni esisterebbe un giuoco che la contrazione dello strato di nocciolo non è suf-

ficiente ad annullare. Si pensi infatti che ogni strato contiene 6 fili più di quello interno, e che passando dallo strato di nocciolo di n fili al successivo di $n + 6$ fili il raggio medio r cresce della loro grossezza δ. Si sostituisca per approssimazione l'arco di cerchio compreso fra i centri di 2 fili contigui alla corda corrispondente, che, salvo la piccola influenza dell'obliquità di avvolgimento, ne misura il diametro. Tale sostituzione conduce ad apprezzare per difetto il giuoco fra filo e filo degli strati esterni, poichè fa supporre minore del vero il raggio medio dello strato di nocciolo, pel quale sopra tutto l'errore è sensibile. E tuttavia, posto

(8) $2\pi r = n\delta$ per lo strato di nocciolo,

e $2\pi(r + \delta) = (n + 2\pi)\delta > (n + 6)\delta$ per il successivo,

eseguita la differenza fra il 2° e il 3° membro della relazione precedente e il suo quoziente per il numero $n + 6$ dei fili dello strato a cui si riferisce e per il loro diametro δ, si ottiene il giuoco singolo riferito a δ

$$\gamma = \frac{0,28}{n + 6}, \text{ maggiore in ogni caso di } 0,01\ (*).$$

Perchè si verificasse il contatto dei fili degli strati esterni bisognerebbe che la contrazione dello strato di nocciolo, dovuta allo schiacciamento dei fili che lo costituiscono, fosse per lo meno uguale a γ. Ma, come si deduce dalla formola (18) che troveremo più tardi, il valore di η_2 che rappresenta tale contrazione non supera 0,0035, anche per i massimi angoli di inclinazione α e nell'ipotesi di trefoli formati da quadruplo strato di fili e di forti tensioni unitarie $\left(\frac{E_0}{\sigma} = 1000\right)$.

Adunque nella presente indagine, fondata su considerazioni geometriche, è giustificato ritenere che i fili degli strati esterni non siano soggetti a pressione per parte di quelli adiacenti del medesimo strato.

(*) Il numero dei fili dello strato di nocciolo non oltrepassa 12 che in casi affatto eccezionali.

Sembra contraddire a questa conclusione la solidarietà, riconosciuta sperimentalmente in alcuni campioni di vecchie funi (*) fra i fili rotti e quelli intieri, anche a breve distanza dalla sezione di rottura. Invero è naturale attribuire questo fenomeno provvidenziale all'immorsamento, che per effetto dell'attrito produrrebbero le pressioni mutue fra filo e filo, di cui dedurremo fra poco il valore unitario P. Anzi per mezzo di quel valore (13) si può calcolare la distanza l dalla sezione di rottura per la quale la solidarietà comincia ad essere completa. Basta porre $2fPl = \frac{\sigma}{\cos\alpha}\frac{\pi\delta^2}{4}$, onde per lo strato esterno di un cavo semplice si otterrebbe

$$l = \frac{1}{2f}\frac{\cos^3\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}\delta,$$

che fa vedere in quale relazione detta lunghezza stia col diametro del filo e coll'inclinazione dell'avvolgimento.

Ma prima di tutto la constatazione sperimentale fu fatta soltanto per cavi piani, nei quali l'avvolgimento elicoidale dei trefoli può produrre effetti non preveduti nella presente indagine; in secondo luogo l'influenza dello strato semiplastico della zincatura e delle disparità di grossezza fra filo e filo non possono a meno di modificare profondamente il fenomeno analizzato. Notiamo anzi che, per assicurare meglio l'immorsamento, secondo quanto risulta dalla presente discussione, sarebbe buona pratica quella di collocare con prudente controllo i fili di grossezza eccedente negli strati esterni.

In ogni modo poi e comunque le cose stiano di fatto, le conseguenze dedotte a stretto rigore dalle premesse non differiranno sensibilmente dal vero; poichè, se da un lato le modalità speciali che la teoria viene ad ammettere possono esagerare il valore delle contrazioni, dall'altro influiscono in senso opposto per mezzo di alterazioni secondarie che ne sono la conseguenza, come si vedrà in seguito.

4. Calcolo delle pressioni mutue fra filo e filo. — È noto che un organo flessibile soggetto alla trazione

$$T = \frac{\pi\delta^2}{4}\frac{\sigma}{\cos\alpha}$$

(*) C. Guidi, *Risultati sperimentali su funi di acciaio usate.* Nota citata.

lungo il proprio asse piegato ad elica con inclinazione α su di una superficie cilindrica di raggio r, esercita normalmente ad essa una pressione R uguale per unità di lunghezza a $\frac{T}{\rho}$, se con $\rho = \frac{r}{\mathrm{sen}^2\alpha}$ si indica il raggio di curvatura dell'elica.

Ammettendo anche qui per approssimazione la (8), se ne deduce

$$R = \frac{\pi \delta}{2n} \frac{\mathrm{sen}^2\alpha}{\cos\alpha} \sigma. \tag{9}$$

La pressione normale esercitata da ciascun filo è dunque inversamente proporzionale al numero dei fili dello strato a cui appartiene.

In conseguenza, supposto un cavo semplice composto di τ strati, se n è il numero dei fili dello strato di nocciolo, la pressione normale esercitata da ciascun filo dello strato esterno di posto τ, che contiene $n + 6(\tau - 1)$ fili, è

$$p_1' = R \frac{n}{n + 6(\tau - 1)}, \tag{10}$$

e questa viene trasmessa a ciascun filo dello strato di posto $\tau - 1$ con intensità

$$p_1'' = p_1' \frac{n + 6(\tau - 1)}{n + 6(\tau - 2)} = R \frac{n}{n + 6(\tau - 2)}. \tag{11}$$

Questi alla loro volta sviluppano un' azione uguale a $R \frac{n}{n + 6(\tau - 2)}$, che si somma colla precedente, dando luogo alla pressione p_2', la quale viene trasmessa ai fili dello strato di posto $\tau - 2$ con intensità p_2''. E si ha evidentemente

$$p_2' = 2R \frac{n}{n + 6(\tau - 2)} \qquad p_2'' = 2R \frac{n}{n + 6(\tau - 3)}; \tag{12}$$

e così di seguito, fino allo strato di nocciolo, i cui fili risentono dagli strati esterni una pressione uguale a $(\tau\text{-}1)R$ per ciascuno, a cui sovrappongono l'azione propria R.

L'equilibrio dei fili dello strato di nocciolo, soggetti dunque alla forza τR, diretta secondo la normale alla superficie cilin-

drica sulla quale sono avvolti i loro assi, richiede un'azione laterale fra filo e filo che calcoleremo, supponendo l'anima del cavo incapace di reagire a compressione.

Sede di questa azione, che indicheremo per unità di lunghezza colla lettera P, sono le superficie rigate, le cui generatrici si appoggiano a due eliche assi-fili contigue e le incontrano ad angolo retto. Considerando (fig. 1) tre fili adiacenti, e

i segmenti delle generatrici suddette AB, BC che vanno dal 1° al 2° e dal 2° al 3° e hanno comune l'intersezione B col 2° filo, possiamo determinare l'angolo acuto 2β di detti segmenti. Ammetteremo per approssimazione che la lunghezza di ciascuno di essi sia uguale all'arco dell'elica traiettoria normale fra due eliche assi-fili contigue, e che l'intersezione delle perpendicolari ad una coppia di segmenti, condotte per le rispettive mezzarie nel loro piano, come la n' al segmento AB, si confonda col centro di curvatura O dell'elica traiettoria normale, relativo al punto B. Allora il segmento BO è uguale al raggio di curvatura della traiettoria normale

$$BO = \frac{r}{\cos^2\alpha}\,; \quad \text{inoltre } AB = BC = \frac{2\pi r}{n}\cos\alpha\,;$$

e ne risulta

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\,\frac{AB}{BO} = \frac{\pi}{n}\cos^3\alpha \qquad P = \frac{\tau R}{2\operatorname{sen}\beta} = \frac{\tau R n}{2\pi\cos^3\alpha}\,.$$

Finalmente, sostituendo ad R il suo valore dato dalla (9), si ottiene

$$P = \tau \frac{\pi}{4} \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^4\alpha} \sigma \delta. \tag{13}$$

grandezza indipendente dal numero dei fili dello strato, ovvero, ciò che fa lo stesso, dal suo raggio medio.

5. Formola del Föppl applicabile al calcolo dello schiacciamento dei fili. — Per apprezzare le deformazioni che le pressioni R e P dirette normalmente agli assi dei fili possono produrre sui fili stessi non si ha oggi a disposizione che una formola ricavata dal Prof. Föppl (*), nello svolgimento che egli riuscì a dare del problema di Hertz sul comportamento di due verghe tonde di materiale omogeneo elastico e di lunghezza indefinita, premute una contro l'altra da una forza di intensità p per unità di lunghezza. L'accostamento degli assi di dette verghe viene espresso da

$$w = 2 \frac{m^2 - 1}{m^2 E_0} \frac{p}{\pi} \left(1{,}207 + \log \frac{E_0 \delta}{2p}\right),$$

usando col solito significato i simboli adottati nei precedenti paragrafi.

Se in luogo del coefficiente di Poisson $\frac{1}{m}$ poniamo anche qui 0,3 e riuniamo in un termine unico i due termini entro parentesi, passando in seguito dai logaritmi naturali ai decimali, risulta

$$w = \frac{4}{3} \frac{p}{E_0} \operatorname{Log} \frac{5}{3} \frac{E_0}{p} \delta. \tag{14}$$

6. Schiacciamento secondo la normale all'asse del cavo. — Cominciando dall'applicare la formola precedente ai fili soggetti alle pressioni R, osserviamo anzitutto che quelle che nascono in ciascun filo in conseguenza del suo proprio sforzo di trazione non operano con tutta la loro intensità sull'intera

(*) Föppl, *Lezioni di Meccanica Tecnica*, vol. V, *Die wichtigsten Lehren des höheren Elastizitäts-Theorie.*

sua grossezza, ma, sviluppandosi gradualmente nella massa stessa del filo, si può ritenere producano lo stesso effetto come se ne cimentassero metà soltanto, operando col loro valore totale.

Ammetteremo quindi che la pressione p_1' schiacciante i fili dello strato esterno (formola 10) faccia sentire la sua azione soltanto sulla metà interna della loro grossezza, e che sulla metà esterna dei fili dello strato successivo operi esclusivamente la p_1''. Allora l'avvicinamento w_1 degli assi-fili dei due strati considerati si può calcolare colla (14) introducendovi in luogo di p un valor medio fra p_1' e p_1'', per esempio, quello che si ottiene facendo la media fra i denominatori, ossia

$$p_1 = R \frac{n}{n+6(\tau-1,5} = \frac{\pi^2 \delta}{2[n+6(\tau-1,5)]} \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha} \sigma ,$$

e ciò allo scopo di evitare complicazioni eccessive, d'altronde ingiustificate, poichè, come risulta dalla (14), w non è semplicemente funzione lineare della pressione p.

Se ne deduce

$$\frac{w_1}{\delta} \frac{E_0}{\sigma} \operatorname{sen}^2\alpha \cos\alpha = \tag{15}$$

$$= \frac{2}{3} \operatorname{sen}^4\alpha \frac{\pi^2}{n+6(\tau-1,5)} \operatorname{Log} \frac{10}{3\pi^2} [n+6(\tau-1,5)] \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} \frac{E_0}{\sigma} .$$

Così pure, per calcolare l'avvicinamento w_2 degli assi-fili dello strato di posto τ-1 a quello di posto τ-2, si potrà assumere una pressione media fra le p_2' e p_2'' date dalle formole (12). Per esempio

$$p_2 = 2R \frac{n}{n+6(\tau-2,5)} ,$$

colla quale si ottiene

$$\frac{w_2}{\delta} \frac{E_0}{\sigma} \operatorname{sen}^2\alpha \cos\alpha = \tag{16}$$

$$= \frac{4}{3} \operatorname{sen}^4\alpha \frac{\pi^2}{n+6(\tau-2,5)} \operatorname{Log} \frac{5}{3\pi^2} [n+6(\tau-2,5)] \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} \frac{E_0}{\sigma} .$$

Un'espressione analoga si deduce calcolando l'avvicinamento degli strati di posto τ-2 e τ-3

$$(17)\qquad \frac{w_3}{\delta}\frac{E_0}{\sigma}\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha =$$

$$= 2\operatorname{sen}^4\alpha\frac{\pi^2}{n+6(\tau-3{,}5)}\operatorname{Log}\frac{10}{9\pi^2}[n+6(\tau-3{,}5)]\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}\frac{E_0}{\sigma},$$

e non può interessare procedere più oltre, non essendo in uso cavi semplici aventi più di 4 strati concentrici.

7. Contrazione dello strato di nocciolo. — Meno soddisfacente è l'applicazione della formola (14) al calcolo dello schiacciamento dei fili dello strato di nocciolo sotto l'azione delle pressioni P che ciascuno di essi risente da quelli adiacenti, secondo quanto è stato detto nel § 4. Anzitutto le pressioni P non operano esattamente in sensi opposti, ma sono inclinate di un angolo 2β, che può essere grande se piccolo è il numero n dei fili componenti la treccia di nocciolo. In secondo luogo lo schiacciamento già discusso che i fili soffrono in direzione normale alla superficie cilindrica, sulla quale sono avvolti i loro assi, deve farli rigonfiare in direzione trasversale, riducendo la deformazione che produrrebbero le pressioni P se operassero da sole. Finalmente l'anima del cavo deve verosimilmente concorrere in maggiore o minor grado, secondo la sua struttura, a fare equilibrio alle pressioni radiali τR applicate ai fili dello strato di nocciolo, mentre qui si è supposto che essa rimanga affatto inattiva.

Ne segue che la contrazione calcolata ricorrendo alla (14) per apprezzare l'effetto delle pressioni P sullo strato di nocciolo, dopo aver già tenuto conto delle R, dev'essere alquanto errata per eccesso. Ma sarebbe assai difficile rendersi conto dell'entità dell'errore.

Applicando detta formola col sostituirvi a p il valore di P dato dalla (13), e ponendo $\frac{w}{\delta} = \eta'_2$, poichè tale rapporto è precisamente la contrazione dello strato di nocciolo, si ottiene

$$(18)\qquad \eta'_2\frac{E_0}{\sigma}\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha = \tau\frac{\pi}{3}\frac{\operatorname{sen}^4\alpha}{\cos^3\alpha}\operatorname{Log}\frac{20}{3\pi\tau}\frac{\cos^4\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}\frac{E_0}{\sigma}.$$

8. Calcolo della contrazione media. — Cogli elementi dedotti nei precedenti paragrafi è ormai possibile determinare la contrazione dei singoli strati, oltre a quella η_2' già ricavata per lo strato di nocciolo che contiene n fili.

Per lo strato successivo di posto 2 si noti che il raggio $\frac{n\delta}{2\pi} + \delta$ deve diminuire della quantità

$$\eta'_2 \frac{n\delta}{2\pi} + \frac{w_{\tau-1}}{\delta} \delta,$$

si ha quindi

$$\eta_2'' = \frac{n\eta_2' + 2\pi \frac{w_{\tau-1}}{\delta}}{n + 2\pi}.$$

Stando nei soliti limiti di approssimazione, porremo in queste formole 6 in luogo di 2π, acciocchè i loro denominatori esprimano il numero dei fili delle singole treccie, sicchè risulta

$$\eta_2'' = \frac{n\eta_2' + 6 \frac{w_{\tau-1}}{\delta}}{n + 6} \qquad \eta_2''' = \frac{n\eta_2' + 6\left(\frac{w_{\tau-1}}{\delta} + \frac{w_{\tau-2}}{\delta}\right)}{n + 12}.$$

La contrazione è dunque variabile da strato a strato di uno stesso cavo, e, come si intuisce osservando che le pressioni che la producono vanno crescendo verso l'interno, è maggiore negli strati più interni.

In conseguenza, il modulo di elasticità degli strati esterni dev'essere alquanto più grande, sicchè i loro fili devono entrare per primi in tensione, e, per quanto le conclusioni dedotte a proposito del periodo elastico si possono estendere anche in quello delle grandi deformazioni, ne risulta che le prime rotture si dovrebbero effettuare nei fili dello strato esterno.

Quale contrazione del cavo adotteremo la media delle contrazioni relative ai suoi fili, attribuendo per semplicità la sola η_2' agli n fili dello strato di nocciolo, la η_2'' tutta quanta agli $n + 6$ fili dello strato successivo, e così via; sicchè risulta

$$\eta_2 = \frac{\tau n\eta_2' + 6(\tau - 1) \frac{w_{\tau-1}}{\delta} + 6(\tau - 2) \frac{w_{\tau-2}}{\delta} + \dots}{\tau[n + 3(\tau - 1)]}. \tag{20}$$

Invece della contrazione η_2' e dei rapporti $\frac{w}{\delta}$ si calcolarono le quantità suddette moltiplicate per

$$\frac{E_0}{\sigma} \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha ,$$

ossia i secondi membri delle (15), (16), (17) e (18).

Così dalla sostituzione dei numeri ottenuti nelle (20) risultarono i valori di

$$H_2 = \eta_2 \frac{E_0}{\sigma} \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha,$$

seconda parte del termine H della formola fondamentale (6).

calcoli furono eseguiti ponendo $\frac{E_0}{\sigma} = 2000$ e combinando insieme le ipotesi seguenti:

— numero degli strati $\tau = 1, 2, 3, 4$
— numero dei fili dello stràto di nocciolo

$$n = 6, 9, 10, 12$$

— angolo di inclinazione dell'avvolgimento

$$\alpha = 12^\circ, 15^\circ, 18^\circ, 21^\circ, 24^\circ.$$

Dal confronto dei valori registrati nel quadro alla pag. seg. risulta quanto sia grande l'influenza dell'obliquità dell'avvolgimento in prima linea e del numero degli strati formanti il cavo in seconda, sulla sua contrazione trasversale.

Invece è piccola la divergenza fra i valori dedotti facendo variare esclusivamente il numero dei fili dello strato di nocciolo: si tratta di $^1/_{10}$ appena del valor medio passando dal minimo di 6 al massimo di 12 fili.

Tenendo conto del grado di approssimazione della presente ricerca, è dunque ragionevole sostituire ai valori singoli un valore intermedio calcolato per ogni angolo di inclinazione e per ogni grado di molteplicità degli strati costituenti il cavo. Nell'apprezzare queste medie si ebbe cura di attribuire maggior

peso ai numeri corrispondenti ai valori più bassi di n, a mano a mano che il grado di molteplicità degli strati diventava più grande. Non è infatti caso pratico quello, ad esempio, di un cavo semplice formato di 4 strati concentrici di cui quello di nocciolo contenga 10 o 12 fili.

Tabella I.

Contrazione media in un cavo semplice dovuta allo schiacciamento dei fili.

Valori di 10 000 H_2

Formazione del cavo		$\alpha = 12°$	$\alpha = 15°$	$\alpha = 18°$	$\alpha = 21°$	$\alpha = 24°$
Strato unico . .		104	248	506	927	1592
Doppio strato ($\tau = 2$)	$n = 6$	153	364	736	1338	2273
	$n = 9$	159	380	770	1403	2392
	$n = 10$	162	384	778	1421	2424
	$n = 12$	165	392	796	1452	2479
Triplo strato ($\tau = 3$)	$n = 6$	192	453	913	1646	2777
	$n = 9$	201	475	962	1742	2954
	$n = 10$	203	483	977	1772	3010
	$n = 12$	209	497	1006	1828	3109
Quadruplo strato ($\tau = 4$)	$n = 6$	221	524	1051	1888	3174
	$n = 9$	232	550	1108	2003	3386
	$n = 10$	235	560	1128	2042	3460
	$n = 12$	242	578	1170	2117	3594

Sommando questi valori con quelli calcolabili ricorrendo alla (7) che permette di apprezzare parte della contrazione del cavo, conseguenza dell'assottigliamento elastico dei fili, si ottengono i numeri del seguente quadro:

TABELLA II.

Contrazione totale in un cavo semplice.

Valori di 1000 H

	$\alpha = 12^\circ$	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 18^\circ$	$\alpha = 21^\circ$	$\alpha = 24^\circ$
Strato unico . .	23	45	79	131	209
„ doppio .	29	58	106	179	289
„ triplo . .	33	67	124	211	341
„ quadruplo	35	73	134	227	367

Vi corrispondono i rapporti seguenti fra il modulo di elasticità dei cavi semplici e quello dei fili (formola 6);

TABELLA III.

Cavi semplici.

Valori di E/E_0

	$\alpha = 12^\circ$	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 18^\circ$	$\alpha = 21^\circ$	$\alpha = 24^\circ$
Strato unico . .	0,914	0,862	0,797	0,720	0,632
„ doppio .	0,909	0,852	0,778	0,691	0,592
„ triplo . .	0,905	0,845	0,765	0,673	0,569
„ quadruplo	0,904	0,840	0,758	0,664	0,559

Supposto quindi il modulo di elasticità dei fili di acciaio al crogiuolo uguale circa a 21000 kg/mm², si ha per le inclinazioni medie di avvolgimento (15° a 18°) e per cavi composti di duplice o triplice strato un modulo di elasticità variabile fra 16060 e 17900 kg/mm², sempre supponendo la tensione unitaria apparente prossima a 10 kg/mm².

9. Variazione del modulo di elasticità in un cavo semplice col crescere dello sforzo. — La legge di variazione del modulo di elasticità di un cavo semplice dipendentemente dallo sforzo a cui è assoggettato risulta in modo

assai semplice dalle ricerche precedenti. Si noti anzitutto che lo sforzo influisce soltanto sul termine che tien conto della contrazione del cavo, il quale termine risulta dalla somma di una quantità indipendente da σ, quella espressa dalla (7), e di più altre, come le (15), (16), (17) e (18), moltiplicate per i coefficienti indicati nella (20), le quali tutte contengono il logaritmo del reciproco della tensione σ.

Ne segue che per σ piccolissimo il denominatore della (6) diventa grandissimo, e diminuisce poi con legge estremamente rapida per i primi incrementi della tensione σ. Simultaneamente il modulo di elasticità E del cavo dal valore zero che gli spetterebbe quando la tensione è nulla, cresce molto rapidamente con σ, e si mantiene poi pressochè costante per tensioni contenute entro i limiti pratici di esercizio.

Intanto possiamo constatare come questa interpretazione delle formole corrisponda al noto fenomeno della cedevolezza delle funi sotto l'azione dei primi piccoli carichi coi quali vengono poste in tensione, mentre nelle esperienze sono oggetto di ricerca i soli ulteriori allungamenti prodotti dagli incrementi dello sforzo preliminare. Ed è notevole che tale fenomeno non poteva essere messo in evidenza se non da una analisi che tenesse conto della contrazione.

Allo scopo di rendersi poi ragione nel modo più semplice della legge incrementale del modulo di elasticità col crescere degli sforzi, ci limiteremo a considerarne l'effetto su quello fra i termini di cui risulta la η_2, che ha importanza prevalente, ossia sulla contrazione η_2' dello strato di nocciolo.

Dalla (18) si deduce

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\eta_2' \frac{E_0}{\sigma} \operatorname{sen}^2\alpha \cos\alpha\right) = -0{,}454\,\tau \frac{\operatorname{sen}^4\alpha}{\cos^3\alpha} \frac{1}{\sigma}.$$

Nelle vicinanze di un dato valore di σ la variazione del 1° membro della (18), e per approssimazione anche quella della quantità H_2, si può quindi ritenere uguale a

$$-\omega\tau\frac{\Delta\sigma}{\sigma}, \quad \text{posto} \quad \omega = 0{,}454 \frac{\operatorname{sen}^4\alpha}{\cos^3\alpha},$$

essendo rispettivamente

per $\alpha =$ 12°	15°	18°	21°	24°
$1000\,\omega =$ 0,91	2,27	4,81	9,13	16,24.

Dalla (6), tenuto presente che H ed H_2 differiscono solo per la costante H_1, si ricava

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\omega\tau}{1+H}\,\frac{\Delta\sigma}{\sigma}, \tag{21}$$

onde risulta quanto sia piccola nelle condizioni di esercizio la variazione percentuale del modulo di elasticità di un cavo rispetto alla variazione della tensione che l'ha provocato. In ogni modo la (21), col sussidio dei valori di 1000 ω testè registrati e con quelli di 1000 H dati nella 2ª tabella permette di apprezzare facilmente le variazioni suddette.

Così, supposto un incremento della tensione σ da 10 a 15 kg/mm²:

— il modulo di elasticità $E = 17900$ (calcolato per $\alpha = 15°$ e $\tau = 2$) aumenterebbe di

$$\Delta E = \frac{2.2{,}27}{1000+58}\,\frac{1}{2}\,E = 38{,}5 \text{ kg/mm}^2$$

— il modulo di elasticità $E = 16060$ (calcolato per $\alpha = 18°$ e $\tau = 3$) aumenterebbe di

$$\Delta E = \frac{3.4{,}81}{1000+124}\,\frac{1}{2}\,E = 103 \text{ kg/mm}^2.$$

10. Estensione al caso dei cavi piani e torticci. — Le relazioni dedotte nei precedenti paragrafi fra il modulo di elasticità E_0 dei fili e quello E dei cavi semplici si possono applicare al trapasso perfettamente analogo dalle proprietà elastiche dei trefoli a quelle dei cavi piani. Indicato quindi con β l'angolo che misura la inclinazione dell'avvolgimento dei trefoli sul cavo e con E' il modulo di elasticità del cavo, si può scrivere identicamente alla (6)

$$E' = E\,\frac{\cos^3\beta}{1+H_c}, \quad \text{posto } H_c = \eta_c\,\frac{E}{\sigma}\,\text{sen}^2\beta\cos\beta, \tag{22}$$

e conservando a σ il suo significato di tensione unitaria nominale. Il coefficiente η_c denota la contrazione del cavo, la quale, in modo affatto analogo a quanto si è veduto nei cavi semplici, risulta di due parti: la contrazione η del trefolo, che in questo caso costituisce l'elemento del cavo, e la contrazione prodotta

dallo schiacciamento che il trefolo subisce per effetto delle pressioni che i trefoli adiacenti gli trasmettono.

La prima è precisamente quella calcolata nel § 8; la seconda è dovuta a forze assai minori di quelle applicate ai fili nei cavi semplici, attesochè, salvo rare eccezioni, i trefoli in un cavo piano sono disposti in semplice strato.

D'altra parte lo schiacciamento dei trefoli non potrebbe avvenire che per effetto di un ulteriore schiacciamento dei fili a contatto, al quale farebbero ostacolo le deformazioni provocate nei fili dalle azioni interne a ciascun trefolo. Per queste ragioni, anche in via di compenso alla contrazione alquanto esagerata messa in conto nel calcolo del modulo di elasticità dei cavi semplici, conviene trascurare nella (22) la 2ª parte di cui η_c consta e limitarsi alla 1ª, che è il coefficiente η senz'altro.

In tale ipotesi, combinando la (22) colla (6), risulta

$$E' = E_0 \frac{\cos^3\alpha \,.\, \cos^3\beta}{1 + H^{\alpha} + H_\beta \cos^3\alpha}\,, \tag{23}$$

ove

$$H_\alpha = \eta \frac{E_0}{\sigma} \operatorname{sen}^2\alpha \cos\alpha \qquad\qquad H_\beta = \eta \frac{E_0}{\sigma} \operatorname{sen}^2\beta \cos\beta$$

si deducono immediatamente caso per caso dalla Tabella II, avendo riguardo sia all'angolo di inclinazione, sia al grado di moltiplicità degli strati di fili nel trefolo per la scelta del valore di H_α e di quelli dei trefoli nel cavo per H_β.

Così per un cavo piano di 6 trefoli, formati ciascuno di 18 fili in 2 strati, si ha:

Nell'ipotesi $\alpha = \beta = 15°$	Nell'ipotesi $\alpha = \beta = 18°$
$H_\alpha = 0{,}058$ (strato doppio)	$H_\alpha = 0{,}106$
$H_\beta = 0{,}045$ (strato semplice)	$H_\beta = 0{,}079$
$\cos^3\alpha = \cos^3\beta = 0{,}90$	$\cos^3\alpha = \cos^3\beta = 0{,}86$
$E' = 0{,}738 E_0 = 15500$ kg/mm²;	$E' = 0{,}630 E_0 = 13230$ kg/mm².

Questi valori sono nell'ordine di grandezza di quelli ottenuti sperimentalmente dal Prof. Guidi nella citata sua Nota. Essi dimostrano inoltre quanto sia grande l'influenza di un divario anche piccolo nell'obliquità di avvolgimento.

modo affatto analogo il presente procedimento si estende al caso di cavi torticci.

Apparecchi galvanometrici sensibilissimi per corrente alternata fondati sulle vibrazioni torsionali di risonanza in fili metallici.

Nota preliminare del Dr. ANDREA GIULIO ROSSI.

1. — Le tre specie di vibrazioni, trasversale, longitudinale e torsionale, che un filo teso fra due punti fissi può assumere, sono rette notoriamente dalla stessa forma di equazione differenziale, $\ddot{\varphi}_t - a^2 \ddot{\varphi}_x = o$. Ne deve conseguire che una forza periodica agente su l'uno dei punti fissi (nodi) potrà risvegliare vibrazioni forzate contemporaneamente delle tre forme. I fenomeni di risonanza sono in grado di porre in luce questo fatto.

Allorchè la forza periodica agente abbia il periodo stesso che compete ad una delle tre specie di vibrazioni della corda, quella vibrazione si esalta sulle altre fino a rendersi sensibile. Facendo variare gradualmente il periodo della forza applicata all'un dei capi per la serie dei valori di

$$T = \frac{2L}{a}$$

che corrispondono alle tre velocità di propagazione a in una data corda, vi si possono successivamente risvegliare per risonanza le tre vibrazioni fondamentali, trasversale, torsionale, longitudinale, con una mezza onda stazionaria sulla lunghezza L della corda.

La direzione della forza periodica agente sull'estremo fisso, per rispetto all'asse della corda, è indifferente (e d'altra parte non si saprebbe con precisione definire sperimentalmente), inquantochè, ciascuna vibrazione di risonanza sceglie della forza periodica quella componente che le conviene. Questo fatto generale si può osservare in molti fenomeni di risonanza che si presentano spontaneamente.

Il caso al quale voglio qui attendere più in particolare, è quello delle vibrazioni torsionali di una corda tesa fra due punti, rappresentati, ad es., dai morsetti di due tenditori alquanto elastici, sostenuti alle estremità di una tavoletta rigida. Sul centro del filo sia incollato un piccolo specchietto, atto a render conto dell'ampiezza delle vibrazioni torsionali, ruotando nel piano normale al filo un raggio di luce riflesso.

La presenza dello specchietto ha una grande influenza sulla *purezza* della vibrazione torsionale e sul suo periodo, tanto più quanto più il filo sia sottile. È difatti assai difficile evitare la produzione di moti trasversali quando la vibrazione torsionale divenga un po' grande, in ragione della distribuzione dissimetrica della massa dello specchietto intorno all'asse. Inoltre, non è più possibile fare assegnamento sulla formola teorica per calcolare il periodo di torsione proprio del sistema. Bisogna procedere per tentativi a regolare la lunghezza del filo e il momento di massa dello specchietto, affinchè, per es., la vibrazione torsionale propria *risuoni* con quella di un dato diapason.

A risvegliare tale risonanza basta allora generalmente porre a contatto lo stelo del diapason vibrante *con un punto qualunque* della tavoletta che sostiene il filo. Se questo sia molto sottile, la vibrazione si apre ampiamente anche portando assai lontano, su altri sostegni, il contatto.

Tale è, del resto, il caso generale. Un diapason vibrante, che per il solo tramite dell'aria, non trasmette che una quantità insensibile di energia ad una corda, può invece, appoggiato pel suo stelo al sostegno di questa, imprimerle la vibrazione di risonanza con ampiezze notevoli, sia trasversale che longitudinale o torsionale. S'intende che la disposizione di Melde è la più efficace, ma non è essenzialmente necessaria, specialmente con fili molto sottili e risonanze acute.

Nella disposizione di Melde, quando il rebbio del diapason trasmette al filo le sue vibrazioni nel senso longitudinale, il suo periodo deve essere la metà di quello proprio alla vibrazione trasversale della corda, se si vuole che questa risuoni in tal senso. Anche per la vibrazione torsionale, eccitata come ho detto, si verifica lo stesso fatto. Se, ad es., la corda può fare 42 vibrazioni di torsione, lo *stelo* del diapason deve trasmettergliene 84, per la risonanza nodale più completa. Ciò non

toglie che altresì un diapason di 42 vibrazioni risvegli la risonanza stessa, con un impulso ogni due vibrazioni; e così, più parzialmente, uno di 21 con un impulso ogni quattro, ecc. Sempre nello stesso caso e trattandosi di un filo molto sottile, ho anche constatato che diapason di frequenze maggiori di 84 gli imprimono risonanze torsionali sempre più deboli, salvo coi primissimi multipli di 42, per i quali le risonanze possono esser ancora molto ampie, ma si presentano generalmente accompagnate da notevoli irregolarità nella linea luminosa, analoghe a battimenti.

2. — Le tre specie di vibrazioni si possono ora eccitare in un filo metallico per risonanza, facendolo percorrere da una *corrente alternata*, a volta a volta di una frequenza opportuna. Vogliamo escludere la considerazione delle vibrazioni di origine termica, che più facilmente si possono risvegliare in fili, o sbarre, con correnti alternate intense, e considerare soltanto le vibrazioni di risonanza dovute all'effetto magnetico della corrente.

È notissima quella elegante ed efficace disposizione che consiste nel far vibrare un filo metallico *trasversalmente* nello spazio interpolare di un magnete disposto presso un ventre della vibrazione, quando il filo sia percorso da una corrente alternata di periodo uguale a quello di una delle vibrazioni trasversali possibili nel filo teso.

Di meno sicura efficacia apparisce la corrente alternata nel filo per risvegliare la sua vibrazione *longitudinale* di risonanza, quando si vogliano assolutamente escludere gli effetti termici, utilizzando soltanto la magnetizzazione circolare (*). I circuiti magnetici trasversi nell'interno del filo, tendono a contrarsi e

(*) Io uso la parola *circolare*, invece di *trasversale*, che molti adoperano nello stesso caso, per indicare la magnetizzazione chiusa entro la sezione del filo, senza masse polari, — sebbene non si possa ammettere a rigore che in ogni caso le linee d'induzione corrano proprio circolarmente nella sezione normale del filo. Mi pare che si dovrebbe riserbare la parola *trasversale* a indicare le magnetizzazioni, che sono possibili in direzione delle corde o dei diametri, normali od obliqui, alle generatrici di un filo cilindrico o meno, con masse polari; tale è il caso, ad es., che si realizza sul filo d'acciaio del telegrafono Poulsen.

si respingono mutuamente in direzione tangenziale alle linee di corrente: esercitano quindi sul conduttore che li contiene uno sforzo di contrazione e di allungamento: è l'effetto della *strizione* di Maxwell. Questo fenomeno, che costituisce la causa originaria del funzionamento del noto interruttore periodico di Caldwell o di Wehnelt a istmo liquido, come pure dell'arco cantante (conduttori deformabili), ha una debole azione nei fili metallici in confronto a quella del fenomeno termico e agisce inoltre nello stesso senso di questo: sicchè in condizioni statiche, cioè con corrente continua, non è possibile mettere in luce l'allungamento di magnetostrizione. Ma, se si fa agire la corrente alternata di risonanza con la vibrazione longitudinale propria del filo metallico, è possibile suscitare una vibrazione, acusticamente sensibile. Sui procedimenti per realizzare questa esperienza e sugli artifizi che ho posto in opera per separare l'ondulazione di magnetostrizione dalla ondulazione termica, che ha lo stesso periodo, riferirò in un'altra comunicazione.

3. — La *vibrazione torsionale di risonanza* di un filo metallico può risvegliarsi, mediante una corrente alternata che lo percorra, nel modo seguente.

Il filo sia teso fra A e B e sia munito sulla mezzeria del solito specchietto s, per rivelare la torsione. Sia percorso da una corrente i; si trovi nel campo di due sistemi di magneti, che lo polarizzino, come mostra la fig. 1, con due poli omonimi alle estremità e un polo conseguente al centro. In ciascuna delle due metà del filo metallico, le due magnetizzazioni, circolare e longitudinale, si compongono in una magnetizzazione distribuita elicoidalmente, E.

Secondo il concetto della strizione di Maxwell, questa elica tende a rettificarsi, donde uno sforzo di torsione sul centro del filo, di cui il senso, θ, è facile prevedere. È quello stesso, d'altra parte, che si può assegnare con la regola di Ampère, notando che il filo AB tende ad avvolgersi a spirale intorno a quella porzione del campo longitudinale che lo pervade, nel senso di rinforzare il campo stesso. Lo sforzo di torsione che sollecita il filo rettilineo è insomma il limite a cui tende il sistema di forze che agirebbe per far avvolgere il filo intorno al campo ns quando il filo fosse lasco e flessibile. Questo sforzo

di torsione è tanto più piccolo, a parità di campo e di corrente, quanto minore sia la sezione del filo, — ma si può renderlo assai evidente con l'aiuto della *risonanza*. — Se si manda nel filo una corrente alternata, come il senso dello sforzo di torsione si rovescia ad ogni mezzo periodo, ne risulterà una coppia di torsione alternata con lo stesso periodo. Se il periodo della

Fig. 1.

Fig. 2.

corrente sia quello stesso che compete alle vibrazioni torsionali proprie del filo, munito del suo specchietto, per risonanza l'ampiezza delle vibrazioni potrà notevolmente ingrandirsi.

È quanto l'esperienza mi ha dimostrato.

L'apparecchio che ha servito a realizzarla è rappresentato dalla fig. 2. Lungo l'asse di due spirali magnetizzanti α, β, avvolte in sensi inversi con circa 2500 spire di filo di rame di 0,5 mm. sopra 10 cm. di lunghezza, è teso un filo d'argento *AB*

di 0,02 mm. fra due tenditori alquanto elastici, che permettono di variarne la lunghezza fra 20 e 25 cm. circa. Le due spirali son separate da un piccolo spazio per dar luce allo specchietto *s* portato dal filo. Una corazza cilindrica di ferro avvolge all'esterno quasi totalmente le spirali magnetizzanti per rinforzare il campo nell'interno, e contemporaneamente fa loro da sostegno.

La corrente alternata di risonanza veniva fornita, nelle prime esperienze, da un piccolo alternatore Siemens a ruota di ferro dentata, comandato da un motore a corrente continua, che permetteva una grande varietà di frequenze, fino a 1000 periodi per 1''. Però, una volta determinata la frequenza adatta a un certo filo, convien meglio, come accessorio all'apparecchio, un diapason elettromagnetico, alquanto regolabile coi soliti contrappesi, il quale fornisca in un piccolo rocchetto d'induzione, costituito dal suo stesso elettromagnete, la debole corrente alternata che è sufficiente ad animare la vibrazione del filo. Il diapason si presta con vantaggio a fornire una data frequenza costante, meglio di qualsiasi alternatore rotativo, e non consuma che 1 o 2 watt di corrente continua.

La vibrazione torsionale di risonanza, quando il campo costante longitudinale sia di intensità sufficiente, si produce con una grande ampiezza, fino a dare, sopra una scala translucida da galvanometro, distante 30 cm. dallo specchietto vibrante, una linea luminosa lunga da 15 a 20 cm. per un milliampère di corrente alternata nel filo *AB*. In tali condizioni, e sostituendo alle spirali magnetizzanti dei magneti d'acciaio, come nella fig. 1, l'apparecchio viene a costituire un buon galvanometro da laboratorio per l'applicazione dei metodi di riduzione a zero col ponte di Wheatstone a corrente alternata.

Delle particolarità che lo caratterizzano e delle esperienze adatte ad illustrarle, le quali ho ancora in istudio, riferirò prossimamente in una nota speciale.

4. — Ora voglio piuttosto insistere sopra un caso, che ho già a lungo sperimentato, e cioè che il filo *AB* nel quale si promuovono vibrazioni torsionali di risonanza nel modo ora detto, sia di materiale magnetico, ferro, oppure nichel.

Senza rifare la storia delle ricerche che ho eseguito, cominciando per l'appunto da un filo di ferro, dirò subito che un

filo di materiale magnetico offre, di fronte a fili d'altri metalli, due particolarità essenziali. La prima, è la straordinaria sensibilità che esso presenta alla sua corrente alternata di risonanza: la vibrazione torsionale si produce ampiamente in un filo di ferro, di due o tre centesimi di mm., sotto l'azione di correnti certamente inferiori a 10^{-9} amp., come sarebbe la corrente di carica che prende un *circuito aperto* di pochi metri in linea retta, a 100 volt.

La seconda particolarità è questa, che in un filo di ferro sottile, o anche di nichel, la vibrazione torsionale si produce e si mantiene per la *sola* azione della sua corrente alternata di risonanza: il campo longitudinale costante esterno non dimostra avere più alcuna influenza. Un filo di ferro, abbastanza sottile, teso fra due punti fissi e percorso da una debolissima corrente della frequenza voluta, basta completamente a se stesso come il ferro di una dinamo, persistendo in vibrazione torsionale, con una ampiezza che rimane assolutamente costante finchè rimangano costanti la *frequenza* e la *tensione* della eccitazione alternata, così come la *capacità del circuito* di carica.

Questo comportamento del filo di ferro si chiarisce, richiamando tutte le particolarità che accompagnano il fenomeno della *magnetostrizione* nei materiali magnetici.

Ciascun materiale ha dapprima una legge di magnetostrizione sua speciale, che non sempre risponde al principio di Maxwell della contrazione tangenzialmente alle linee d'induzione e della espansione normalmente. Inoltre, le deformazioni che accompagnano la magnetizzazione sono sempre isteretiche, tanto quanto la magnetizzazione in funzione del campo o delle deformazioni elastiche.

In particolare, il ferro, come è noto, si allunga in campi deboli crescenti, fino ad un massimo; e reciprocamente, se si stira un filo di ferro in un campo costante moderato, la sua magnetizzazione cresce fino ad un massimo, il punto di Villari. La magnetizzazione per trazione nel ferro avviene dunque, in campi deboli, nel senso di aumentare l'allungamento che l'ha prodotta.

La deformazione torsionale di un filo di ferro, per l'azione di un campo longitudinale e di un campo circolare — che d'ordinario si chiama il *fenomeno Wiedemann* —, ha luogo dapprima

in senso inverso a quella che si verifica in un filo non magnetico e che corrisponde alla regola di Ampère, o pure in un filo di nichel, avviandosi rapidamente ad un massimo per magnetizzazioni deboli (Nagaoka). E reciprocamente, se si torce un filo di ferro magnetizzato o longitudinalmente oppure circolarmente, vi si sviluppa una magnetizzazione, rispettivamente o circolare o longitudinale, nel senso di favorire per magnetostrizione la torsione impressa.

Se quindi, col sussidio della risonanza, si eccitino magnetostrizioni torsionali periodiche più ampie di quelle che *staticamente* si produrrebbero (e che sono sempre assai piccole), il fenomeno magnetoelastico sussegue con continuità al fenomeno di magnetostrizione, per creare periodicamente nel filo di ferro condizioni magnetiche le quali tendono ad aumentare l'ampiezza della magnetostrizione originaria. E reciprocamente.

Il nascere spontaneo della vibrazione torsionale al passaggio della corrente di risonanza, si spiega col fatto che è praticamente impossibile, tanto più quanto più sottile sia il filo di ferro, di privarlo di ogni torsione statica allorchè lo si tende fra i due punti fissi, cosicchè questa torsione costante preesistente e permanente obbliga le linee di magnetizzazione della corrente che lo invade a piegarsi ad elica fin dall'inizio, con che si sviluppa tosto una coppia di torsione o detorsione nel filo, che fa l'ufficio di impulso iniziale per la vibrazione propria. Con un filo di ferro grosso 0,1 mm., l'influenza di una torsione statica impostagli, sulla spontaneità della vibrazione, apparisce chiarissima. Fili di 0,02 mm. sono difficili a detorcere, e anzi ben di rado si presentano di forma cilindrica, ma piuttosto posseggono generalmente degli appiattimenti elicoidali, provenienti dalla filiera a settori; ciò che è favorevole al funzionamento del mio apparecchio.

Finalmente, ho constatato che la sensibilità del filo di ferro per la sua corrente alternata di risonanza raggiunge un massimo con un determinato sforzo di trazione statica, nettamente assegnato dalla esperienza. A seconda della intensità del campo, difatti, la curva magnetoelastica per trazione si avvia al massimo di Villari con una rapidità e una estensione più o meno grandi, minori in campi debolissimi o fortissimi, ma notevoli

in campi moderati (*). Il mio filo di ferro lavora precisamente sul ramo iniziale salente della curva magnetoelastica di trazione: sotto una determinata trazione p, il valore di dJ/dp presenta un massimo, più esteso in certi campi che in altri più deboli o più forti: è la regione che favorisce di più l'ampiezza del fenomeno magnetoelastico periodico.

Fig. 3.

La fig. 3 presenta il disegno di una delle forme dell'apparecchio che utilizza i principii esposti.

Il filo di ferro ab, col suo specchietto s sul centro, è trattenuto in alto da una molla, in basso da un sistema di due piccole carrucole mobilissime e termina in un peso p, oppure fa capo ad una piccola molla a spirale a tensione graduabile. Due tenditori a vite A, B supportano i due attacchi, con una corsa di 2 cm. per regolare la lunghezza del filo. In un altro

(*) Ewing, *Magnetic induction, etc.*, § 126, fig. 107.

apparecchio più completo, v'hanno anche due bottoni di torsione in alto e in basso, dimanierachè si possa arbitrariamente e indipendentemente determinare la lunghezza, la tensione e la torsione del filo.

Il sistema dei due tenditori è fissato alle estremità di una tavoletta rettangolare isolante, disposta verticalmente, trattenuta da due perni laterali in bilico entro una cassa metallica *C* e da questa isolata, che si sostiene ad una colonna di vetro *V* terminante in un solido piedestallo sul pavimento. La cassa ha una finestra trasversale al centro per dar luce allo specchietto *s* (a 150 cm. dal suolo); una lente dà la immagine di una fessura illuminata sopra una scala translucida orizzontale, previa riflessione sullo specchietto, in una lineetta luminosa verticale.

Un elemento importante per il funzionamento dell'apparecchio, è una guaina metallica cilindrica αβ che circonda davvicino il filo di ferro, divisa in due metà sopra e sotto lo specchietto, elettricamente ben isolata, e registrabile con piccoli spostamenti longitudinali e laterali per la centratura rispetto al filo. Può essere costituita da un tubetto metallico di 1 o 2 mm. di luce, fessurato; oppure, per gli scopi che vedremo, da due spirali di filo di rame isolato di 0,4 mm. avvolte in un solo strato e in sensi inversi sopra due tubicini di vetro sottili, di 1 mm. di luce. I capi di queste due spirali magnetizzanti in serie α, β, vanno a due serrafili speciali; altri due serrafili si trovano sui tenditori *A*, *B* per il filo di ferro.

Nell'apparecchio più perfetto, la metà superiore rispecchia esattamente la metà inferiore per rispetto al centro *s*, in quanto a particolari di costruzione e in quanto a fenomeni magnetici ed elastici nel filo di ferro. Così, le spirali α, β sono l'una la immagine speculare dell'altra, e possono magnetizzare il filo con la stessa configurazione polare che gli conferisce una torsione centrale quando esso sia percorso da una corrente. Esse costituiscono inoltre condensatore insieme al filo, ne aumentano cioè sensibilmente la capacità in maniera da aumentare la corrente di carica che il filo assume allorchè l'uno dei suoi estremi (*A* oppure *B*) venga portato al potenziale alternato di risonanza.

La vibrazione torsionale del filo si produce difatti ampiamente quando *A* o *B* vengano influenzati a distanza di decimetri dal corpo di una persona che tocchi *un* conduttore al potenziale

di poche decine di volt alternati in risonanza; la vibrazione è ancora maggiore, se gli estremi delle spirali α, β sieno chiuse sopra una boccia di Leyda, o sieno in comunicazione col suolo. Se il filo di ferro e la guaina metallica α, β comunichino fra loro, sparisce ogni vibrazione, con qualunque potenziale di carica.

I fenomeni sono sostanzialmente gli stessi se, invece, si faccia comunicare il filo di ferro *AB* ad un condensatore o al suolo, e si influenzi con la tensione alternata uno dei capi della spirale di rame α, β. Ciò, per i caratteri di reciprocità che distinguono i processi magnetoelastici nel fenomeno Wiedemann: tanto la magnetizzazione circolare quanto la magnetizzazione longitudinale, soffrono, per la torsione, la sottrazione di una componente normale, che coopera ad aumentare la torsione stessa che l'ha prodotta.

Questo fatto, che i caratteri di reciprocità fra i fenomeni di magnetostrizione e i fenomeni magnetoelastici non sono in generale sottoposti (nel ferro e nel nichel) all'enunciato della legge di Lenz, costituisce la fortuna dell'apparecchio. Il principio della risonanza viene utilizzato per aprire un passaggio periodico dal processo di magnetostrizione al processo magnetoelastico, e viceversa.

Quando il filo è percorso dalla sua corrente sincrona, la risonanza amplifica tosto il primo impulso di magnetostrizione ben oltre il valore che corrisponderebbe alla torsione Wiedemann statica, e il filo di ferro finisce allora col compiere un grande ciclo magnetoelastico sulla componente longitudinale sottratta per la torsione alla magnetizzazione circolare originaria. L'una e l'altra hanno forma periodica e con gli stessi periodi, ma esiste fra loro una differenza di fase, la quale dipende, oltre che dalle isteresi elastica e magnetica, anche dal grado di risonanza esistente fra la vibrazione propria del filo e la vibrazione della corrente eccitatrice. La risonanza perfetta richiama difatti il ritardo di un quarto di periodo dello spostamento sulla forza periodica eccitatrice: a seconda dello smorzamento poi, questo ritardo cresce o diminuisce più o meno rapidamente intorno a questo valore critico, quando il periodo della forza diminuisca o cresca intorno a quello proprio del sistema. Con ismorzamento piccolissimo, il ritardo oscilla rapidamente da mezzo periodo a zero, nelle circostanze della risonanza.

Nel nostro caso, questo ritardo, imposto dalle leggi meccaniche, è strettamente collegato alla isteresi magnetoelastica con la quale la magnetizzazione longitudinale del filo di ferro segue quella circolare della corrente: ogni causa che influisca sul valore della isteresi, modificherà le condizioni della risonanza, ossia l'ampiezza della vibrazione torsionale.

O, più semplicemente: la coppia di torsione periodica essendo in ogni istante proporzionale al prodotto vettoriale delle due magnetizzazioni, circolare e longitudinale, ossia della forma $kJi\cos\epsilon$, ove ϵ sia il ritardo globale magnetoelastico di J su i, — ogni causa che faccia variare (bruscamente o pure periodicamente) l'isteresi longitudinale, modificherà il valore (istantaneo o pure medio) della coppia, ossia la conseguente ampiezza della vibrazione.

5. — In funzione della torsione θ, la magnetizzazione longitudinale J sottratta a quella circolare dovuta alla corrente i, percorre un ciclo, di forma *analoga* a quella di un ciclo J, H.

È noto, per le ricerche di varii sperimentatori (*), come si manifesti l'azione delle vibrazioni, sia meccaniche, sia elettriche, sopra un ciclo di magnetizzazione qualsiasi.

Il risultato di queste vibrazioni, che obbligano il campione magnetico a percorrere altrettanti cicli, sia magnetoelastici, sia magnetici, più rapidi, innestati sul ciclo principale, è sempre quello di condurre lo stato magnetico *verso* i punti di una certa *linea limite* di magnetizzazione anisteretica, L (fig. 4), passante per l'origine, e che taglia il ciclo dato $RER'FR$ in due punti α, β, l'uno sul ramo discendente, l'altro sul ramo ascendente, punti nei quali l'azione si annulla, e che cadono tanto più lontani dai punti di regresso RR' quanto meno ampio sia il ciclo stesso. Per il suo carattere di linea limite, essa non viene raggiunta che con l'azione di perturbazioni elastiche o magnetiche abbastanza intense; ma, in ogni caso, i punti del ciclo che si trovano a sinistra di questa linea L, verranno *abbassati* dall'azione delle perturbazioni cicliche, e cioè la magnetizzazione

(*) Cfr. PIOLA, " R. Acc. dei Lincei ", 1906. — MAURAIN, " Journ. d. Phys. ", 1907, 1908.

diminuirà (lungo $\alpha ER'\beta$); mentre i punti a destra di questa linea verranno *rialzati*, cioè la magnetizzazione aumenterà (lungo $\beta FR\alpha$). La linea ciclica *CMDM'C* indica con le sue ordinate il senso e la grandezza di tali variazioni, corrispondenti alla linea limite *L*, cioè a perturbazioni assai ampie. I due

Fig. 4.

massimi, l'uno positivo *M*, l'altro negativo *M'*, corrispondono rispettivamente alle regioni del ciclo dopo *F* e dopo *E*, regioni di massima sensibilità per le forti perturbazioni. A perturbazioni di mano in mano più deboli, corrispondono altre curve della sensibilità, di cui i massimi *m*, *m*, *m*, vanno gradatamente spostandosi verso il massimo di $dJ/d\theta$ (suscettività differenziale) sul ciclo dato.

Questo diagramma vale in particolare a chiarire il modo di comportarsi del mio filo vibrante di fronte a perturbazioni elettromagnetiche e quindi il suo impiego come *rivelatore d'onde hertziane* o *radiotelegrafiche*.

La spiralina di rame $\alpha\beta$ dell'apparecchio (fig. 5) essendo inserita nella parte centrale di un risonatore rettilineo di Hertz disposto verticalmente, ad es., oppure fra un'*antenna* e la *terra*, e il filo di ferro essendo posto in vibrazione, nel modo già detto, con l'influenza di una tensione alternata sincrona, su uno dei suoi estremi, l'apparecchio è adatto a funzionare come rivelatore d'onde elettriche.

Delle forti scintille fatte scoccare in vicinanza, da una Whimshurst a condensatori, caricando un eccitatore rettilineo verticale di qualche metro, non producono in generale che una breve commozione alle estremità della linea luminosa sullo schermo, ora in più ora in meno, a seconda del *caso* che presiede alle scariche, per riguardo alle variazioni magnetoelastiche perfettamente periodiche nel filo di ferro.

In generale, delle serie di perturbazioni che sorprendano lo stato magnetico del filo di ferro senza nessuna relazione di periodicità con la vibrazione stessa, fanno variare di poco e in modo non costante, saltuario, la lunghezza della linea luminosa.

Invece, la vibrazione rimane variata d'ampiezza in modo stazionario, se la spiralina venga eccitata da treni d'onde che si susseguano con la periodicità stessa del filo: a seconda della fase del suo ciclo di magnetizzazione che viene costantemente perturbata, l'ampiezza ne rimane aumentata oppure diminuita stazionariamente finchè durino le onde. Se, per es., a perturbazioni le quali cadano sui punti della regione $\beta FR\alpha$ (fig. 4) corrispondano aumenti dell'ampiezza, a perturbazioni che cadano sui punti della regione $\alpha ER'\beta$ corrisponderanno invece diminuzioni.

È quanto si osserva se, alimentando un oscillatore di Hertz con un Ruhmkorff a corrente alternata in maniera da eccitare un numero di scintille uguale alla frequenza delle vibrazioni nel filo, si inverta talora la corrente primaria, ovvero si capovolgano le connessioni all'oscillatore. Variando la fase del primario gradatamente, si constata poi nell'azione delle onde l'esistenza dei massimi M, M' e dei punti d'inversione A, B (fig. 4).

Se questo apparecchio troverà impiego in radiotelegrafia come ricevitore dei segnali *Morse*, a indicazioni visibili e quindi direttamente registrabili sopra una zona fotografica, possiederà l'importante proprietà di permettere, oltre all'ordinario accordo di alta frequenza, anche un secondo accordo di bassa frequenza fra le due stazioni, per rendere più precisa la *sintonia*.

Anzi, esperienze eseguite mi invitano a sperare che la vibrazione stessa del filo di ferro possa in pratica venire originata dalla sola energia comunicatagli dalle onde radiotelegrafiche, senza bisogno della sorgente di corrente alternata locale. Si immagini, difatti, che l'emissione della stazione trasmettente sia costituita da treni d'onde fortemente smorzate, in forma di semplici impulsi di forza elettrica, ma perciò solo anche passibili di convogliare una potenza ben più grande che nel caso di onde meno smorzate, a parità di circuito di scarica, — e soltanto sieno sottoposti alla condizione di partire con la frequenza stessa delle vibrazioni proprie del filo sensibile alla stazione ricettrice (da 30 a 60 periodi per sec.). Il filo risuonerà per tale emissione *discontinua*, ed entrerà in vibrazione persistente, dato il suo debole smorzamento, per tutta la durata dal segnale.

Spariscono così tutte le complicate disposizioni di apparecchi che presentemente sono in uso per istabilire le risonanze d'alta frequenza — sempre d'altra parte mediocremente raggiungibili con onde non persistenti, — e la *sintonia* rimane abbastanza bene assicurata dalle proprietà nettamente selettive del mio filo di ferro per la sua eccitazione di risonanza di bassa frequenza.

6. — In appoggio a tale previsione e a dimostrare il grado di sensibilità dell'apparecchio su cui essa si fonda, valga la esperienza seguente, che è di puro interesse scientifico.

È notissimo il concetto maxwelliano dell'onda emessa da una carica elettrica in movimento, e lo studio teorico che venne fatto, in particolare dal Prof. Righi (*), dell'equivalente ad un

---

(*) Righi, “ Mem. della R. Acc. d. Bologna „, serie V, t. IV, pag. 697, *L'ottica delle oscillazioni elettriche*, 1897, pag. 197. Nota A.

oscillatore hertziano che si può costituire con un doppio-punto elettrico vibrante oppure ruotante uniformemente intorno ad un asse per il suo centro di simmetria.

A mio sapere, credo che manchi ancora una verificazione *diretta* di tali concetti teorici. " È certo „ dice il Prof. Righi nella Memoria citata, a mo' di conclusione, " che a queste ve-
" rificazioni si opporranno grandi difficoltà sperimentali, non
" inferiori a quelle superate dal Rowland per effettuare la nota
" esperienza, destinata a mostrare l'azione magnetica prodotta
" dalla convezione elettrica „.

Fortuna vuole che la sensibilità del mio filo di ferro per la sua vibrazione elettrica di risonanza, sia più che sufficiente a porre in luce il fenomeno della *corrente variabile di convezione*, ossia dell'onda emessa pel moto d'una carica isolata, come anche dell'onda dovuta alla rotazione, con la velocità di risonanza del filo, di un dipòlo elettrico.

Fig. 5.

Anzitutto, l'apparecchio essendo come al solito eccitato in vibrazione dalla sua tensione alternata di risonanza, e la spiralina $\alpha\beta$ armata verticalmente di due antenne (fig. 5), — lo spostamento, *eseguito a mano*, di un corpo carico comunque, anche a qualche metro dall'apparecchio, risveglia generalmente una variazione brusca e tumultuosa nell' ampiezza della linea luminosa sullo schermo, che si risolve per lo più in una amplificazione, *in relazione diretta con la velocità dello spostamento.* L'ampiezza ritorna al valore normale, ogni volta che il corpo carico si fermi nello spazio, sia pure a distanza piccolissima dalle antenne. Si può avvicinare con moto assai lento, una carica anche relativamente forte, un disco d'elettroforo pronto a dare una scintilla di 2 cm. o il bottone di una bottiglia di Leyda in tensione, senza produrre nella linea luminosa che un lieve e persi-

stente allungamento, il quale sparisce con l'arrestarsi del moto: ogni più breve spostamento in qualunque direzione, eseguito con velocità più grande, può lanciare la linea luminosa fuori dei limiti della scala.

Si può interpretare la cosa, immaginando che la vibrazione del filo di ferro si lasci perturbare dai termini più consonanti di quella serie di Fourier che può sempre rappresentare l'onda solitaria *qualunque* dovuta al moto della carica. È allora facile prevedere che la rotazione uniforme di un dipòlo intorno al suo centro, o anche il moto periodico di una sola carica, con il periodo stesso che caratterizza il filo, potrà, non solo produrre una perturbazione più grande d'ogni altra sulla sua vibrazione preesistente, ma anche suscitare direttamente la vibrazione stessa.

Fig. 6.

L'apparecchio più adatto a questa esperienza, si riduce ad un risonatore rettilineo di Hertz (due fili di rame di 3 mm. e 120 cm.) esteso verticalmente e di cui la parte centrale è costituita dal filo di ferro sensibile (trattenuto fra i soliti tenditori che gli conferiscono una determinata lunghezza, una

determinata tensione e una certa torsione), circondato coassialmente da un tubetto metallico sottile, fessurato, aperto sul centro dinanzi allo specchietto vibrante, e facente corpo col sostegno, comunicando con una capacità C o anche al suolo (fig. 6). La vibrazione normale del filo può allora prodursi influenzando una delle antenne, o il tubetto isolato, con un conduttore C' alla tensione alternata di risonanza, ad un valore proporzionato alla distanza, che può essere di *metri*.

Poi si abbia un disco di ebanite di circa 40 cm., ben centrato sull'albero di un motorino elettrico regolabile (fino a ~ 3000 giri), il quale porti diametralmente applicati con paraffina due dischi di stagnola, che vengono caricati in $\pm$ con una bottiglia di Leyda.

Ebbene: se il filo dell'apparecchio trovasi già in vibrazione normale, l'influenza del dipòlo rotante a qualche decimetro dalle antenne si manifesta non appena la velocità si accosti a quella di sincronismo (nel mio caso, di circa 2400 giri, poichè il mio filo fa 42 vibrazioni a sec.), per via di battimenti nella linea luminosa (*), che vanno diventando sempre più lenti e più ampli, fino a far uscire, talora, la vibrazione dai limiti dello schermo.

Sorpassata la velocità giusta, i battimenti ricominciano adagio e vanno accelerandosi e impicciolendo.

Scaricando le armature di stagnola sul disco rotante, ogni effetto sparisce.

Se invece l'apparecchio sia perfettamente isolato da ogni eccitazione alternata e il filo in quiete, la rotazione del dipòlo carico fa aprire la vibrazione allorchè si approssimi la velocità di sincronismo, dapprima lentamente poi sempre più rapidamente, fino ad un massimo, dopo il quale la vibrazione torna a diminuire, indicando che la velocità di risonanza fu sorpassata.

Se, mentre la vibrazione è massima, si scarichi il dipòlo, essa cade a zero d'un tratto.

(*) Analoghi battimenti si possono produrre perturbando meccanicamente la vibrazione del filo con quella di un diapason di circa 84 periodi, il quale venga appoggiato con lo stelo sopra un punto qualunque del piedestallo che sostiene l'apparecchio.

Questa esperienza, che si può eseguire in condizioni assai più semplici e con risultati molto più evidenti di quella classica di Rowland, dimostra per lo meno l'esistenza della *corrente alternata di convezione*, che in costrutto poi, non è cosa diversa dall'onda di forza elettromagnetica emessa dal doppio-punto elettrico rotante.

Per concludere, mi piace qui di notare che la esperienza stessa si realizza così in condizioni molto prossime a quelle già preconizzate dal Prof. Righi a termine del suo libro: *L'ottica delle oscillazioni elettriche* (pag. 204 e 216). " Sarebbe difficile " l'ottenere effetti di risonanza elettrica con periodi vibratori " di tale grandezza. Ma si potrebbe ricorrere alla risonanza " acustica per mettere in evidenza le forze generate da un " oscillatore meccanico. Se infatti s'immagina, per esempio, un " corpo sonoro elettrizzato, che possa vibrare con periodo uguale " a quello dell'oscillatore, la forza elettrica oscillante che su di " esso agisce, potrà, anche se debolissima, eccitarne le oscilla- " zioni. È probabile che si riesca così a mettere in evidenza la " forza elettrica prodotta da un doppio-polo magnetico vibrante, " o similmente la forza magnetica prodotta da un doppio-punto " elettrico, vibrante esso pure „ (ovverosia " giranti con moto " uniforme „, pag. 216).

Torino, R. Politecnico, Maggio 1909.

Azione dell'acqua sulle nitrosoidrazine.

Nota del Dr. R. GIOVETTI.

Scaldando all'ebollizione con acqua la benzoilfenilnitrosoidrazina $C_6H_5CO.NH.N(NO)C_6H_5$, G. Ponzio (1) ottenne la benzoilfenilidrazina $C_6H_5CO.NH.NH.C_6H_5$, osservando contemporaneamente lo sviluppo di vapori nitrosi.

Ho creduto opportuno di esaminare se questa reazione fosse di carattere generale, e, dalle esperienze che ora riferisco e che ho esteso a un numero rilevante di acilarilnitrosoidrazine R.CO.NH.N(NO)Ar, risulta che in ogni caso, per azione dell'acqua a caldo, si forma sempre l'acilarilidrazina corrispondente R.CO.NH.NH.Ar, cioè il gruppo NO viene sempre sostituito da un atomo di idrogeno:

$$R.CO.NH.N(NO)Ar \xrightarrow{H_2O} R.CO.NH.NHAr$$

Formilfenilnitrosoidrazina $HCO.NH.N(NO)C_6H_5$. Riscaldando con acqua all'ebollizione questa nitrosoidrazina (che ho preparato col metodo di Wohl e Schiff (2)), continuando il riscaldamento fino a cessazione dello sviluppo di composti nitrosi, lasciando raffreddare la soluzione (filtrata a caldo per separare un po' di resina), ho ottenuto la formilfenilidrazina $HCO.NH.NHC_6H_5$, la quale, purificata per cristallizzazione dall'alcool, si presenta in fogliette splendenti, fusibili a 145°, conforme ai dati di Baidakowskif e Reformatski (3).

Gr. 0,1016 di sostanza fornirono cc. 18,4 di azoto (H_0 = 739,90 t = 16°) ossia gr. 0,021016.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_7H_8N_2O$
Azoto	20,68	20,58

(1) Gazz. Chim. *38*, I, 509 (1908).
(2) Berichte *35*, 1901.
(3) Chem. Centralbl. 1903, I, 829.

Formil-p-tolilnitrosoidrazina $HCO.NH.N(NO).C_6H_4CH_3$. Per ottenere questo composto ho dovuto preparare dapprima la *formil-p-tolilidrazina* $HCO.NH.NH.C_6H_4CH_3$, non ancora conosciuta. A tale scopo ho riscaldato due molecole di acido formico al 50 % con una molecola di p-tolilidrazina fino ad incipiente ebollizione, ed ho cristallizzato più volte dall'alcool la massa solida che si separa per raffreddamento. Si presenta in aghi bianchi splendenti, fusibili a 164°.

I. gr. 0,2258 di sostanza fornirono gr. 0,5322 di anidride carbonica e gr. 0,1436 di acqua.

II. gr. 0,1328 di sostanza fornirono cc. 22,2 di azoto ($H_0 = 737,85$ $t = 18°$), ossia gr. 0,025071.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_8H_{10}N_2O$
Carbonio	64,26	64,00
Idrogeno	6,74	6,66
Azoto	18,87	18,66

È molto solubile a caldo e poco a freddo nell'alcool, poco solubile nel cloroformio, insolubile nell'etere.

Per trasformarla nel corrispondente nitrosoderivato, l'ho sciolta in idrato sodico circa doppio normale, ho addizionato la quantità teorica di nitrito sodico, e, raffreddando in miscuglio frigorifero, ho aggiunto, in una sol volta ed agitando, un eccesso di acido solforico circa doppio normale. Così ottenuta, la formil-p-tolilnitrosoidrazina si presenta in fogliette quasi bianche, fusibili a 85°-86° con decomposizione.

Gr. 0,1069 di sostanza fornirono cc. 22,3 di azoto ($H_0 = 732,63$ $t = 20°$), ossia gr. 0,024789.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_8H_9N_3O_2$
Azoto	23,19	23,46

È molto solubile a freddo nel benzolo e nel cloroformio, discretamente nell'alcool e nell'etere, insolubile nell'acqua. Dà la reazione di Liebermann, e si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione giallo-rossastra. È solubile negli alcali, e dalla soluzione riprecipita inalterata per aggiunta di un acido.

Riscaldata all'ebollizione con acqua, sviluppa composti nitrosi e si trasforma in formil-p-tolilidrazina $HCO.NH.NH.C_6H_4CH_3$ la quale, cristallizzata dall'alcool, si fonde a 163°,5.

Gr. 0,0662 di sostanza fornirono cc. 11,2 di azoto ($H_0 = 732,61$ $t = 21°$), ossia gr. 0,012395.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_8H_{10}N_2O$
Azoto	18,72	18,66

p-Toluil-p-tolilnitrosoidrazina - $CH_3C_6H_4.CO.NH.N(NO)C_6H_4CH_3$. Anche in questo caso ho dovuto preparare dapprima l'idrazina corrispondente, cioè la p-toluil-p-tolildrazina $CH_3C_6H_4CO.NH.NH.C_6H_4CH_3$, finora non descritta.

Ottenni questo composto facendo agire, su due molecole di p-tolilidrazina sciolta in etere e raffreddata in ghiaccio, una molecola di cloruro di p-toluile, ed eliminando il cloridrato di p-tolilidrazina che contemporaneamente si forma, per trattamento con acqua. Cristallizzato dall'alcool il prodotto, si presenta in aghi bianchi fusibili a 177°.

I. gr. 0,1401 di sostanza fornirono gr. 0,3897 di anidride carbonica e gr. 0,0839 di acqua.

II. gr. 0,1854 di sostanza fornirono cc. 18,6 di azoto ($H_0 = 721,94$ $t = 9°$), ossia gr. 0,021336.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{15}H_{16}N_2O$
Carbonio	75,80	75,00
Idrogeno	6,63	6,66
Azoto	11,50	11,66

La p-toluil-p-tolilidrazina è insolubile nell'acqua, poco solubile a freddo e molto a caldo nell' alcool, insolubile nell'etere. Si scioglie facilmente in cloroformio ed in acido acetico glaciale.

Raffreddando in ghiaccio la sua soluzione in alcool assoluto (con che parte della idrazina si separa), aggiungendo acido cloridrico concentrato, e trattando quindi colla quantità teorica di nitrico sodico in soluzione acquosa concentrata, essa si trasforma

nella p-toluil-p-tolilnitrosoidrazina $CH_3C_6H_4CO.NH.N(NO)C_6H_4CH_3$ la quale rimane disciolta, e si ricava precipitandola con acqua, dopo filtrazione. Purificata per successive soluzioni in idrato sodico e riprecipitazioni con acido cloridrico diluito, si presenta in laminette leggermente giallognole, fusibili a 110° con decomposizione.

Gr. 0,1026 di sostanza fornirono cc. 14,3 di azoto ($H_0 = 733,10$ $t = 16^0$) ossia gr. 0,016246.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{15}H_{15}N_3O_2$
Azoto	15,34	15,61

È solubile a freddo nell'alcool, nel benzolo, nel cloroformio; un po' solubile nell'etere; dà la reazione di Liebermann; si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione verde. Si scioglie negli alcali e riprecipita inalterata cogli acidi.

È solubile a freddo nell'acqua; riscaldata con questa all'ebollizione, svolge composti nitrosi e si trasforma in p-touil-p-tolilidrazina $CH_3C_6H_4CO.NH.NH.C_6H_4CH_3$ che, purificata per cristallizzazione dall'alcool, fonde a 177°-78°.

Gr. 0,1216 di sostanza fornirono cc. 13 di azoto ($H_0 = 732,74$ $t = 19^o$) ossia gr. 0,014516.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{15}H_{16}N_2O$
Azoto	11,93	11,66

Anisoil - p - tolilnitrosoidrazina $CH_3O.C_6H_4CO.NH.N(NO)C_6H_4CH_3$. Analogamente al caso ora riferito, dovetti preparare prima l'anisoil-p-tolilidrazina $CH_3O.C_6H_4CO.NH.NH.C_6H_4CH_3$, facendo agire una molecola di cloruro di anisoile su due di p-tolilidrazina sciolta in etere e raffreddata. Purificata per cristallizzazione dall'alcool, si presenta in aghi bianchi fusibili a 158°.

Gr. 0,1386 di sostanza fornirono cc. 13,2 di azoto ($H_0 = 721,19$ $t = 7^o$), ossia gr. 0,015246.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{15}H_{16}N_2O_2$
Azoto	10,99	10,93

È insolubile in acqua, solubile in alcool molto più a caldo che a freddo, insolubile in etere; si scioglie facilmente in cloroformio ed in acido acetico glaciale.

Per ottenerne il nitrosoderivato ho sciolto l'idrazina (una molecola) nella minor quantità possibile di acido acetico glaciale a caldo, ho raffreddato rapidamente a 0° ed ho aggiunto, goccia a goccia, la quantità teorica di nitrito di amile; poi un po' di acqua ghiacciata, quindi ho filtrato, sciolto il precipitato in idrato sodico al 5 $^0/_0$, ed ho assoggettata la soluzione all'azione di una corrente di anidride carbonica.

La *anisoil-p-tolilnitrosoidrazina* $CH_3O.C_6H_4CO.NH.N(NO)C_6H_4CH_3$ così ottenuta si presenta in laminette giallastre, fusibili a 107°-109° con decomposizione.

Gr. 0,1229 di sostanza fornirono cc. 15,7 di azoto ($H_0 = 733,50$ $t = 12°$) ossia gr. 0,018063.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{15}H_{15}N_3O_3$
Azoto	14,69	14,73

È solubile a freddo nell'alcool, nel cloroformio, nell'etere e nel benzolo. Dà la reazione di Liebermann; si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione azzurra. Si scioglie negli alcali e riprecipita inalterata per aggiunta di un acido. Riscaldata con acqua (dove a freddo è insolubile) sviluppa vapori nitrosi e si trasforma in anisoil-p-tolilidrazina $CH_3O.C_6H_4CO.NH.NH.C_6H_4CH_3$, che cristallizzata dall'alcool si fonde a 158°.

Gr. 0,1322 di sostanza fornirono cc. 13,5 di azoto ($H_0 = 725,88$ $t = 18°$) ossia gr. 0,014987.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{15}H_{16}N_2O_2$
Azoto	11,25	10,93

Formil-p-bromofenilnitrosoidrazina $HCO.HN.N(NO)C_6H_4Br$.

La formil-p-bromofenilidrazina $HCO.NH.NH.C_6H_4Br$ era già stata ottenuta da Ruhemann (1), da p-bromofenilidrazina, clo-

(1) Journ. Chem. Soc. *57*, 56.

roformio e potassa alcoolica. Io l'ho più comodamente preparata portando all'ebollizione una miscela di p-bromofenilidrazina con un eccesso di acido formico al 5 $^0/_0$, e cristallizzando il prodotto solido così ottenuto, dall'alcool. Si presenta allora in aghi bianchi, fusibili a 198° conforme ai dati del suddetto autore.

Il suo nitrosoderivato l'ho ottenuto sciogliendo l'idrazina in idrato sodico circa doppio normale, raffreddando in miscuglio frigorifero, aggiungendo la quantità teorica di nitrito sodico, indi un eccesso di acido solforico circa doppio normale. Purificata per soluzione in idrato sodico e riprecipitazione con acido cloridrico diluito, o meglio sciogliendola in etere e precipitandola con eteri di petrolio, si presenta in laminette giallastre, fusibili a 84°-85° con decomposizione.

Gr. 0,1307 di sostanza fornirono cc. 20.2 di azoto ($H_0 = 734,16$ $t = 24°$) ossia gr. 0,022106.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_7H_6N_3O_2Br$
Azoto	16,91	17,21

È solubile a freddo nell'alcool, nell'etere, nel cloroformio; meno solubile nel benzolo. Dà la reazione di Liebermann; si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione rossa. Si scioglie negli alcali, e dalla soluzione riprecipita inalterata per aggiunta di un acido.

Riscaldata con acqua svolge composti nitrosi e si trasforma in formil-p-bromofenilidrazina $HCO.NH.NH.C_6H_4Br$, la quale, cristallizzata dall'alcool e dal benzolo, si presenta in aghetti bianchi, fusibili a 194°.

Grammi 0,0785 di sostanza fornirono cc. 9,2 di azoto ($H_0 = 735,26$ $t = 23°$) ossia gr. 0,010128.

Cioè su cento parti:

trovato	calcolato per $C_7H_7N_2OBr$
12,90	13,02

p-Toluil-p-bromofenilnitrosoidrazina $CH_3C_6H_4CO.NH.N(NO)C_6H_4Br$. Preparata come la p-toluil-p-tolilnitrosoidrazina, si presenta in lamine giallognole, fusibili a 99°-102° con decomposizione.

Gr. 0,1997 di sostanza fornirono cc. 21,8 di azoto ($H_0 = 732,60$ $t = 20,5$) ossia gr. 0,024233.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{14}H_{12}N_3O_2Br$
Azoto	12,13	12,57

È solubile nell'alcool, abbastanza solubile nell'etere, poco a freddo e molto a caldo in benzolo e cloroformio. Dà la reazione di Liebermann; con acido solforico concentrato dà colorazione violetta. Si scioglie negli alcali, e riprecipita dalle soluzioni per aggiunta di un acido.

È insolubile a freddo nell'acqua; fatta bollire con questa, svolge composti nitrosi e si trasforma in p-toluil-p-bromofenilidrazina $CH_3C_6H_4CO.NH.NH.C_6H_4Br$, fusibile a 202° con decomposizione, conforme ai dati di Ponzio e Charrier (1).

gr. 01929 di sostanza fornirono cc. 16,5 di azoto ($H_0 = 730,60$ $t = 20°$) ossia gr. 0,018288.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{14}H_{13}N_2OBr$
Azoto	9,48	9,18

Anisoil-p-bromofenilnitrosoidrazina $CH_3O.C_6H_4CO.NH.N(NO)C_6H_4Br$. Preparata in modo analogo all'anisoil-p-tolilnitrosoidrazina, cioè da due molecole di p-bromofenilidrazina ed una di cloruro di anisoile, si presenta in laminette giallo-chiare, fusibili a 100°-101° con decomposizione.

Grammi 0,1888 di sostanza fornirono cc. 11,8 di azoto ($H_0 = 732,86$ $t = 18°$) ossia gr. 0,013235.

(1) Gazz. Chim. *39*, 1, 1909.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{14}H_{12}N_3O_3Br$
Azoto	12,16	12,00

La anisoil-p-bromofenilnitrosoidrazina è solubile nell'alcool e dalla soluzione riprecipita con acqua; si scioglie, poco a freddo e molto a caldo, in etere, benzolo, cloroformio. Dà la reazione di Liebermann; con acido solforico concentrato dà colorazione giallo-rossastra. Ha carattere acido; si scioglie negli alcali e riprecipita dalle soluzioni per aggiunta di un acido.

Per azione dell'acqua bollente svolge composti nitrosi e si trasforma in anisoil-p-bromofenilidrazina $CH_3O.C_6H_4CO.NH.NH.C_6H_4Br$, fusibile a 183° con decomposizione, conforme ai dati di Ponzio e Charrier (1).

Gr. 0,1163 di sostanza fornirono cc. 9,2 di azoto ($H_0 = 732,63$ $t = 20°$) ossia gr. 0,102270.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{14}H_{13}N_2O_2Br$
Azoto	8,79	8,72

Torino. Istituto Chimico della R. Università.
Giugno 1908.

(1) Gazz. Chim. *39*, I, 1909.

Corpi rotondi e baricentro nella metrica projettiva.

Nota di G. SFORZA.

Questa Nota fa seguito alle mie *Ricerche di estensionimetria negli spazi metrico-proiettivi* (" R. Acc. di Modena ", 1906-07) che citerò spesso nel seguito semplicemente con *Ricerche.*

§ 1°.

Calcolo intrinseco del tubo rettilineo infinitamente sottile una o più volte imprimitivo.

Indicando con $d^{n-1}\cdot p_n$ l'ampiezza estensiva di un tubo rettilineo infinitamente sottile qualunque, i cui estremi sono i punti y e z, si è trovato in *Ricerche,* pag. 10, che si ha:

$$(1) \qquad d^{n-1}\cdot p_n = \int_0^\infty \frac{A_0 + A_1\nu + \ldots + A_{n-1}\nu^{n-1}}{\left\{ \Omega_{yy} + 2\nu\Omega_{yz} + \nu^2\Omega_{zz} \right\}^{\frac{n+1}{2}}}\, d\nu,$$

ove le A sono definite dalla seguente identità relativa a ν:

$$(2) \qquad \begin{aligned} &A_0 + A_1\nu + \ldots + A_{n-1}\nu^{n-1} = \\ &= (y, z, d_1y + \nu d_1z, \ldots, d_{n-1}y + \nu d_{n-1}z)\sqrt{\Delta}. \end{aligned}$$

Chiamando poi r la *lunghezza del tubo* e introducendo la funzione vettoriale di $\cdot r$ dei gradi interi non negativi α, β:

$$(3) \qquad V_{\cdot r}^{(\alpha,\beta)} = \int_0^{\cdot r} \text{sen}^\alpha\cdot(r - \rho)\,\text{sen}^\beta\cdot\rho\, d\cdot\rho,$$

si è potuto dare a (1) una forma equivalente alla seguente:

$$(4) \qquad d^{n-1}\cdot p_n = c_{0,n-1}\,B_{0,n-1} + c_{1,n-1}\,B_{1,n-1} + \ldots + c_{n-1,0}\,B_{n-1,0},$$

ove

$$(5) \qquad c_{\alpha,\beta} = \frac{V_{\cdot r}^{(\alpha,\beta)}}{\text{sen}^{\alpha+\beta+1}\cdot r},$$

e

$$(6) \qquad B_{\alpha,\beta} = \frac{A_\beta}{\Omega_{yy}^{\frac{\alpha+1}{2}}\;\Omega_{zz}^{\frac{\beta+1}{2}}}.$$

Si ha poi (*Ricerche*, pag. 18)

(7) $$V_{\cdot r}^{(\alpha,\beta)} = V_{\cdot r}^{(\beta,\alpha)}, \qquad c_{\alpha,\beta} = c_{\beta,\alpha},$$

e inoltre

(8) $$\lim_{K=0} c_{\alpha,\beta} = \frac{\alpha!\,\beta!}{(\alpha+\beta+1)!},$$

sicchè nell'ip. euclidea il *rapporto vettoriale* $c_{\alpha,\beta}$ è indipendente da r.

Nell'ipotesi generale che il tubo sia γ *volte imprimitivo dei gradi* α, β $(\alpha+\beta+\gamma=n-1)$ la (4) si riduce $(\gamma+1)$-nomia e cioè diviene:

(9) $$d^{n-1}\cdot p_n = c_{\alpha+\gamma,\beta} B_{\alpha+\gamma,\beta} + c_{\alpha+\gamma-1,\beta+1} B_{\alpha+\gamma-1,\beta+1} + \dots \\ \dots + c_{\alpha,\beta+\gamma} B_{\alpha,\beta+\gamma}.$$

Ed invero indichiamo con

con $\varphi_1' \dots \varphi'_\alpha$ le α variabili φ comparenti soltanto nelle y,
" $\varphi_1'' \dots \varphi''_\beta$ le β " " " " " z,
" $\varphi_1''' \dots \varphi'''_\gamma$ le γ " " comuni alle y e alle z.

Allora il secondo membro di (2) diventa:

(10) $$\pm \nu^\beta (y, d_1'y, \dots d'_\alpha y, z, d_1''z \dots d_\beta''z, d_1'''y + \nu d_1'''z, \dots \\ d_\gamma'''y + \nu d_\gamma'''z) \sqrt{\Delta},$$

vale a dire non solo si riduce al grado $\beta+\gamma$ in ν, ma è anche divisibile per ν^β, sicchè si ha da (2):

$$A_0 = 0,\ A_1 = 0, \dots, A_{\beta-1} = 0,$$
$$A_{n-\alpha} = 0,\ A_{n-\alpha+1} = 0, \dots, A_{n-1} = 0,$$

e la (9) per le (4) e (6) risulta manifesta,

Per procedere al calcolo intrinseco delle B comparenti in (9) (*) introduciamo intanto alcune notazioni abbreviatrici. Indichiamo perciò con t una qualunque delle $(\alpha+\beta+2)$ serie di $n+1$ variabili

(11) $$y,\ d_1'y, \dots d_\alpha'y,\ z,\ d_1''z, \dots d_\beta''z,$$

(*) Il calcolo intrinseco di (9) per $\gamma=0$ e $\gamma=1$ è già stato fatto in *Ricerche*. Qui si farà il detto calcolo per $\gamma>0$ in generale.

e con w una qualunque delle γ serie di $n+1$ variabili

$$d_1'''y + \nu d_1'''z, \ldots d_\gamma'''y + \nu d_\gamma'''z. \tag{12}$$

Allora la (10) si potrà scrivere *brevemente* $\nu^\beta(t, w)\sqrt{\Delta}$; e ponendo

$$\frac{d^q(t, w)}{d\nu^q} = (t, w)^{(q)} \qquad (q = 1, 2, \ldots, \gamma), \tag{13}$$

collo sviluppo di Taylor otterremo da (2) l'identità

$$\begin{aligned} A_\beta + A_{\beta+1}\nu + \ldots A_{\beta+\gamma}\nu^\gamma = \\ = (t, w)_0 + (t, w)_0'\nu + \frac{1}{2}(t, w)_0''\nu^2 + \ldots + \frac{1}{\gamma!}(t, w)_0^{(\gamma)}\nu^\gamma. \end{aligned} \tag{14}$$

Sicchè, scrivendo la (9) nella forma:

$$d^{n-1} \cdot p_n = \sum_{p+q=\gamma} c_{\alpha+p,\,\beta+q} B_{\alpha+p,\,\beta+q}, \tag{15}$$

avremo per le (6) e (14):

$$B_{\alpha+p,\,\beta+q} = \frac{1}{q!} \frac{(t, w)_0^{(q)}\sqrt{\Delta}}{\Omega_{yy}^{\frac{\alpha+p+1}{2}} \Omega_{zz}^{\frac{\beta+q+1}{2}}}. \tag{16}$$

Si pone ora in evidenza *l'ampiezza* $d^{\alpha+\beta} \cdot g_{\alpha+\beta+1}$ *del tubo primitivo dei gradi* α, β *generatore del dato* osservando che (*Ricerche*, pag. 17) si ha:

$$d^{\alpha+\beta} \cdot g_{\alpha+\beta+1} = \frac{D^{\frac{1}{2}}}{\Omega_{yy}^{\frac{\alpha+1}{2}} \Omega_{zz}^{\frac{\beta+1}{2}}}, \tag{17}$$

essendo D il determinante delle Ω_{tt} cioè

$$D = |\Omega_{tt}|. \tag{18}$$

Ponendo infatti

$$E_{p,q} = \frac{1}{q!} \frac{(t, w)_0^{(q)}\sqrt{\Delta}}{D^{\frac{1}{2}} \Omega_{yy}^{\frac{p}{2}} \Omega_{zz}^{\frac{q}{2}}}, \tag{19}$$

a cagione di (16) la (15) si scrive:

$$d^{n-1} \cdot p_n = d^{\alpha+\beta} \cdot g_{\alpha+\beta+1} \sum_{p+q=\gamma} \frac{c_{\alpha+p,\,\beta+q}}{c_{\alpha,\beta}} E_{p,q}. \tag{20}$$

Sviluppo di Ep,q. — Indichiamo con $\left[{p \atop \gamma}\right]_h$ quella combinazione dei γ indici $1, 2 \ldots \gamma$ che è la h^a fra quelle di classe p nel loro ordine di successione secondo la legge di formazion naturale che leggesi, per es., in Baltzer (*Arit. gen.*, § 25). Se $\left[{q \atop \gamma}\right]_k$ è la combinazione *complementare* di $\left[{p \atop \gamma}\right]_h$ sarà allora:

$$p + q = \gamma\,, \tag{21}$$

$$h + k = \frac{\gamma!}{p!\,q!} + 1 = \binom{\gamma}{p} + 1\,, \tag{22}$$

come si verifica facilmente.

Infine indichiamo con $\left[{p\,,\,q \atop h\,,\,k}\right]$ il sistema di due combinazioni complementari $\left[{p \atop \gamma}\right]_h$, $\left[{q \atop \gamma}\right]_k$ cosicchè p, q, h, k siano legati dalle (21) e (22).

Ciò posto la notazione $(t, d'''y, d'''z)_{\left[{p\ q \atop h\ k}\right]}$ significhi quel determinante d'ordine $n+1$ le cui prime $\alpha + \beta + 2$ colonne sono occupate dalle t e le seguenti γ sono occupate dalle d_i''' applicate alle y o alle z secondochè i appartiene alla $\left[{p \atop \gamma}\right]_h$ o alla complementare $\left[{q \atop \gamma}\right]_k$. È chiaro dalla partizione del determinante (t, w) che deve aversi:

$$\frac{1}{q!}\,(t, w)_0^{(q)} = \sum_{h+l=\binom{\gamma}{p}+1} (t, d'''y, d'''z)_{\left[{p,\ q \atop h,\ k}\right]}\,. \tag{23}$$

Introduciamo poi le γ serie di variabili $u^1, u^2, \ldots u^\gamma$ definite dalle:

$$u_s^i = d_i'''y_s + \sum_{j=1,\ldots(\alpha+\beta+2)} \lambda^{i,j}\, t_s^j \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \gamma \\ s = 0, 1 \ldots n \end{pmatrix} \tag{24}$$

(ove si è posto un indice superiore j alle t per significare che t^j corrisponde alla j^esima^ delle serie (11)) essendo le $\lambda^{i,j}$ per ogni valore di i determinate dalle $\alpha + \beta + 2$ equazioni lineari non omogenee:

$$\Omega_{u^i t^j} = 0 \qquad \begin{pmatrix} j = 1, \ldots (\alpha + \beta + 2) \\ i = 1 \ldots \gamma \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Similmente si introducano le γ serie di variabili $v', \dots v^\gamma$ definite dalle:

(26) $$v_s^i = d_i'''z_s + \sum_{j=1..(\alpha+\beta+2)} \mu^{i,j} t_s^i \qquad \binom{i = 1, 2 \dots \gamma}{s = 0, 1 \dots n},$$

colle condizioni:

(27) $$\Omega_{v^i t^j} = 0 \qquad \binom{j = 1, \dots (\alpha + \beta + 2)}{i = 1 \dots \gamma}.$$

Allora noi potremo intanto indipendentemente dalle condizioni (25), (27) dare alla (23) la forma:

(28) $$\frac{1}{q!}(t, w)_0^{(q)} = \sum_{h+k=\binom{\gamma}{q}+1} (t, u, v)_{\left[\begin{smallmatrix} p, & q \\ h, & k \end{smallmatrix}\right]},$$

ove delle ultime γ colonne del determinante (t, u, v) la i[esima] sarà occupata da u^i o da v^i secondochè i appartiene alla $\left[\begin{matrix} p \\ \gamma \end{matrix}\right]_h$ o alla $\left[\begin{matrix} q \\ \gamma \end{matrix}\right]_h$.

Ora con una abbreviatura intuitiva noi poi possiamo porre:

$$(t, u, v)^2_{\left[\begin{smallmatrix} p, & q \\ h, & k \end{smallmatrix}\right]} \times \Delta = \begin{vmatrix} \Omega_{tt} & \Omega_{tu} & \Omega_{tv} \\ \Omega_{ut} & \Omega_{uu} & \Omega_{uv} \\ \Omega_{vt} & \Omega_{vu} & \Omega_{vv} \end{vmatrix}_{\left[\begin{smallmatrix} p, & q \\ h, & k \end{smallmatrix}\right]};$$

ma il determinante di destra per le (25), (27) e (18) si riduce al prodotto:

$$D \times \begin{vmatrix} \Omega_{uu} & \Omega_{uv} \\ \Omega_{vu} & \Omega_{vv} \end{vmatrix}_{\left[\begin{smallmatrix} p, & q \\ h, & k \end{smallmatrix}\right]},$$

dunque la (28) si può scrivere:

$$\frac{1}{q!}(t, w)_0^{(q)} \sqrt{\Delta} = D^{\frac{1}{2}} \sum_{h+k=\binom{\gamma}{p}+1} \begin{vmatrix} \Omega_{uu} & \Omega_{uv} \\ \Omega_{vu} & \Omega_{vv} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}_{\left[\begin{smallmatrix} p, & q \\ h, & k \end{smallmatrix}\right]}.$$

Per questa la (19) ci dà il seguente sviluppo di Ep, q:

(29) $$E_{p,q} = \sum_{h+k=\binom{\gamma}{p}+1} \Omega_{yy}^{-\frac{p}{2}} \Omega_{zz}^{-\frac{q}{2}} \begin{vmatrix} \Omega_{uu} & \Omega_{uv} \\ \Omega_{vu} & \Omega_{vv} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}_{\left[\begin{smallmatrix} p, & q \\ h, & k \end{smallmatrix}\right]}.$$

Forma intrinseca di $E_{p,q}$. Poniamo:

$$
(30)\quad\begin{cases}
d^p\cdot\eta_{\left[{p\atop\gamma}\right]_h}=\dfrac{\begin{vmatrix}\Omega_{yy} & \Omega_{yu}\\ \Omega_{uy} & \Omega_{uu}\end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}_{\left[{p\atop\gamma}\right]_h}}{\Omega_{yy}^{\frac{p+1}{2}}},\quad d^q\cdot\zeta_{\left[{q\atop\gamma}\right]_k}=\dfrac{\begin{vmatrix}\Omega_{zz} & \Omega_{zv}\\ \Omega_{vz} & \Omega_{vv}\end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}_{\left[{q\atop\gamma}\right]_k}}{\Omega_{zz}^{\frac{q+1}{2}}}\\[3ex]
\cdot M_{\left[{p,\,q\atop h,\,k}\right]}=\dfrac{\begin{vmatrix}\Omega_{yy} & \Omega_{yz} & \Omega_{yu} & \Omega_{yv}\\ \Omega_{zy} & \Omega_{zz} & \Omega_{zu} & \Omega_{zv}\\ \Omega_{uy} & \Omega_{uz} & \Omega_{uu} & \Omega_{uv}\\ \Omega_{vy} & \Omega_{vz} & \Omega_{vu} & \Omega_{vv}\end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}_{\left[{p,\,q\atop h,\,k}\right]}}{\begin{vmatrix}\Omega_{yy} & \Omega_{yu}\\ \Omega_{uy} & \Omega_{uu}\end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}_{\left[{p\atop\gamma}\right]_h}\times\begin{vmatrix}\Omega_{zz} & \Omega_{zv}\\ \Omega_{vz} & \Omega_{vv}\end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}_{\left[{q\atop\gamma}\right]_k}}.
\end{cases}
$$

Ora osservando che per le (25) e (27) si ha $\Omega_{yu}=0$, $\Omega_{yv}=0$, $\Omega_{zu}=0$, $\Omega_{zv}=0$ e che inoltre si ha:

$$
\operatorname{sen}\cdot r=\frac{(\Omega_{yy}\,\Omega_{zz}-\Omega^2_{yz})^{\frac{1}{2}}}{\Omega_{yy}^{\frac{1}{2}}\;\Omega_{zz}^{\frac{1}{2}}},
$$

si vede subito che la (29) si riduce alla forma:

$$
(31)\qquad E_{p,q}=\sum_{h+k=\binom{\gamma}{p}+1}\frac{\cdot M_{\left[{p,\,q\atop h,\,h}\right]_h}}{\operatorname{sen}\cdot r}\times d^p\cdot\eta_{\left[{p\atop\gamma}\right]_h}\times d^q\cdot\zeta_{\left[{q\atop\gamma}\right]_k}.
$$

Dimostrazione del carattere intrinseco della (31). — Sia $G_{\alpha+\beta+1}$ quell'$S_{\alpha+\beta+1}$ mobile che contiene il tubo primitivo generatore, e consideriamo $G_{\alpha+\beta+1}$ nella sua posizione iniziale cioè definito dagli $\alpha+\beta+2$ punti t dati dalle (11). Sia $H_{\gamma-1}$ quell'$S_{\gamma-1}$ che è polare assoluto di $G_{\alpha+\beta+1}$; poichè (*Ricerche*, p. 13) si ha $(\alpha+\beta+2)+\gamma=n+1$, tale $H_{\gamma-1}$ non avrà punti comuni con $G_{\alpha+\beta+1}$. Ora le (25) provano che i γ punti u stanno in $H_{\gamma-1}$, perciò le γ rette $(yu')\dots(yu^\gamma)$ sono perpendicolari in y a $G_{\alpha+\beta+1}$ e giaciono in quell'unico S_γ (che diremo U_γ) che è perpendicolare in y a $G_{\alpha+\beta+1}$. Siccome U_γ riesce perpendicolare ad ogni $S_{\alpha+\beta+2}$ che passi per $G_{\alpha+\beta+1}$, così la retta (yu^i) è per la (24)

la projezione ortogonale della $(y\, d_i'''y)$ sopra U_γ; dico anzi che *precisamente il punto* $\mathrm{y} + \mathrm{u}^i$ *della* (yu^i) *è la projezione ortogonale del punto* $\mathrm{y} + \mathrm{d}_i'''\mathrm{y}$ *di* $(\mathrm{y}\, \mathrm{d}_i'''\mathrm{y})$. Siano infatti a_i ed $\bar{a}_i$ i segmenti infinitesimi $(y, y + u^i)$, $(y, y + d_i'''y)$ risp.; sarà allora:

$$(32) \qquad \cdot a_i = \frac{\sqrt{\Omega_{yy}\Omega_{u^i u^i} - \Omega^2_{yu^i}}}{\Omega_{yy}}, \qquad \cdot \bar{a}_i = \frac{\sqrt{\Omega_{yy}\Omega_{d_i'''y d_i'''y} - \Omega^2_{y d_i'''y}}}{\Omega_{yy}}.$$

Detto poi χ l'angolo fra tali segmenti, per una nota formula avremo:

$$\cos\chi = \frac{\Omega_{yy}\Omega_{u^i d_i'''y} - \Omega_{yu^i}\Omega_{y d_i'''y}}{\sqrt{(\Omega_{yy}\Omega_{u^i u^i} - \Omega^2_{yu^i})(\Omega_{yy}\Omega_{d_i'''y d_i'''y} - \Omega^2_{y d_i'''y})}},$$

la quale, poichè da (25) e (24) si ricava

$$\Omega_{yu^i} = 0, \quad \Omega_{u^i d_i'''y} = \Omega_{u^i u^i},$$

si riduce per le (32) alla

$$\cdot a_i = \cdot \bar{a}_i \cos\chi;$$

questa poi prova il nostro asserto.

Si può dire dunque che a_i è l'ampiezza *dello spostamento in senso normale a* $G_{\alpha+\beta+1}$ *subìto da* y *nel portarsi in* $\mathrm{y} + \mathrm{d}_i'''\mathrm{y}$.

Indicando poi con $\left\{ a, \begin{bmatrix} p \\ \gamma \end{bmatrix}_h \right\}$ il parallelepipedo a p dimensioni che ha per spigoli uscenti da y quei p spostamenti normali a_i pei quali i appartiene alla combinazione $\begin{bmatrix} p \\ \gamma \end{bmatrix}_h$ e chiamandolo h^o *spostamento normale composto d'ordine* p *in* y, è subito manifesto per la prima delle (30) (*Ricerche,* pag. 5) che $d^p \cdot \eta_{\left[\begin{smallmatrix} p \\ \gamma \end{smallmatrix}\right]_h}$ è l'*ampiezza* estensiva di $\left\{ a, \begin{bmatrix} p \\ \gamma \end{bmatrix}_h \right\}$.

Simile significato avrà $\left\{ b, \begin{bmatrix} q \\ \gamma \end{bmatrix}_k \right\}$ in z e nelle ipotesi (21) e (22) sarà lo spostamento *complementare* del precedente; la sua ampiezza estensiva è per la (30) data da $d^q \cdot \zeta_{\left[\begin{smallmatrix} q \\ \gamma \end{smallmatrix}\right]_k}$.

I due spostamenti normali composti complementari predetti sono poi contenuti risp. in due spazi lineari S_p, S_q (giacenti negli S_γ (U_γ e V_γ) normali in y e z a $G_{\alpha+\beta+1}$), il cui *momento dovidiano* (cioè prodotto dei seni delle loro distanze) è dato per la (30) da $\cdot M_{\left[\begin{smallmatrix} p & q \\ h & k \end{smallmatrix}\right]}$. Se poi osserviamo che fra tali distanze vi è pure r, rispetto a cui le altre distanze debbono riguardarsi come an-

golari come quelle che sono misurate da segmenti posti in $H_{\gamma-1}$ che è polare assoluto di $G_{\alpha+\beta+1}$ contenente r, si vede che è lecito chiamare *momento angolare* di $\left\{a, \begin{bmatrix} p \\ \gamma \end{bmatrix}_h \right\}$ e $\left\{b, \begin{bmatrix} q \\ \gamma \end{bmatrix}_k \right\}$ la quantità $\cdot M_{\begin{bmatrix} p & q \\ h & k \end{bmatrix}} \times \frac{1}{\text{sen}\, \cdot r}$ (*).

Possiamo dunque presentare la (31) nella seguente veste geometrica: $E_{p,q}$ *è la somma dei* $\frac{\gamma!}{p!q!}$ *termini, ognuno dei quali è il prodotto delle due ampiezze estensive e momento angolare corrispondenti a una coppia di spostamenti normali composti degli estremi* y, z *del tubo generatore, complementari fra loro, e degli ordini* p *e* q *rispettivamente.*

Osservazione. — Per ogni γ abbiamo da (31):

$$E_{\gamma,0} = d^{\gamma} \cdot \eta_{\begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma \end{bmatrix}}, \qquad E_{0,\gamma} = d^{\gamma} \cdot \zeta_{\begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma \end{bmatrix}};$$

in particolare dunque per $\gamma = 1$ la (20) prende la forma

$$d^{n-1} \cdot p_n = d^{\alpha+\beta} \cdot g_{\alpha+\beta+1} \left\{ \frac{c_{\alpha+1,\beta}}{c_{\alpha,\beta}} d \cdot \eta + \frac{c_{\alpha,\beta+1}}{c_{\alpha,\beta}} d \cdot \zeta \right\},$$

che coincide colla (10) data in *Ricerche*, a pag. 19 e ivi trovata per altra via.

(*) Il chiar.mo prof. D' Ovidio nella classica Memoria pei Lincei del 1876-77 tratta le due metriche-projettive non-euclidee prendendo sempre la curvatura $K = 1$, ipotesi che io in *Ricerche*, e sempre in seguito, contrassegno con un puntino preposto alle lettere rappresentatrici delle quantità che dipendono dalla curvatura; il valore di una tale quantità si ottiene poi da quello della contrassegnata dividendolo per una conveniente potenza di $K^{\frac{1}{2}}$. In particolare indicando con $\cdot M$ il *momento dovidiano* di due spazi indipendenti, il loro momento M sarà dato da

$$M = \frac{\cdot M}{K^{\frac{1}{2}}}.$$

Infatti si vede facilmente ad es. sulla (30) che cangiando Ω_{xx} in $u^2_x + K\omega_{xx}$ (cfr. *Ricerche*, pag. 5) $\cdot M$ acquista il fattore $K^{\frac{1}{2}}$, sicchè $\frac{\cdot M}{K^{\frac{1}{2}}}$ ha un limite determinato per $K = 0$ (Cfr. D'Ovidio, l. c., pag. 57). Inoltre pensando al significato intrinseco di $\cdot M$ si vede che $\frac{\cdot M}{K^{\frac{1}{2}}}$ è reale in ogni ipotesi quando i due spazi sono reali ed accessibili, purchè si prenda K positivo o negativo secondochè vale l'ipotesi ellittica o l'iperbolica.

§ 2°.

Tubi trapezoidali una o più volte imprimitivi.

Due posizioni consecutive generiche di $G_{\alpha+\beta+1}$ (§ 1°) non staranno in generale in uno stesso $S_{\alpha+\beta+2}$; ma se vi stanno, allora in un tale $S_{\alpha+\beta+2}$ verrà descritto dal tubo primitivo generatore giacente in $G_{\alpha+\beta+1}$ un tubo una volta imprimitivo che potrà a sua volta esser considerato, al variare di $S_{\alpha+\beta+2}$ intorno a $G_{\alpha+\beta+1}$, come generatore del dato tubo γ volte imprimitivo.

Questa ipotesi conduce già ad una grande semplificazione della espressione di $E_{p,q}$ (§ 1° (31)). Ed invero poichè allora due spostamenti normali, lineari, infinitesimi corrispondenti a, b di y e z risp. stanno in uno stesso $S_{\alpha+\beta+2}$ e sono perpendicolari a $G_{\alpha+\beta+1}$, dovranno le rette yu, zv che li contengono concorrere nello stesso punto polo-assoluto di $G_{\alpha+\beta+1}$ in $S_{\alpha+\beta+2}$. Perciò i punti $u^1, u^2, \ldots u^\gamma$ (considerati nel § 1°) dovranno coincidere risp. con i punti $v^1, v^2, \ldots v^\gamma$. Se dunque noi scegliamo i γ spostamenti fondamentali $a_1, a_2, \ldots a_\gamma$ in U_γ sopra γ direzioni due a due ortogonali fra loro, anche le $b_1, b_2, \ldots b_\gamma$ in V_γ riusciranno due a due ortogonali fra loro, sicchè si avrà intanto:

$$d^p \cdot \eta_{\left[\substack{p \\ \gamma}\right]_h} = \prod_{\left[\substack{p \\ \gamma}\right]_h} \cdot a_i \,, \qquad d^q \cdot \zeta_{\left[\substack{q \\ \gamma}\right]_k} = \prod_{\left[\substack{q \\ \gamma}\right]_k} \cdot b_i \,; \tag{1}$$

ma inoltre gli spazî S_p, S_q che contengono risp. p spostamenti a e i q spostamenti complementari b, come projettanti da y e z risp. due gruppi di punti u ortogonali fra loro due a due e posti su $H_{\gamma-1}$ e perciò ortogonali anche ad y e z, saranno pure ortogonali fra loro. Si avrà dunque anche:

$$\frac{{}^{\cdot}M_{\left[\substack{p,\, q \\ h,\, k}\right]}}{\operatorname{sen} {}^{\cdot}r} = 1 \,. \tag{2}$$

Ora vogliamo introdurre l'ulteriore ipotesi che il tubo imprimitivo generatore sia *trapezoidale*, cioè (*Ricerche*, pag. 19) *sia generato da un tubo piramidale* (*col vertice in* y) *in modo che l'asse del tubo generatore descriva una sviluppabile e mantenga un'inclinazione costante colla linea descritta dal vertice* (y); nel qual caso noi diremo ancora *trapezoidale* il tubo γ volte imprimitivo.

Allora poi (*Ricerche,* pag. 21) fra due *spostamenti* corrispondenti generici a, b sussiste la relazione:

$$b = a \cos \cdot r \tag{3}$$

Se noi poniamo:

$$d^\gamma \cdot U_\gamma = \cdot a_1 \times \cdot a_2 \times \ldots \times \cdot a_\gamma , \tag{4}$$

sarà $d^\gamma \cdot U_\gamma$ l'elemento di volume descritto da y in senso normale a $G_{\alpha+\beta+1}$ (descritto cioè dalla projezione ortogonale di y sopra U_γ) e noi diremo $d^\gamma \cdot U_\gamma$ lo *spessore* del tubo trapezoidale.

A mezzo di (1), (2), (3), (4) la (31) dal § 1° prende la forma semplice:

$$E_{p,q} = d^\gamma \cdot U_\gamma \binom{\gamma}{p} \cos^q \cdot r. \tag{5}$$

E siccome da (5) del § 1° si ricava

$$\frac{c_{\alpha+p,\,\beta+q}}{c_{\alpha,\beta}} = \frac{V_{\cdot r}{}^{(\alpha+p,\,\beta+q)}}{V_{\cdot r}{}^{(\alpha,\beta)} \operatorname{sen}^\gamma \cdot r},$$

così la (20) del § 1° diventerà intanto per la (5)

$$d^{n-1} \cdot p_n = \frac{d^{\alpha+\beta} \cdot g_{\alpha+\beta+1}}{V_{\cdot r}{}^{(\alpha,\beta)}} \, d^\gamma \cdot U_\gamma \sum_{p+q=\gamma} \frac{V_{\cdot r}{}^{(\alpha+p,\,\beta+q)}}{\operatorname{sen}^\gamma \cdot r} \binom{\gamma}{q} \cos^q r . \tag{6}$$

Ora, se $F_{\cdot r}{}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ è la somma comparente a destra nella (6), si ha successivamente (per la (3) del § 1°):

$$F_{\cdot r}{}^{(\alpha,\beta,\gamma)} = \frac{1}{\operatorname{sen}^\gamma \cdot r} \sum_{p+q=\gamma} \binom{\gamma}{q} \cos^q \cdot r \int_0^{\cdot r} \operatorname{sen}^{\alpha+p} \cdot (r-\rho) \operatorname{sen}^{\beta+q} \cdot \rho \, d \cdot \rho =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen}^\gamma \cdot r} \int_0^{\cdot r} \left\{ \sum_{p+q=\gamma} \binom{\gamma}{p} \cos^q \cdot r \operatorname{sen}^q \cdot \rho \operatorname{sen}^p \cdot (r-\rho) \right\} \operatorname{sen}^\alpha \cdot (r-\rho) \operatorname{sen}^\beta \cdot \rho d \cdot \rho$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen}^\gamma \cdot r} \int_0^{\cdot r} \left\{ \cos \cdot r \operatorname{sen} \cdot \rho + \operatorname{sen} \cdot (r-\rho) \right\}^\gamma \operatorname{sen}^\alpha \cdot (r-\rho) \operatorname{sen}^\beta \cdot \rho d \cdot \rho =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen}^\gamma \cdot r} \int_0^{\cdot r} (\operatorname{sen} \cdot r \cos \cdot \rho)^\gamma \operatorname{sen}^\alpha \cdot (r-\rho) \operatorname{sen}^\beta \cdot \rho d \cdot \rho ,$$

cioè:

$$F_{\cdot r}{}^{(\alpha,\beta,\gamma)} = \int_0^{\cdot r} \cos^\gamma \cdot \rho \operatorname{sen}^\alpha \cdot (r-\rho) \operatorname{sen}^\beta \cdot \rho \, d \cdot \rho ; \tag{7}$$

sicchè la (6) diventa:

$$d^{n-1} \cdot p_n = \frac{d^{\alpha+\beta} \cdot g_{\alpha+\beta+1}}{V_{\cdot r}{}^{(\alpha,\beta)}} \, d^\gamma \cdot U_\gamma F_{\cdot r}{}^{(\alpha,\beta,\gamma)} , \tag{8}$$

con $F_{\cdot r}{}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ definito da (7).

L'ipotesi poi che il tubo primitivo generatore sia piramidale col vertice in y conduce a fare in (8):

$$\alpha = 0\,, \quad \beta = n - \gamma - 1\,; \tag{9}$$

inoltre in tal caso, detto $d^{n-\gamma-1}\,\sigma_{n-\gamma-1}$ l'angoloide nel vertice della piramide generatrice, si potrà (*Ricerche*, pag. 17) porre:

$$d^{n-\gamma-1}\cdot g_{n-\gamma} = d^{n-\gamma-1}\sigma_{n-\gamma-1}\quad V_{.r}^{(0,\,n-\gamma-1)}\,; \tag{10}$$

e, scrivendo per brevità $F_{.r}^{(\gamma,n)}$ in luogo di $F_r^{(0,\,n-\gamma-1,\,\gamma)}$, la (7) ci darà

$$F_{.r}^{(\gamma,n)} = \int_0^{\cdot r} \cos^{\gamma}\cdot\rho\,\mathrm{sen}^{n-\gamma-1}\cdot\rho\, d\cdot\rho\,. \tag{11}$$

Così poi, per le (9), (10), (11), l'*ampiezza estensiva* $\mathrm{d}^{n-1}\cdot \mathrm{p}_n$ *del tubo trapezoidale* γ *volte imprimitivo di specie* n—1 *sarà data dalla*:

$$d^{n-1}\cdot p_n = d^{n-\gamma-1}\sigma_{n-\gamma-1}\,d^{\gamma}\cdot U_{\gamma}\,F_{.r}^{(\gamma,n)}\,, \tag{12}$$

essendo $F_{.r}^{(\gamma,n)}$ definito dalla (11).

Osservazione. — Per $\gamma = 1$ la (12) diventa

$$d^{n-1}\cdot p_n = d^{n-2}\sigma_{n-2}d\cdot U\,\frac{\mathrm{sen}^{n-1}\cdot r}{n-1}\,. \tag{13}$$

Ma se $d^{n-2}s_{n-2}$ ed h sono la base e l'altezza della piramide generatrice, per le formule (18) e (20) date in *Ricerche*, p. 17 si ha

$$d^{n-2}\,\sigma_{n-2}\,\mathrm{sen}^{n-1}\cdot r = d^{n-2}\cdot s_{n-2}\,\mathrm{sen}\cdot h\,, \tag{14}$$

dunque la (13) può prendersi anche nella forma:

$$d^{n-1}\cdot p_n = \frac{d^{n-2}\cdot s_{n-2}\,d\cdot U\,\mathrm{sen}\cdot h}{n-1}\,, \tag{15}$$

corrispondente alla (16) della pag. 22 in *Ricerche*.

§ 3°.

Volume e superficie-laterale degli ipersolidi una o più volte rotondi.

Se β e γ sono due interi non negativi tali che $\beta + \gamma = n - 1$, si immagini nello spazio metrico-projettivo fondamentale S_n una

$(\beta+1)$ — sfera (*) mobile di raggio r variabile (con data legge continua) il cui centro y descriva con continuità *senza ritorni* una porzione U_γ di un fissato S_γ e il cui spazio-sostegno $G_{\beta+1}$ si mantenga sempre normale ad U_γ; allora l'n-solido $R_n^{(\beta)}$ così generato si dirà *uno strato* β *volte rotondo ad* n *dimensioni di spessore* U_γ. Il luogo σ_{n-1} descritto dalla superficie della polisfera generatrice è la *superficie-laterale di* $R_n^{(\beta)}$.

Se il moto della polisfera avesse luogo con ritorni del centro a posizioni già prese in U_γ, il polisolido sarebbe ancora un $R_n^{(\beta)}$ (cioè β volte rotondo ad n dimensioni) ma sarebbe chiaramente un aggregato di due o più *strati* positivi o negativi; lo stesso dicasi della superficie laterale.

Ogni $S_{\gamma+1}$ passante per U_γ taglia la superficie-laterale σ_{n-1} di $R_n^{(\beta)}$ in un luogo M_γ a γ dimensioni da dirsi *meridiano*, il quale manifestamente è invariabile in grandezza e nella posizione relativa ad U_γ; perciò σ_{n-1} può anche *essere generata dalla rotazione multipla secondo* β *del meridiano intorno all'*ASSE U_γ.

Volume p_n dell'n solido β volte rotondo. — Considerando uno strato $d^\gamma p_n$ di spessore γ volte infinitesimo $d^\gamma U_\gamma$ e raggio r, riesce manifesto che esso è la somma di ∞^β tubi di lunghezza r col carattere trapezoidale multiplo secondo γ; sicchè vale per ognuno di questi la (12) del § 2°; integrando questa rispetto a $d^{n-\gamma-1}\sigma_{n-\gamma-1}$ ed osservando che tale integrale si ottiene cangiando $d^{n-\gamma-1}\sigma_{n-\gamma-1}$ in $2A_{n-\gamma-1}$ (**) avremo:

$$d^\gamma . p_n = 2A_{n-\gamma-1}\, d^\gamma .\, U_\gamma\ F._r^{(\gamma,n)}. \tag{1}$$

(*) Secondo il linguaggio di Schläfli, *Theorie der vielfachen Kontinuität*, si dice *polisfera* in luogo di *ipersfera*, ed *m-sfera* in luogo di *polisfera propria di un* S_m. Cfr. la mia recente *Comunicazione* alla Società dei Naturalisti e Matematici di Modena: *Sull'estensionimetria ipersferica di Luigi Schläfli* (20 aprile 1909).

(**) A_n in generale significa (*Ricerche*, pag. 23) *ampiezza* di un S_n metrico-projettivo. Il valore esplicito di A_n ha forma differente secondochè n è pari o dispari (*Ricerche*, pag. 24); ma si può raccogliere queste due forme in una sola mediante la funzione Γ; infatti per ogni n si ha:

$$A_n = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

(cfr. Schoute, *Mehrdimensionale Geometrie*, vol. 2°, pag. 289; e Schlaefli, l. c., pag. 59. Vedi anche la citata mia Comunicazione alla Società dei Nat. e Mat. di Modena).

Sia ora $T_{\gamma+1}$ l'estensione dello spazio descritto dal raggio r in un $S_{\gamma+1}$ meridiano di $R_n^{(\beta)}$ (*anche composto di più strati*); allora per la (11) del § 2° la precedente (1) potrà anche essere scritta (integrandola γ volte):

$$(2) \qquad \cdot p_n = 2 A_{n-\gamma-1} \int_{T_{\gamma+1}} \cos^\gamma \cdot \rho \, \mathrm{sen}^{n-\gamma-1} \cdot \rho \, d \cdot \rho \, d^\gamma \cdot U_\gamma \, .$$

Se ora dl e dL sono gli elementi lineari risp. in U_γ e $T_{\gamma+1}$, si potrà chiaramente ritenere

$$(3) \qquad d \cdot L^2 = d \cdot \rho^2 + \cos^2 \cdot \rho \, d \cdot l^2 ;$$

perciò l'elemento $d^{\gamma+1} \cdot T_{\gamma+1}$ di volume di $T_{\gamma+1}$ sarà dato da

$$(4) \qquad d^{\gamma+1} \cdot T_{\gamma+1} = \cos^\gamma \cdot \rho \, d^\gamma \cdot U_\gamma \, d \cdot \rho \, .$$

La (2) per la (4) si può dunque scrivere

$$(5) \qquad \cdot p_n = 2 A_{n-\gamma-1} \int_{T_{\gamma+1}} \mathrm{sen}^{n-\gamma-1} \cdot \rho \, d^{\gamma+1} \cdot T_{\gamma+1} ,$$

la quale nel''ipotesi euclidea diviene

$$(6) \qquad p_n = 2 A_{n-\gamma-1} \int_{T_{\gamma+1}} \rho^{n-\gamma-1} \, d^{\gamma+1} \, T_{\gamma+1} \ (*).$$

Osservazione. — La (1) per $\gamma = 1$ diventa

$$(7) \qquad d \cdot p_n = 2 A_{n-2} \frac{\mathrm{sen}^{n-1} \cdot r}{n-1} \, d \cdot U ,$$

che ho già data in *Ricervhe* a pag. 27 form. (3).

(*) Se con $\bar{\rho}$ si indica un conveniente valor medio di ρ, le (5) e (6) si possono scrivere:

$$(a) \qquad \cdot p_n = 2 A_{n-\gamma-1} \cdot T_{\gamma+1} \, \mathrm{sen}^{n-\gamma-1} \cdot \bar{\rho} ,$$
$$(b) \qquad p_n = 2 A_{n-\gamma-1} \, T_{\gamma+1} \, \bar{\rho}^{n-\gamma-1} .$$

Le (a) e (b) rappresenterebbero risp. secondo Dannmayer (che si limita al caso $n = 3$, $\gamma = 1$, $K < 0$; l. c. in *Ricerche* a p. 39) e secondo Schoute (l. c., vol. II, pag. 311-312) la *regola di Guldino pei volumi dei corpi rotondi*; ma, poichè nello spazio meridiano non esiste *in generale* un punto *che si possa determinare in modo indipendente dall'asse* U_γ e che abbia da U_γ la distanza $\bar{\rho}$, le (a) e (b) sono da considerarsi come generalizzazioni illusorie o forme improprie della Regola di Guldino (pei volumi) e non hanno che un valore mnemonico. Soltanto nel caso $\gamma = n - 2$, cioè nel caso dei corpi semplicemente rotondi, la (b) rappresenta la forma propria della Regola di Guldino (pei volumi) nell'ipotesi euclidea; esiste in questo caso anche nell'ipotesi non-euclidea una forma propria di tale Regola, ma, come proverò nel § seguente, essa non è rappresentata dalla (a), benchè per $K = 0$ si riduca alla (b).

Superficie-laterale σ_{n-1}. — Sia $d^\gamma \sigma_{n-1}$ la superficie-laterale dello strato γ volte infinitamente sottile di spessore $d^\gamma U_\gamma$; l'ipersfera base di esso avrà una superficie $s_{n-\gamma-1}$ data da:

$$\cdot s_{n-\gamma-1} = 2 A_{n-\gamma-1} \operatorname{sen}^{n-\gamma-1} \cdot r ; \tag{8}$$

e siccome tale ipersfera è normale ai meridiani M_γ così, se diciamo $d^\gamma M_\gamma$ l'elemento di estensione M_γ compreso in $d^\gamma \sigma_{n-1}$ (per una facile generalizzazione della *forma geodetica* dell'elemento di estensione già considerata in *Ricerche*, pag. 2), sarà:

$$d^\gamma \cdot \sigma_{n-1} = \cdot s_{n-\gamma-1} d^\gamma \cdot M_\gamma . \tag{9}$$

Questa combinata colla (8) e integrata dà:

$$\cdot \sigma_{n-1} = 2 A_{n-\gamma-1} \int_{M_\gamma} \operatorname{sen}^{n-\gamma-1} \cdot r \, d^\gamma M_\gamma , \tag{10}$$

essendo M_γ la porzione di meridiano compresa in $R_n^{(\beta)}$.

Se in (3) si cambia ρ in r, dL diventa l'elemento lineare in M_γ; supponendo ad es. $dl^2 = \sum_{h,k} a_{hk}\, du_h\, du_k$ riuscirà dunque:

$$d \cdot L^2 = \sum_{h,k} \left\{ \frac{\partial \cdot r}{\partial u_h} \frac{\partial \cdot r}{\partial u_k} + \cos^2 \cdot r \, a_{hk} \right\} du_h du_k ; \tag{11}$$

sicchè, detto D il discriminante del secondo membro di (11) risulterà poi:

$$d^\gamma M_\gamma = \sqrt{D}\, du_1 \ldots du_\gamma . \tag{12}$$

Osservazione. — La (10) si presta insieme alla corrispondente euclidea, a proposito della regola di Guldino per le superfici rotonde, ad osservazioni analoghe a quelle fatte sulle (5) e (6) (Cfr. Schoute, l. c., in nota a pag. 15).

Un caso di riduzione del calcolo di p_n e σ_{n-1} ad una quadratura. — Questo caso è quello in cui *le* r = cost. *sopra* Uγ *sono geodeticamente parallele.* In tale ipotesi intanto detta $U_{\gamma-1}$ l'estensione di una generica $r =$ cost (sopra U_γ) ed u la sua distanza *costante* da una fissata $r_0 =$ cost., si ha:

$$d^\gamma \cdot U_\gamma = d^{\gamma-1} U_{\gamma-1}\, du , \tag{13}$$

ove u è funzione soltanto di r. Allora la (1) integrata per $r =$ cost. ci dà:

$$d \cdot p_n = 2 A_{n-\gamma-1} \cdot U_{\gamma-1} F_{\cdot r}^{(\gamma, n)} \frac{du}{dr} dr , \tag{14}$$

che con una quadratura rispetto ad r dà p_n.

Quanto a σ_{n-1} si osservi che, indicando con $d\lambda$ l'elemento lineare sopra la $u = \text{cost}$, se dl è l'elemento lineare generico in U_γ, si ha: $dl^2 = du^2 + d\lambda^2$; onde la (3), in cui si cangi ρ in r, ci dà:

$$dL^2 = \left\{ \left(\frac{dr}{du}\right)^2 + \cos^2 \cdot r \right\} du^2 + \cos^2 \cdot r \, d\lambda^2 ,$$

ove dL è l'elemento lineare in M_γ; perciò se Δ è il discriminante di $d\lambda^2$ e D il discriminante di dL^2, sarà:

$$D = \left\{ \left(\frac{dr}{du}\right)^2 + \cos^2 r \right\} \cos^{2(\gamma-1)} \cdot r \times \Delta ,$$

cioè

$$d^\gamma \cdot M_\gamma = \sqrt{\left(\frac{dr}{du}\right)^2 + \cos^2 \cdot r} \cos^{\gamma-1} \cdot r \cdot d^{\gamma-1} \cdot U_{\gamma-1} \, du . \tag{15}$$

Allora poi la (9) integrata per $u = \text{cost}$ ci dà:

$$d \cdot \sigma_{n-1} = 2 A_{n-\gamma-1} \cos^{\gamma-1} \cdot r \, \text{sen}^{n-\gamma-1} \cdot r \sqrt{\left(\frac{dr}{du}\right)^2 + \cos^2 \cdot r} \cdot U_{\gamma-1} du, \tag{16}$$

che con una quadratura ulteriore dà σ_{n-1}.

Due casi in cui p_n e σ_{n-1} sono calcolabili elementarmente. — 1° Caso. — *Il meridiano sia una porzione di superficie di equidistanza* r *da* U_γ (cioè sia una porzione di una $(\gamma + 1)$ — sfera che ammetta U_γ come polare del centro). In tale ipotesi sarà $r = \text{cost}$ in tutto U_γ; allora la (1) ci dà subito:

$$\cdot p_n = 2 A_{n-\gamma-1} \cdot U_\gamma F_{\cdot r}^{(\gamma,n)} . \tag{17}$$

Inoltre la (11) si riduce alla

$$d \cdot L = \cos \cdot r \, d \cdot l ,$$

e così la (12) diventa

$$d^\gamma \cdot M_\gamma = \cos^\gamma \cdot r \, d^\gamma \cdot U_\gamma .$$

Per queste poi la (10) ci dà subito

$$\cdot \sigma_{n-1} = 2 A_{n-\gamma-1} \cos^\gamma \cdot r \, \text{sen}^{n-\gamma-1} \cdot r \cdot U_\gamma = \frac{d \cdot p_n}{d \cdot r} . \tag{18}$$

2° Caso. — *Il meridiano è una porzione di superficie* $(\gamma + 1)$-*sferica la cui projezione sopra* U_γ *è un settore* γ-*sferico col vertice nella projezione del centro della* $(\gamma + 1)$-*sfera meridiana su* U_γ: *inoltre* γ *è dispari.*

Se $\omega_{\gamma-1}$ è l'angolo del settore di raggio u projezione del meridiano, si può porre in (14):

$$(19)\qquad {}^{\cdot}U_{\gamma-1}=\omega_{\gamma-1}\,\mathrm{sen}^{\gamma-1}\cdot u\,.$$

Ora se r_0 è la distanza del centro della $(\gamma+1)$-sfera meridiana da U_γ ed R è il suo raggio, dal triangolo, che ha un vertice mobile sulla $(\gamma+1)$-sfera meridiana e due vertici fissi nel centro di essa e nel polo assoluto di U_γ, si ricava subito per l'u che compare in (14) e (19):

$$(20)\qquad \cos\cdot u=\frac{\cos\cdot R-\mathrm{sen}\cdot r_0\,\mathrm{sen}\cdot r}{\cos\cdot r_0\cos\cdot r}\,.$$

Pongasi poi

$$(21)\qquad x=\mathrm{sen}\cdot r.$$

Allora, siccome $\gamma-1$ è pari, da (19), (20) e (21) risulterà

$$(22)\qquad {}^{\cdot}U_{\gamma-1}=\text{funzione razionale di } x.$$

Inoltre essendo per la (11) del § 1°

$$F'_{\cdot r}{}^{(\gamma,n)}=\int_0^{\cdot r}\cos^{\gamma}\cdot\rho\,\mathrm{sen}^{n-\gamma-1}\cdot\rho\,d\cdot\rho\,,$$

nell'ipotesi di γ dispari risulterà ancora per la (21)

$$(23)\qquad F_{\cdot r}{}^{(\gamma,n)}=\text{funzione razionale (intera) di } x.$$

Così la (14) per le (22) e (23) ha la forma:

$$(24)\qquad d\cdot p_n=(\text{funz. raz. di } x)\times\frac{du}{dx}\,dx.$$

Essendo poi γ dispari sarà pure per la (21):

$$(25)\qquad \cos^{\gamma-1}\cdot r\,\mathrm{sen}^{n-\gamma-1}\cdot r=\text{funz. raz. (intera) di } x;$$

perciò la (19) per la (22) e (25) diverrà

$$(26)\qquad d\cdot\sigma_{n-1}=(\text{funz. raz. di } x)\times\sqrt{\left(\frac{d\cdot r}{dx}\right)^2+\left(\cos\cdot r\,\frac{d\cdot u}{dx}\right)^2}\,dx\,.$$

Ma se noi facciamo:

$$(27)\qquad A=\mathrm{sen}^2\cdot R-\mathrm{sen}^2\cdot r_0+2x\cos\cdot R\,\mathrm{sen}\cdot r_0-x^2\,,$$

troveremo poi da (20) e (21)

$$(28)\qquad \frac{d\cdot u}{dx}=\frac{\mathrm{sen}\cdot r_0-x\cos\cdot R}{(1-x^2)\sqrt{A}}\,,\qquad \sqrt{\left(\frac{d\cdot r}{dx}\right)^2+\left(\cos\cdot r\,\frac{du}{dx}\right)^2}=\frac{\mathrm{sen}\cdot R}{\sqrt{A}}\,,$$

a mezzo delle quali i secondi membri di (24) e (26) assumono entrambi la forma:

$$\text{funz. raz.}\,(x, \sqrt{A})\, dx\,;$$

perciò p_n e σ_{n-1} si possono ottenere elementarmente in termini finiti.

Osservazione. — Naturalmente risultati analoghi si avrebbero supponendo che la projezione del meridiano sull'asse fosse un aggregato di un numero finito di settori positivi o negativi della specie indicata. Inoltre, come per $\gamma = 1$ si è fatto in *Ricerche*, pag. 29, sono inclusi nell'analisi precedente i casi in cui la $(\gamma + 1)$-sfera meridiana si schiaccia in un S_γ, oppure diventa orisferica, oppure ha il centro su U_γ ecc., e i risultati stessi col solito artifizio sono validi anche nell'ipotesi euclidea.

§ 4°.

Baricentro.

Sia al solito $\Omega_{xx} = 0$ l'equazione dell'assoluto in S_n ed ω_{uu} sia la forma aggiunta di Ω_{xx}, cosicchè $\Omega_{xx}\omega_{uu}$ sia una forma mista omogenea di grado 0 nelle Ω; allora se K è la curvatura di S_n e d_{xu}, la distanza fra un punto x e un iperpiano u di S_n, si ha notoriamente:

$$\frac{\operatorname{sen} \cdot d_{x,u}}{\sqrt{K}} = \frac{u_x}{\sqrt{K\,\omega_{uu}\Omega_{xx}}}\,. \tag{1}$$

Per determinare il segno del secondo membro di (1) non basta fissare il segno del radicale perchè si possono cangiare di segno tutte le u o tutte le x senza alterare il valore assoluto della formula. Noi qui vogliamo togliere l'ambiguità proveniente dal cangiare i segni alle x, ma soltanto nell'ipotesi che il punto x sia *ellittico* (*Ricerche*, pag. 29). Fissato perciò un punto ellittico arbitrario a noi considereremo soltanto iperpiani u non passanti per a, cioè supporremo $u_a \mathrel{-}= 0$; inoltre noi escluderemo tutti i punti x che stanno sull'iperpiano polare assoluto α di a, cioè supporremo $\Omega_{ax} \mathrel{-}= 0$. Allora poi potremo scrivere la (1) nella forma:

$$\frac{\operatorname{sen} \cdot d_{x,u}}{\sqrt{K}} = \frac{\Omega_{aa} u_x}{\Omega_{ax} u_a} \times \sqrt{\frac{\Omega^2_{ax}}{\Omega_{xx}\,\Omega_{aa}}} \times \frac{u_a}{\sqrt{K\,\omega_{uu}\Omega_{aa}}}\,, \tag{2}$$

Ora l'ipotesi che x ed a siano entrambi ellittici conduce alla $\Omega_{xx}\,\Omega_{aa} > 0$, perciò il secondo fattore nel 2° membro di (2) è sempre *reale* e noi *fisseremo che sia sempre positivo.* Così poi, poichè il primo fattore ha il segno del rapporto anarmonico $(\alpha\, u\, a\, x)$, l'ambiguità rimasta nel secondo membro di (2) *dipende solo da* u.

Per semplicità noi porremo in seguito:

$$\Omega_{aa} = 1, \quad \Omega_{ax} = 1, \quad u_a = 1, \tag{3}$$

la prima delle quali richiede che il campo dei punti ellittici sia caratterizzato dalla

$$\Omega_{xx} > 0; \tag{4}$$

inoltre noi supporremo:

$$\sqrt{\Omega_{xx}} > 0. \tag{5}$$

Allora poi la (2) si riduce alla forma semplice:

$$\frac{\operatorname{sen} \cdot d_{x,u}}{\sqrt{K}} = \frac{u_x}{\sqrt{\Omega_{xx}}} \times \frac{1}{\sqrt{K\, \omega_{uu}}}, \tag{6}$$

ove il primo fattore del secondo membro ha per le (3), (4), (5) un valore reale ben determinato.

Campo proprio (di punti ellittici). — Così denomineremo il campo dei punti interni a un'ipersfera di centro ellittico e raggio reale quando internamente a tale ipersfera non possano trovarsi due punti coniugati nella polarità assoluta. Nelle ipotesi iperbolica e parabolica l'interno di ogni ipersfera di centro ellittico e raggio reale è un campo proprio; invece nell'ellittica affinchè l'interno di un'ipersfera di centro e raggio reale sia un campo proprio è necessario e sufficiente, chiaramente, che il *diametro dell'ipersfera non superi mezza retta.* I punti di un campo proprio sono poi tutti ellittici e il coseno dell'ampiezza di un segmento interno ad esso è sempre positivo e inoltre minore, eguale o maggiore di 1 secondochè vale l'ipotesi ellittica, la parabolica o l'iperbolica; inoltre colle formule di Delambre-Gauss si proverebbe facilmente che ogni triangolo contenuto in un tal campo gode delle proprietà che la somma di due (qualunque) dei suoi angoli è sempre minore di due retti.

Noi d'ora innanzi limiteremo le nostre osservazioni ai sistemi di punti contenuti in uno stesso campo proprio C, e s'intenderà ancora che il punto ausiliario a sopra fissato giaccia in C. Segue di qui che α è sempre esterno a C, essendo α l'insieme dei punti coniugati ad a nella polarità assoluta; perciò se u è un iperpiano distinto da α ed x ed y sono due punti di C, il segno del rapporto anarmonico $(u\alpha x y)$ sarà — oppure + secondochè u taglia o non taglia il segmento xy interno a C, cioè tale segno non dipende dalle posizioni di a in C.

D'altra parte da (6) e (8) risulta:

$$\frac{\operatorname{sen}^{\cdot} d_{x,u}}{\operatorname{sen}^{\cdot} d_{y,u}} = \frac{u_x}{u_y} \times \frac{\sqrt{\Omega_{yy}}}{\sqrt{\Omega_{xx}}} = \frac{u_x \Omega_{ay}}{u_y \Omega_{ax}} \times \frac{\sqrt{\Omega_{yy}}}{\sqrt{\Omega_{xx}}} =$$

$$= \frac{u_x \alpha_y}{u_y \alpha_x} \times \frac{\sqrt{\Omega_{yy}}}{\sqrt{\Omega_{xx}}} = (u\alpha x y) \times \frac{\sqrt{\Omega_{yy}}}{\sqrt{\Omega_{xx}}},$$

perciò il segno del primo membro coincide col segno del predetto rapporto anarmonico; si conclude che: *la* (6) *determina il rapporto dei seni delle distanze che due punti* x, y *di* C *hanno da un iperpiano* u *in modo che tale rapporto è positivo o negativo secondochè* u *non attraversa ovvero attraversa il segmento* x y *interno a* C, *in modo dunque indipendente dalla posizione data ad* a *in* C.

Baricentro di un sistema di punti massa contenuti in C. — Un *punto-massa* di posizione x e massa m si indicherà con $x \frown m$; mentre con $[x \frown m, u]$ indicheremo il *momento* di $x \frown m$ rispetto all'iperpiano u, che definiremo mediante la

$$[x \frown m, u] = \frac{m \operatorname{sen}^{\cdot} d_{x,u}}{\sqrt{K}} \quad (*). \tag{7}$$

Dato in C un sistema di punti-massa $x \frown m_x$ si dice *baricentro* del sistema un punto-massa $\xi \frown \mu$ tale che:

$$[\xi \frown \mu, u] =_n \sum [x \frown m_x, u] \quad (**). \tag{8}$$

(*) La definizione di *momento* data dal Dr. Dannmayer (l. c. in *Ricerche*, pag. 39) essendo limitata allo spazio iperbolico (a tre dimensioni) è utilmente rivestita della forma esplicitamente reale $k\, sh \frac{d}{k}$, essendo k il raggio di curvatura, ma è sostanzialmente identica alla (7). Le considerazioni sui segni vi sono (e vi potevano giustamente essere) sottintese. Facendo in (7) $m = 1$ e $K = 1$ si ha il momento dovidiano (V. nota a p. 10).

(**) Anche Dannmayer assume sostanzialmente la definizione (8) di baricentro.

La (8) per le (7) e (6) si riduce lineare nelle u prendendo la forma:

$$(9) \qquad \frac{u_\xi}{\sqrt{\Omega_{\xi\xi}}} =_u \sum_x \frac{u_x}{\sqrt{\Omega_{xx}}} m_x ,$$

la quale per l'arbitrarietà dei rapporti fra le u ci dà il sistema:

$$(10) \qquad \frac{\xi_i}{\sqrt{\Omega_{\xi\xi}}} \mu = \sum_x \frac{x_i}{\sqrt{\Omega_{xx}}} m_x \qquad (i = 0, 1 \dots n).$$

Determinazione di ξ e μ nell'ipotesi che le masse componenti siano tutte positive. — Le $(n+1)$ equazioni (10) omogenee nelle $n+1$ quantità ξ sono compatibili quando si prenda:

$$(11) \qquad \mu^2 = \sum_x \sum_y \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}} m_x m_y ,$$

che si deduce facilmente dalle (10) stesse.

Se noi indichiamo con $d_{x,y}$ la distanza (interna a C) fra i punti x ed y, la (11) poi si può scrivere:

$$(12) \qquad \mu^2 = \sum_x \sum_y \cos \cdot d_{x,y} m_x m_y .$$

Questa prova che, poichè $\cos \cdot d_{xy}$ in C è positivo, μ^2 è sempre una quantità positiva se le masse componenti sono, come sempre si supporrà, positive.

Se noi poi poniamo:

$$(13) \qquad p_i = \sum_x \frac{x_i}{\sqrt{\Omega_{xx}}} m_x \qquad (i = 0, 1 \dots n)$$

se ne ricaverà per la (11):

$$(14) \qquad \Omega_{pp} = \mu^2 ;$$

dunque, poichè $\mu^2 > 0$, sarà pure:

$$(15) \qquad \Omega_{pp} > 0,$$

e le p non potranno essere neppure tutte nulle. Esse poi per le (10), (13) sono proporzionali alle ξ; dunque se le masse componenti sono tutte positive vi è *un baricentro ellittico ben determinato*. Per l'ipotesi $\Omega_{ax} = 1$, $\Omega_{a\xi} = 1$ si ha poi da (10):

$$(16) \qquad \frac{\mu}{\sqrt{\Omega_{\xi\xi}}} = \sum \frac{m_x}{\sqrt{\Omega_{xx}}} ;$$

ora per la (15) si ha pure $\Omega_{\xi\xi} > 0$, epperò per la (5) si deve prendere anche $\sqrt{\Omega_{\xi\xi}} > 0$; dunque la (16) prova che μ *è positiva*.

La *Massa integrale* $M = \sum_x m_x$ *è maggiore uguale o minore della baricentrica* μ *secondochè* K *è positiva nulla o negativa.*

Ed invero si ha:

$$(17)\qquad \frac{M-\mu}{K} = \frac{M^2-\mu^2}{(M+\mu)K} = \frac{\Sigma_x\Sigma_y m_x m_y - \Sigma_x\Sigma_y m_x m_y \cos\cdot d_{xy}}{(M+\mu)K} =$$

$$= \frac{2\,\Sigma_x\Sigma_y m_x m_y \dfrac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\cdot d_{xy}}{K}}{M+\mu},$$

la quale, poichè $\dfrac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\cdot d_{xy}}{K}$ è sempre reale e positivo, prova appunto che è sempre

$$(18)\qquad \frac{M-\mu}{K} > 0.$$

Formula di Lagrange. — Se z è un punto qualunque di C da (10) si ricava subito

$$(19)\qquad \mu\cos\cdot d_{z\xi} = \sum_x m_x \cos\cdot d_{zx},$$

che si può scrivere anche

$$(20)\qquad \mu\left(2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\cdot d_{z\xi} - 1\right) = \sum_x m_x\left(2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\cdot d_{zx} - 1\right).$$

Cangiando in (20) z in ξ e sottraendo da (20) stessa si ha

$$(21)\qquad \mu\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\cdot d_{z\xi} = \sum_x m_x\left(\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\cdot d_{zx} - \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\cdot d_{\xi x}\right).$$

Collocando z nel punto-massa $y \frown m_y$ del sistema, moltiplicando per m_y e sommando rispetto ad y da (20) si ha pure:

$$(22)\qquad \mu\sum_x m_x\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\cdot d_{x\xi} = \sum_x\sum_y m_x m_y \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\cdot d_{xy} - \frac{1}{2}M(M-\mu).$$

Questa poi per la (17) si riduce alla

$$(23)\qquad \sum_x m_x\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\cdot d_{x\xi} = \frac{\Sigma_x\Sigma_y m_x m_y \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\cdot d_{xy}}{M+\mu}.$$

Sottraendo questa dalla (21) e riducendo si ottiene infine

$$(24)\qquad \frac{1}{K}\sum_x m_x\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\cdot d_{xz} - \frac{1}{K}\mu\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\cdot d_{\xi z} = \frac{\Sigma_x\Sigma_y m_x m_y \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\cdot d_{xy}}{(M+\mu)K}$$

Questa poi al limite per $K=0$ dà la formula di Lagrange

$$(25)\qquad \sum_x m_x d^2_{x,z} - M d^2{}_{\xi z} = \frac{\Sigma_x \Sigma_y m_x m_y d^2{}_{yx}}{2M} \text{ (*)}.$$

Carattere centrale del baricentro. — Intendiamo con tale carattere di designare la proprietà del baricentro di un sistema di masse positive di *essere interno a qualunque campo proprio* C *che contenga tutte le masse.*

Sia infatti dapprima $K \gtreqless 0$; allora se t è un punto di C più lontano dal punto z (pure fissato entro C) che qualunque punto-massa del sistema, la $d_{zx} < d_{zt}$ ci darà chiaramente:

$$\cos\cdot d_{z,x} \gtreqless \cos\cdot d_{zt}, \text{ secondochè } K \gtreqless 0,$$

epperò avremo pure

$$\Sigma\, m_x \cos\cdot d_{zx} \gtreqless M \cos\cdot d_{zt}, \text{ secondochè } K \gtreqless 0,$$

ossia per la (19)

$$\mu \cos\cdot d_{z\xi} \gtreqless M \cos\cdot d_{zt}, \text{ secondochè } K \gtreqless 0.$$

Questa poi ci dà:

se $K>0$, $\cos\cdot d_{z\xi} > \frac{M}{\mu} \cos\cdot d_{zt}$, cioè per la (18): $\cos\cdot d_{z\xi} > \cos\cdot d_{zt}$,

se $K<0$, $\cos\cdot d_{z\xi} < \frac{M}{\mu} \cos . d_{zt}$, cioè per la (18): $\cos\cdot d_{z\xi} < \cos\cdot d_{zt}$,

dunque in ogni caso:

$$(26)\qquad d_{z\xi} < d_{zt}.$$

Per $K=0$ la (26) si ricava facilmente dalla formula di Lagrange (25).

Basta poi collocare z nel centro dell' n-sfera rappresentante C per dedurre da (26) la proposizione.

Carattere lineare dell'operazione baricentrica. — Avendosi da (13):

$$p_i = \frac{x_i'}{\sqrt{\Omega_{x'x'}}} m_{x'} + \frac{x_i''}{\sqrt{\Omega_{x''x''}}} m_{x''} + \ldots \qquad (i=0,1\ldots n),$$

se tutti i punti $x', x'', \ldots$ stanno in un S_r subordinato ad S_n rappresentato da $n-r$ equazioni lineari $a_x=0$, $b_x=0, \ldots$ anche p

(*) Lagrange, *Méc. Anal.*, 1811, T. I, pag. 64, 65, 66.

dovrà chiaramente soddisfare alle stesse equazioni lineari epperò stare in S_r.

Caratteri simmetrico e associativo dell'operazione baricentrica. — La indipendenza dell'operazione baricentrica dal modo di numerare le masse componenti costituisce il carattere *simmetrico*.

Se poi B indica l'operazione baricentrica, e un sistema W di punti-massa è spartito in due o più sistemi U, V, ... due a due non aventi elementi comuni talchè $W = U . \cup . V . \cup . ...$, si avrà:

$$BW = B \{ BU . \cup . BV . \cup . \ldots \},$$

la quale eguaglianza esprime appunto la proprietà associativa di B; essa si dimostra facilissimamente colle (10).

Osservazione 1ª. — Combinando il carattere associativo col lineare si trova ad es. che il *baricentro dei vertici* (*di massa* 1) *di un* $(n+1)$ *-edro di un* S_n *è il punto comune agli* $\frac{1}{2} n(n+1)$ *iperpiani mediani,* cioè projettanti dal sostegno di un diedro il punto medio dello spigolo opposto (Cfr. *Ricerche*, pag. 33).

Osservazione 2ª. — Se le masse sono distribuite con continuità in uno spazio, le (13) si cangiano in $(n+1)$ integrali estesi a detto spazio, calcolati i quali, si hanno le coordinate p del baricentro, e a mezzo di (14), la massa baricentrica. Come si vede il numero degli integrali occorrenti è sempre $n+1$, come nell'ipotesi euclidea.

Forma propria della Regola di Guldino per gli ipercorpi ed ipersuperfici semplicemente rotondi. — Le formule (5) e (10) del § 3° pel volume p_n e l' ipersuperficie laterale σ_{n-1} di un ipersolido $n - \gamma - 1$ volte rotondo possono evidentemente essere generalizzate sia restringendo la rotazione nel campo di un iperangoloide $\omega_{n-\gamma-1}$ ad $n - \gamma - 1$ dimensioni avente per sostegno l'asse U_γ e per generatore l'$S_{\gamma+1}$ mobile contenente il meridiano, sia supponendo che la densità D della massa rotante (solida o superficiale) sia eventualmente variabile da punto a punto dell'$S_{\gamma+1}$ meridiano ma costante nel moto di ogni punto. Così ponendo nei due casi risp.

$$m = Dd^{\gamma+1} \cdot T_{\gamma+1}, \quad m = Dd^{\gamma} \cdot M_\gamma$$

e indicando con M la massa totale rotante, esse possono ridursi entrambe alla forma:

Massa dell'ipercorpo (solido o superficiale) $n-\gamma-1$ volte rotondo =

$$= \omega_{n-\gamma-1} \int_M m \frac{\operatorname{sen}^{n-\gamma-1} \cdot \rho}{K^{\frac{n-\gamma-1}{2}}} .$$

In particolare per $\gamma = n - 2$ si ha dunque:

(27) Massa semplicemente rotonda $= \omega \int_M m \frac{\operatorname{sen} \cdot \rho}{\sqrt{K}}$.

In tal caso poi, se μ è la massa baricentrica di M ed r la distanza del baricentro di M dall'asse di rotazione U_{n-2}, si ha per definizione:

$$\mu \frac{\operatorname{sen} \cdot r}{\sqrt{K}} = \int_M m \frac{\operatorname{sen} \cdot \rho}{\sqrt{K}} . \tag{28}$$

Da (27) e (28) si trae la *forma propria della Regola di Guldino* (cfr. la nota a pag. 10 e l'osservazione a pag. 11):

(29) Massa solida o superficiale semplicemente rotonda =

$$\mu \times \omega \frac{\operatorname{sen} r}{\sqrt{K}} =$$

= Massa *baricentrica* della Massa solida o superficiale rotante $\times$
$\times$ Cammino del suo baricentro.

Nell'ipotesi euclidea invece di *massa baricentrica* si può dire *massa integrale.*

Osservazione. — Dannmayer (come ho già notato in *Ricerche*, a pag. VI) enuncia nella forma euclidea la Regola di Guldino per lo spazio iperbolico a tre dimensioni, indottovi dall'errore che in tale spazio la massa baricentrica si confonda coll'integrale.

Un carattere statico del baricentro. — *Se ai punti di un sistema di punti-massa e al loro baricentro si applicano delle forze dirette ad un centro (fuori dell'assoluto) e proporzionali alla massa e al seno della distanza da questo centro del loro punto di applicazione, la forza applicata al baricentro sarà la risultante di tutte le altre.*

Sia infatti zt una direzione arbitraria uscente dal centro z ed u l'iperpiano perpendicolare a zt in z; sia poi τ_x l'angolo

formato dalla zt, con una qualunque altra direzione zx. Allora si vede subito che (se d_{xz} è la distanza fra x e z e d_{xu} la distanza fra x ed u) si ha qualunque sia x:

$$\text{sen}^{\cdot} d_{x,u} = \text{sen}^{\cdot} d_{xz} \cos\tau_x ,$$

e quindi anche

$$\text{sen}^{\cdot} d_{\xi,u} = \text{sen}^{\cdot} d_{\xi z} \cos\tau_\xi .$$

Se m_x è la massa di x, μ la massa baricentrica e λ un coefficiente fisso qualunque, si ha poi qualunque sia u:

$$\lambda\mu\, \text{sen}^{\cdot} d_{\xi,u} = \sum_x \lambda m_x \text{sen}^{\cdot} d_{x,u} ,$$

e questa per le due precedenti diviene:

$$(\lambda\mu \,\text{sen}^{\cdot} d_{\xi z}) \cos\tau_\xi = \sum_x (\lambda m_x \,\text{sen}^{\cdot} d_{xz}) \cos\tau_x , \tag{30}$$

la quale, per l'arbitrarietà della direzione zt, prova appunto che la forza $\lambda\mu\,\text{sen}^{\cdot} d_{\xi z}$ nella direzione ξz è la risultante delle forze $\lambda m_x \text{sen}^{\cdot} d_{xz}$ nelle direzioni zx.

Osservazione. — Se i punti-massa stanno tutti nell'iperpiano ζ polare assoluto di z, si ha in particolare, che *le masse componenti e la baricentrica possono essere considerate come forze applicate ai corrispondenti punti normalmente a ζ e dalla stessa parte di ζ rispettivamente in qualità di componenti e di risultante del sistema.*

Reggio Emilia, maggio 1909.

Alcune proprietà integrali delle quadriche.

Nota di UMBERTO CISOTTI.

(Estratto da una lettera al Senatore Volterra).

. . . . L'estensione ch' Ella ha fatto di un teorema di addizione relativo agli integrali semplici, che corrisponde ad un teorema elementare di trigonometria (" Atti della R. Accademia di Torino ", 1897), mi ha fatto pensare al caso ancora più semplice (e non privo di interesse, mi pare) dell'estensione del ben noto teorema elementare di addizione degli argomenti di una funzione esponenziale.

***

Parto dalla nota formula

$$e^{\alpha+\beta}=e^{\alpha}\,.\,e^{\beta}\,;$$

da questa si deduce che se

$$e^{\alpha}\,.\,e^{\beta}=\text{costante}$$

è

$$\alpha+\beta=\text{costante}.$$

Se si pone

$$\alpha=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x}\,,\quad \beta=\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{y}\,,$$

si può anche dire che se è soddisfatta la relazione

$$xy=\text{costante},$$

si deve avere

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x}+\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{y}=\text{costante}.$$

Considerando x e y come coordinate cartesiane dei punti di un piano, il teorema elementare può dunque venire enunciato come proposizione di calcolo integrale nel modo seguente:

Sia

$$x \,.\, y = \text{costante}$$

l'equazione di un'iperbole riferita agli assintoti. Se si pone

$$\mathfrak{J} = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} + \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y},$$

è sempre

$$\mathfrak{J} = \text{costante},$$

comunque si sposti il punto (xy) *sull'iperbole.*

*
* *

L'estensione di questo teorema è contenuta nei seguenti enunciati:

I° *Sia*

$$f = \lambda \frac{x^2}{a^2} + \mu \frac{y^2}{b^2} + \nu \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

l'equazione di una quadrica riferita al centro; con a, b, c; λ, μ, ν *costanti e* $\lambda + \mu + \nu = 0$. *Se* σ_1, σ_2, σ_3 *designano le proiezioni sui piani coordinati di una porzione qualunque* σ *della quadrica si ha sempre*

$$\mathfrak{J} = a^2 \iint_{\sigma_1} yz d\sigma_1 + b^2 \iint_{\sigma_2} zx d\sigma_2 + c^2 \iint_{\sigma_3} xy d\sigma_3 = 0.$$

Infatti se si nota che, posto al solito

$$\Delta_1 f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},$$

dove si intende incluso nel radicale il doppio segno, è

$$d\sigma_1 = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d\sigma}{\Delta_1 f},$$

$$d\sigma_2 = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d\sigma}{\Delta_1 f},$$

$$d\sigma_3 = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{d\sigma}{\Delta_1 f};$$

si avrà

$$\mathfrak{I} = \iint_{\sigma} \left[a^2 yz \frac{\partial f}{\partial x} + b^2 zx \frac{\partial f}{\partial y} + c^2 xy \frac{\partial f}{\partial z} \right] \frac{d\sigma}{\Delta_1 f}.$$

Essendo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2\lambda}{a^2} x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2\mu}{b^2} y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2\nu}{c^2} z,$$

si otterrà infine

$$\mathfrak{I} = 2[\lambda + \mu + \nu] \iint_{\sigma} \frac{xyz}{\Delta_1 f} d\sigma = 0,$$

c. d. d.

Le quadriche cui si riferisce il teorema precedente non possono essere che iperboloidi (a una e a due falde).

Per l'ellissoide si dimostra in modo analogo al precedente il seguente teorema:

II° *Sia*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

l'equazione di un ellissoide; σ_1, σ_2, σ_3 *le proiezioni di una sua porzione* σ *sui piani coordinati. Qualunque è* σ *si ha*

$$a^2 \iint_{\sigma_1} yz d\sigma_1 = b^2 \iint_{\sigma_2} zx d\sigma_2 = c^2 \iint_{\sigma_3} xy d\sigma_3.$$

* * *

Questi teoremi sono manifestamente estensibili al caso di integrali multipli di qualsiasi ordine.

E precisamente, limitandomi agli enunciati, si ha:

I° *Sia*

$$\sum_1^n {}_i \lambda_i \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1,$$

l'equazione di una quadrica ad n *dimensioni; con* a_i $(i=1, 2, ..., n)$ *costanti qualsiansi e* λ_i *tali che*

$$\sum_1^n {}_i \lambda_i = 0.$$

Posto

$$\mathfrak{I} = \sum_1^n {}_i a_i^2 \iint_{\tau_i} \dots \int x_1 \dots x_{i-1} \, . \, x_{i+1} \dots x_n \; dx_1 dx_2 \dots dx_{i-1} \, . \, dx_{i+1} \dots dx_n ;$$

dove τ_i *designano le proiezioni sugli iperpiani coordinati di una porzione qualsiasi* τ *della data varietà algebrica, si ha per qualunque* τ,

$$\mathfrak{I} = 0.$$

II°. *Sia*

$$\sum_1^n {}_i \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1 ,$$

l'equazione di un ellissoide ad n *dimensioni;* $\tau_i (i=1, 2, ..., n)$ *le proiezioni di una porzione* τ *sugli iperpiani coordinati. Qualunque sia* τ *si ha*

$$\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}_2 = \dots = \mathfrak{I}_n ,$$

essendo

$$\mathfrak{I}_k = a_k^2 \iint_{\tau_k} \dots \int x_1 \dots x_{k-1} \, . \, x_{k+1} \dots x_n \; dx_1 \, . \, dx_2 \dots dx_{k-1} \, . \, dx_{k+1} \dots dx_n .$$

$$(k = 1, \; 2, \; ..., \; n).$$

. . . .

. . . .

Coralli giurassici del Gran Sasso d'Italia.

Nota del Dr. P. L. PREVER.

(Con una Tavola).

Due anni sono ebbi in esame dal Prof. Sacco una discreta collezione di Coralli abbruzzesi ai quali si aggiunsero di poi alcuni altri della medesima regione, stati raccolti dall'aiutante ingegnere Signor Cassetti del R. Ufficio Geologico. Lo studio di tali fossili mi parve allora interessantissimo, perchè la fauna giurassica dell'Appennino è pressochè sconosciuta e nuovi per l'Italia sono in buona parte i generi e le specie da me riconosciute in essi.

Le località da cui provengono i fossili in questione sono cinque: Rifugio del Gran Sasso d'Italia; tra Assergi e Fonte Portella; alta Val Cesarano, Paganica; Castel del Monte e regione Scoppita presso Calascio: tutte e cinque tali località si trovano sulle pendici meridionali del massiccio del Gran Sasso d'Italia; le prime tre sono relativamente vicine ad Aquila (nord-nord-est), a nord di Paganica, le altre due sono poste ad una trentina di chilometri ad est della medesima città. Il Prof. Sacco non precisa l'età degli strati dei primi tre giacimenti e riferisce gli altri due al Cretaceo; ma nella carta che accompagna i suoi lavori (1) segna tutte queste località colla tinta verde della Creta salvo la prima e la terza forse che, almeno così mi pare, ascrive al Giura.

Il tempo mi mancò allora di preparare una nota su quei fossili, non ne compilai che un elenco, il quale mi risultò poi incompleto, e che fu allora pubblicato dal Prof. Sacco e recentemente dal Prof. Parona (2); all'elenco ultimo pubblicato non

(1) Sacco F., *Il gruppo del Gran Sasso d'Italia*, " Mem. della R. Acc. delle Sc. di Torino ", ser. 2ª, LIX, 1907. — Id., *Gli Abruzzi*, " B. S. G. I. ", XXVI. Roma, 1907.

(2) Parona C. F., *Nuovi dati paleontologici sui terreni dell'Abbruzzo*, " B. R. C. G. d'Italia ", XXXIX. Roma, 1908.

vi è nulla da variare, bisogna solo aggiungere nove forme, delle quali quattro nuove, per completarlo; a quello dato dal Prof. Sacco bisogna pure aggiungere nove forme, ma bisogna altresì modificare qualche determinazione, così *Thecosmilia serrata* n. f. diventa *Stylosmilia Michelini* M. H.; *Acanthogyra Ogilviei* n. f. si cambia in *Acanth. columnaris* Og.; *Leptophyllia compressa* n. f. si muta in *Lept. Montis* From., e *Placastraea aprutina* n. f., cadendo in sinonimia la denominazione generica, diventa *Phyllastraea aprutina* n. f.

Sotto un certo punto di vista perciò potrebbe quasi parer superfluo stendere la presente nota per ripubblicare un elenco già noto, il quale, anche se si arricchisce di altri nomi, non cambia in nulla assolutamente le conclusioni cronologiche a cui ero pervenuto sin da due anni sono. Ma la fauna è molto notevole per i generi e le forme che racchiude, ed un elenco pubblicato in lavori in cui si parla pure d'altro può più facilmente sfuggire all'attenzione altrui di una nota; inoltre vi sono quattro forme nuove che credo bene illustrare, poichè io son certo che in ben altri luoghi vicini e lontani da questi si troveranno delle forme simili od eguali a queste; da ultimo non va trascurata la questione che riguarda la discordanza d'opinioni circa il riferimento cronologico di questi fossili, poichè se Sacco li ritiene cretacei, Parona, che ha studiati tutti gli altri fossili di Calascio, Ofena e Castel del Monte li riferisce al Titonico, riconfermando così l'opinione di Canavari (1), il quale, per la presenza di forme di Ellipsactinie comuni col giacimento di Stramberg e con giacimenti simili, ritiene pure titonici tali calcari. Per conto mio, di fronte all'elenco a cui son giunto ed ai confronti potuti istituire fra di esso ed altri di località mesozoiche, non posso dir altro che i Coralli di Calascio sono perfettamente uguali a quelli di Stramberg, cioè titonici, e che quei pochi delle altre quattro località su citate completano, se pur è possibile, questa lista, in modo da escludere da essa anche una sola forma cretacea, e da far ritenere, quantunque possa parer pretensione il dirlo, superflua ogni discussione al riguardo, ammenochè si voglia negare ai fossili qualsiasi valore strati-

(1) Canavari M., *Idrozoi titoniani della regione mediterranea appartenenti alla famiglia delle Ellipsactinie*, " Mem. R. Com. Geol. ", IV, Roma, 1903.

grafico, perchè, come felicemente osserva Parona (1) non dev'essere il caso di sospettare qui un rimaneggiamento di fossili giurassici accidentalmente giacenti nel Cretaceo. Il giacimento di Calascio sarebbe quindi di età titonica: nelle altre quattro località i Coralli studiati sono troppo scarsi per poter formulare un riferimento preciso, certo però le forme in esse rinvenute se non permettono per la loro scarsezza di dire con esattezza assoluta che si tratta pure di Titonico, come tutto mi induce a credere, confermano l'età giurassica di detti giacimenti.

Dirò che tutte le forme che si rinvengono in queste località furono pure riscontrate in giacimenti titonici, anzi per Castel del Monte abbiamo l'*Amphiastrea cylindrica* Og., sinora stata trovata solamente nel titonico di Stramberg.

Ecco l'elenco delle forme che ho distinte in tutte queste località:

Pseudochaetetes polyporus Qust.	Calascio
Amphiastraea Saccoi n. f.	Id.
„ *gracilis* Kob.	Rifugio del Gran Sasso
„ *basaltiformis* Et.	Id.
„ *cylindrica* Og.	Castel del Monte
Dendrogyra sinuosa Og.	Calascio
Acanthogyra columnaris Og.	Id.
Astrocoenia bernensis Kob.	Id.
Heliocoenia Humberti Et.	Tra Assergi e fonte di Portella.
Cyathophora Gresslyi Kob.	Calascio.
„ *Claudiensis* Et.	Id.
„ *globosa* Og.	Id.
Cryptocoenia Thiessingi Kob.	Id.
„ *Cassettii* n. f.	Id.
Phyllastraea aprutina n. f.	Id.
Montlivaltia obconica Mstr.	Id.
Thecosmilia virgulina Et.	Id. e Alta Val Cesarano.
„ *flabella* var. *compatta* Kob	Id.
Stylosmilia Michelini M. H.	Id.
Leptophyllia Montis From.	Id.
Epistreptophyllum commune Milasch.	Id.
Diplarea Isseli n. f.	Id.

(1) Parona C. F., l. c.

Tutte queste forme sono esclusive del Giura: tredici di esse sono in comune col giacimento di Stramberg, e di esse quattro sinora non erano state trovate che in esso; esaminando poi il mio elenco e quelli dati dal De Gregorio sui Coralli titonici siciliani (1) si scorge una grande affinità, e direi in parte identità di forme, il che sarebbe una nuova conferma circa l'età dei giacimenti in discorso.

Pseudochaetetes polyporus Qust. Fig. 4.

1883. *Pseudochaetetes polyporus.* Haug E., *Ueber sogennante Chaetetes aus mesozoischen Ablagerungen,* N. Jahrb. f. M. G. u. P., I, p. 175, tav. X, fig. 5, 6. Stuttgart (cum syn.).

Nel suo lavoro sui Coralli di Venassino (2) De Angelis osserva, a proposito del genere *Pseudochaetetes,* che quanto fu da Haug scambiato per la muraglia dei polipieriti non è che materiale di riempimento; perciò fa notare che nella sezione verticale data da Haug le traverse dovrebbero attraversare lo strato chiaro per saldarsi a quello oscuro, che sarebbe il vero ed unico muro. In tal caso il genere *Pseudochaetetes* non avrebbe ragione di sussistere rimanendo assorbito dal genere *Chaetetes,* e così la pensa De Angelis.

A meno di avere dei Coralli di eccezionale buona conservazione del resto rimane alquanto difficile poter risolvere in un modo o nell'altro la questione sollevata dal De-Angelis, ed io, che ho in questo giacimento degli esemplari che ricordano perfettamente le figure di Haug non so risolvermi: io non sono alieno dall' ammettere assieme con De Angelis che lo strato chiaro, invece di rappresentare la muraglia dei singoli polipieriti, sia dovuto a calcare di riempimento, ma non posso fare a meno di osservare, che, per quanto abbia esaminate numerose sezioni verticali, ho sempre visto le traverse ad arrestarsi a questo calcare, e mai le ho potuto scorgere che giungessero a quello che De Angelis chiama il muro. Lascio pertanto impre-

---

(1) De Gregorio A., *Coelenterata tithonica - Fossili di Sicilia,* " Ann. de géol. de paléont. ". Palermo, 1899.

(2) De Angelis D'Ossat G., *I Coralli del calcare di Venassino,* " Mem. R. Acc. Sc. Fis. Mat. ", 2ª. XII, pag. 10. Napoli, 1905.

giudicata la questione attenendomi per ora al riferimento generico di Haug.

I frammenti di Corallario appartenenti a questa forma non sono molto numerosi ed uniti con frammenti di Ellipsactinie, però nei loro caratteri specifici si accordano perfettamente colle figure e colla descrizione di Haug. La muraglia interna è forse un po' più spessa, invece la distanza fra i centri calicinali sembra un po' minore, rimanendo così anche diminuito lo spessore dello spazio extracalicinale; la grandezza dei calici è la medesima, forse nella forma aquilana essi hanno spesso una forma più irregolare; in sezione verticale i polipieriti mostrano riguardo alle traverse la stessa disposizione e sviluppo. Questa forma è citata dagli autori che se ne occuparono per il Malm, e da qualcuno con maggiori dettagli per il Titonico; in Italia Deninger la cita per il Malm della Sardegna. Località: Calascio, regione Scoppita.

Amphiastraea Saccoi n. f. Fig. 1, 2.

Il Corallario si presenta in massa subpiana non molto considerevole, ed è costituito da numerosi polipieriti prismatici, ricoperti da una epiteca assai sottile, visibile a malapena: al disotto dell'epiteca si scorgono delle numerose e sottili coste. I calici sono mediocremente grandi, poligonali, subeguali, con fossetta calicinale poco profonda: la muraglia esterna è mediocremente spessa, quella interna invece è sottile e non sempre molto netta; alle volte è anzi un po' confusa; essa generalmente si presenta di forma ellittica, qualche volta anche circolare. Essa bene spesso è libera per un gran tratto, in un punto però è sempre saldata alla muraglia principale; però accade spesso che essa si saldi a questa per un grande tratto, ed è precisamente in questo caso che non risulta più molto netta. La fossetta calcinale è eccentrica. I setti sono mediocremente numerosi, piuttosto spessi, subregolari, subeguali, arrotondati in punta; il più sviluppato, che raggiunge sempre il centro calicinale, parte quasi sempre dal muro esterno là ove ad esso si salda il falso muro interno; però non è sempre così, e qualche volta tale setto pur partendo dal muro esterno prende le mosse da un punto ove il falso muro è distaccato dall'esterno, e in

questo caso spessissimo altri setti, invece di arrestarsi al muro interno, si spingono sino a quello esterno. I due setti che comprendono questo più sviluppato sono anch'essi assai lunghi, quasi quanto il primo; gli altri sono mano mano più corti; il più corto è quello di fronte al più lungo. Frequentemente i setti appaiono riuniti alla loro estremità libera.

Le traverse sono piuttosto spesse, numerose, subequi-distanti, quasi sempre poste un po' obliquamente. Larghezza dei calici mm. 2 $^1/_2$ - 3$^1/_2$, lunghezza mm. 4 $^1/_2$ - 6: setti in numero di 16-20.

La forma alla quale questa si avvicina maggiormente è l'*Amph. Walteri* De Ang. dell'Urgoniano di Capri, tra altro, come in questa, i rapporti che intercedono fra il falso e il vero muro rappresentano uno stadio che collega le caratteristiche che si osservano nelle forme di *Amphiastraea* e di *Opistophyllum* ed anche di *Aulastraeopora*; differisce però dalla *Amph. Walteri* De Ang. per la forma dei calici, la loro grandezza, la diversa disposizione del tessuto vescicoloso, che unisce il falso al vero muro, per le traverse e la maggior regolarità nelle dimensioni dei polipieriti. Dalla *Amph. gracilis* Kob. si distingue facilmente per le dimensioni dei calici, il numero e la disposizione delle coste e la forma e nettezza del falso muro. Da quelle del Sopracretaceo del Monte d'Ocre si distingue pure assai facilmente per numerosi caratteri.

Il genere *Amphiastraea* ha i suoi principali rappresentanti nel Giura ed è discretamente diffuso nel Titonico; solo in Italia sinora furono trovati dei suoi rappresentanti nella Creta (1). Località: Calascio.

Amphiastraea gracilis Koby.

1896-97. *Amphiastraea gracilis*. Ogilvie M., *Die Corallen der Stramberger Schichten*, pag. 105, tav. XII, fig. 17, 18, 19. Stuttgart (cum syn.).

Il Corallario si presenta in condizioni tutt'altro che favorevoli ad un esame un po' accurato in causa della sua deplorevole conservazione, riesce quindi un po' difficile, anche nelle

(1) De Angelis D'Ossat G., l. c. — Prever P. L. in Parona C. F., *La fauna coralligena del Cretaceo dei Monti d'Ocre nell'Abbruzzo aquilano*, Mem. descritt. d. Carta geol. d'Italia, V, Roma, 1909.

parecchie sezioni sottili che ho eseguito, trovare dei calici in buono stato. Tuttavia la grandezza dei calici, la loro forma poligonale, lo spessore del vero muro, il numero, la forma e la disposizione delle coste, dei setti e delle traverse e il comportamento del falso muro, come anche l'aspetto esterno del Corallario e specialmente dei polipieriti non lasciano alcun dubbio circa il riferimento specifico dell'esemplare abbruzzese.

Questa forma, che probabilmente non è che una varietà della *Amph. basaltiformis* Et., non è stato sinora rinvenuta che nel Giura svizzero e nel Titonico di Stramberg; una sua varietà, che però si allontana discretamente dalla forma tipo, fu trovata nell'Urgoniano di Capri (1). Località: Rifugio del Gran Sasso.

Amphiastraea basaltiformis Et.

1889. *Amphiastraea basaltiformis.* Koby F., *Polypiers jurassiques de la Suisse*, Mém. Soc. Pal. Suisse, p. 433, tav. CXV, fig. 1, 1 *a*, 2, 2 *a*. Ginevra (cum syn.).

Anche questa forma è rappresentata da esemplari in pessime condizioni di conservazione, tuttavia tanto i caratteri generici quanto quelli specifici si possono ancora osservare discretamente bene. I polipieriti sono prismatici; causa il loro stato di conservazione non è possibile scorgere su di essi traccie di epiteca e di coste: il vero calice ha una forma esagonale; i calici sono piccoli. Essi misurano solo 5-6 mm. di larghezza, per cui si avvicinano ai più piccoli degli esemplari svizzeri, naturalmente anche i setti non sono molto numerosi; se ne contano da 12 a 18 circa. La loro forma e il loro sviluppo si può dire che è uguale affatto a quello degli esemplari svizzeri. Il muro è discretamente spesso, quello interno è circolare, talvolta ellittico, ancora abbastanza spesso, e frequentemente tocca in un punto o per un tratto il vero muro calicinale; talvolta però non lo tocca affatto. Sinora questa forma non era stata rinvenuta che nel Giura Svizzero. Località: Rifugio del Gran Sasso.

---

(1) De Angelis D'Ossat G., l. c.

Amphiastraea cylindrica Og. Fig. 3.

1897. *Amphiastraea cylindrica.* Ogilvie M., *Die Korallen der Stramberger Schichten,* pag. 106, tav. XII, fig. 8, 9, 10. Stuttgart.

Questa curiosa forma, che mi lascia qualche dubbio circa il riferimento generico, poichè non mi pare di riscontrare in essa i veri caratteri di Amphiastraea, e a dire il vero nemmeno degli altri generi conosciuti, è benissimo rappresentata da esemplari in forma ovoidale, subglobosa discretamente conservati. I caratteri che mostra l' esemplare meglio conservato sono perfettamente eguali a quello dell'esemplare tedesco descritto dalla Ogilvie, salvo che per i setti, i quali sono meno numerosi e sembrano talora completamente assenti da qualche calice; quest'assenza potrebbe però anche essere solo apparente. I setti sono così sottili che ritengo sia possibile vederli bene solo in esemplari di buonissima conservazione.

Questa forma sinora era stata solamente rinvenuta nel Titonico di Stramberg. Località: Castel del Monte.

Dendrogyra sinuosa Og. Fig. 7.

1897. *Dendrogyra sinuosa.* Ogilvie M., *Die Korallen der Stramberger Schichten,* pag. 126, tav. XVI, fig. 3, 3 *a*, 4, 4 *a*. Stuttgart.

Il Corallario si presenta in massa stesa, subpiana o un po' ondulata, talvolta un po' gibbosa. I caratteri esterni sono così netti che di primo acchito si può fare il riferimento degli esemplari a questa forma trovata a Stramberg. Ho eseguito delle sezioni sottili, ma queste risultano sempre assai opache e perciò non lasciano vedere come sarebbe desiderabile tutti i caratteri del Corallario; tuttavia ho potuto verificare che questi corrispondono esattamente in tutto a quelli che presenta la forma studiata dalla Ogilvie. Forse un carattere che non è così costante è quello presentato dai setti, i quali in alcune valli sembrano più spessi e in altre un po' più sottili. Nel resto non vi è alcuna differenza.

Questa forma era sinora stata solamente rinvenuta a Stramberg. Località: Calascio.

Acanthogyra columnaris Og.

1897. *Acanthogyra columnaris.* Ogilvie M., *Die Korallen der Stramberger Schichten,* pag. 131, tav. XVI, fig. 2, 2 *a*, 2 *b*. Stuttgart.

L'aspetto esterno del Corallario ricorda perfettamente un ammasso di piccole e svelte colonnine addossate le une alle altre. I calici sono irregolarmente poligonali, non molto grandi, larghi mm. 3 $^1/_2$ - 4, lunghi mm. 4 - 6, quindi un po' più piccoli che nella forma tipo della Ogilvie. I setti però sono in numero eguale a quello della forma tedesca, e così pure la forma abbruzzese ricorda quest'ultima per la forma e lo sviluppo dei setti, del muro e delle traverse.

Il genere *Acanthogyra* fu creato dalla Ogilvie per tre forme rinvenute a Stramberg. Località: Calascio.

Astrocoenia Bernensis Kob. Fig. 8.

1897. *Astrocoenia Bernensis.* Ogilvie M., *Die Korallen der Stramberger Schichten,* pag. 149, tav. XVI, fig. 7, 7 *a*. Stuttgart (cum syn.).

Un piccolo esemplare di Corallario dall'aspetto subcespitoso rappresenta questa forma, abbastanza facilmente riconoscibile, in questo giacimento. L'esemplare abbruzzese mostra i calici quasi superficiali, del diametro di mm. 1 $^1/_2$, serrati, poligonali, chiusi da un muro piuttosto spesso. I setti sono in numero di 20-24, essi sono abbastanza ravvicinati, spessi discretamente, specie quelli del primo ciclo. La columella è subcilindrica e ad essa si unisce alle volte qualcuno dei setti primarî. Le traverse sono forti e ravvicinate, subequidistanti. I caratteri insomma di questo esemplare corrispondono perfettamente a quelli della forma descritta dal Koby.

Questa forma sinora è stata rinvenuta solo nel Giura ; la Ogilvie la cita per il Titonico di Stamberg. Località: Calascio.

Heliocoenia Humberti Et. Fig. 9.

1897. *Heliocoenia Humberti.* Ogilvie M., *Die Korallen der Stramberger Schichten,* pag. 167, tav. XVIII, fig. 3, 3 *a*. Stuttgart (cum syn.).

Un solo esemplare, ma di discrete dimensioni, e ben conservato, rappresenta nel giacimento abbruzzese questa forma con tutti i caratteri ascritti ad essa. Il Corallario si presenta in

notevole massa convessa o subpiana a superficie un po' gibbosa con dei calici assai ravvicinati, circolari, spesso anche ellittici e piccoli, poichè non superano i mm 1 $^1/_2$ di diametro. I caratteri dei setti, del muro e delle traverse sono perfettamente simili a quelli accennati per questa forma dal Koby e dalla Ogilvie.

Questa forma trovata sinora solo nel Giura è anche citata dalla Ogilvie per il Titonico di Stramberg. Località: tra Assergi e Fonte di Portella (Paganica).

Cyathophora Gresslyi Kob.

1881. *Cyathophora Gresslyi.* Koby F., *Monographie des Polypiers jurassiques de la Suisse*, Mém. Soc. Pal. Suisse, VIII, pag. 98, tav. XXVI, fig. 8, 8 *a*, tav. XXIX, fig. 6. Ginevra.

Stanno a rappresentare questa forma nel giacimento abbruzzese numerosi frammenti non molto ben conservati, se si vuole, nei quali tuttavia si possono agevolmente riconoscere i particolari caratteri della forma. Il Corallario ha grossolanamente la forma di un fungo; i suoi calici sono piuttosto serrati, circolari e misurano da 4 a 6 mm. di diametro. I setti sono sottili, cortissimi, di ineguale sviluppo; molti si presentano, nel tubo calicinale lungo il quale discendono, come delle spesse e solide coste. I pavimenti sono forti, equidistanti ed orizzontali.

Questa forma è stata rinvenuta nel Giura. Località: Calascio.

Cyathophora Claudiensis Et.

1897. *Cyathophora Claudiensis.* Ogilvie M., *Die Korallen der Stramberger Schichten*, pag. 176, tav. XVI, fig. 11, 12. Stuttgart (cum syn.).

Gli esemplari abbruzzesi sono piuttosto in cattivo stato, tuttavia ho potuto trovarne qualcuno il quale mostra tutti i caratteri di questa forma. Anche le sezioni sottili che ho potuto eseguire mostrano, nella forma e sviluppo dei setti e delle traverse e nello spessore dei muri, i caratteri indicati per questa forma.

La *C. Claudiensis* è stata indicata dalla Ogilvie per il giacimento di Stramberg; altrove fu sempre rinvenuta nel Giura. Località: Calascio.

Cyathophora globosa, Og. Fig. 20.

1895. *Cyathophora globosa.* Ogilvie M., *Die Korallen der Stramberger Schichten*, pag. 178, tav. XVI, fig. 14, 14 *a*. Stuttgart.

Parecchi bellissimi esemplari, fra cui uno molto ben conservato, mi permettono di annoverare questa forma fra le presenti nel giacimento abbruzzese, La grandezza, lo sviluppo e la forma dei polipieriti, dei setti, delle traverse, lo spessore dei muri si mostrano perfettamente come negli esemplari figurati e descritti dalla Ogilvie.

È una forma che sinora era stata rinvenuta soltanto a Stramberg. Località: Calascio.

Cryptocoenia Thiessingi Kob.

1897. *Cryptocoenia Thiessingi.* Ogilive M., *Die Korallen der Stramberger Schichten*, pag. 181, tav. XVIII, fig. 10, 10 *a*. Stuttgart (cum syn.).

L'erosione ha parecchio lavorati i cinque frammenti di Corallario che vanno riferiti a questa forma, perciò non in tutti riesce agevole cogliere tutti i particolari della specie. Il Corallario si presenta in masse subarrotondate, irregolari, con dei calici piccoli, mediocremeute serrati, circolari generalmente, qualche volta ellittici. I calici misurano mm. 1 $^1/_2$ circa di larghezza, la distanza fra i centri calicinali è di mm. 2 $^1/_2$-3, precisamente come negli esemplari svizzeri. Anche i setti, come in questi esemplari, sono in numero di 20-24; i primi sei sono spessi e giungono siuo al centro, ove qualche volta s'incontrano, i sei secondari sono talvolta ancora spessi quanto i primari, ma sono più corti. Le traverse sono ben sviluppate ed equidistanti. Località: Calascio.

Cryptocoenia Cassettii n. f. Fig. 10, 11.

È un bel Corallario in massa laminare, colla superficie leggermente ondulata e con dei calici ravvicinati, piuttosto grandi, circolari, raramente ellittici, con fossetta calicinale quasi superficiale. Gli spazi intercalicinali sono discretamente larghi e coperti di coste spesse, diritte o ad angolo, confluenti. I setti sono in numero discreto, i primari sono spessi discretamente e

giungono sin quasi al centro della cavità calicinale, raramente però ivi si saldano fra di loro; i secondari sono soventi quasi spessi quanto i primari, ma sono un po' più corti; assai meno spessi, anzi talora molto sottili e molto più corti sono i terziari; quelli del quarto ciclo sono corti e sottili e non sono mai al completo. Le traverse sono discretamente numerose, subequidistanti od equidistanti, spesse, orizzontali, simulanti talvolta e assai bene dei pavimenti. Il diametro calicinale è di mm. 3-3 $^{1}/_{2}$; la distanza fra i centri calicinali è di mm. 5 — 7 $^{1}/_{2}$; i setti sono in numero di 40-48. Si distingue dalle altre Criptocoenie per il maggior diametro calicinale, ma specialmente per il numero dei setti. Località: Calascio.

Phyllastraea Dana.

Fromentel nel suo lavoro sui Coralli della Creta di Francia (1) propose il nome di *Phyllastraea* per le Favie a columella lamellare e il D'Achiardi lo adottò per alcuni fossili giuresi di Monte Cavallo. Però ben prima di Fromentel il Dana aveva già usato questo nome per delle forme di Coralli recenti, i quali hanno tutta l'aria di essere la stessa cosa dei Coralli che aveva in mente il Fromentel usando questo nome, quindi il genere, per priorità dovrebbe riferirsi al Dana. Stoliczka ha poi anch'esso proposto un nome generico nuovo " *Placastraea* „ per dei Coralli a columella compressa, laminare, con dei calici allacciati da un apparato setto-costale e con altri caratteri che ricordano così davvicino quelli di Phyllastraea che io credo dover collocare nella sinonimia di questo genere quello sopra accennato dello Stoliczka.

Phyllastraea aprutina n. f. Fig. 5, 6.

Il Corallario si presenta in piccola massa laminare leggermente ondulata e con numerosi calici piuttosto piccoli, circolari, il più spesso ellittici, ravvicinati discretamente fra di loro, con una fossetta calicinale mediocremente profonda. Le coste

---

(1) Vedi Prever P. L. in Parona C. F., l. c.

ed i setti sono granulati superiormente, così pure la columella; questa si presenta bene sviluppata, quasi sempre unita a qualche setto primario. I setti non sono molto numerosi, sono discretamente sviluppati, i primari sono piuttosto spessi, rigonfi all'estremità libera: i secondari sono un po' più sottili dei primarî, ma in lunghezza sono sviluppati quasi quanto essi, i terziari invece sono corti e sottili. Quelli del quarto ciclo, il quale è sempre incompleto, sono appena accennati. Il diametro dei calici è di mm. 3-4; i setti sono in numero di 30-42. Le traverse sono numerose, inequidistanti, inegualmente spesse, orizzontali o un po' inclinate. Località: Calascio.

Montlivaltia obconica Mstr.

1897. *Montlivaltia obconica*. Ogilvie M., *Die Korallen der Stramberger Schichten*, pag. 195, tav. XIII, fig. 4. Stuttgart (cum syn.).

Questa forma così caratteristica è rappresentata nel giacimento da parecchi grossi esemplari così tipici che si riconoscono di primo acchito. Lo spazio columellare si presenta lineare e i setti si mostrano numerosi, serrati, non molto spessi, diritti, e formano sette cicli, dei quali però l'ultimo è incompleto. Località: Calascio.

Thecosmilia virgulina Et. Fig. 12, 13.

1897. *Thecosmilia virgulina*. Ogilive M., *Die Korallen der Stramberger Schichten*, pag. 206, tav. XIV, fig. 4, 4 *a*. Stuttgart (cum syn.).

Il Corallario è poco elevato, di forma cespitosa ed è formato da polipieriti assai ravvicinati, circolari o ellittici. La fossetta calicinale è pochissimo profonda, i setti sono numerosi e formano quattro cicli, dei quali l'ultimo è incompleto. Questi setti sono piuttosto spessi, e frequentemente i primari si uniscono al centro della cavità calicinale formando una specie di falsa columella. Il diametro dei calici è di mm. 4-6; le traverse sono numerose, subequidistanti, robuste, spesse, poste obliquamente per rispetto al centro calicinale. L'esemplare abbruzzese che ho sott'occhio corrisponde perfettamente alle descrizioni e figure dell'Etallon e della Ogilvie, per cui mi limito a questi pochi cenni per non fare delle inutili ripetizioni. Sinora

questa forma è stata trovata solo nel Giura; la Ogilvie la rammenta pure per Stramberg. Località: Calascio e alta Val Cesarano (Paganica).

Thecosmilia flabella Blainv. var. *compatta* Kob. Fig. 14.

1897. *Thecosmilia flabella* var. *compatta*. Ogilvie M., *Die Korallen der Stramberger Schichten*, pag. 207, tav. XIV, fig. 5, 5 *a*, 5 *b*, 5 *c*. Stuttgart (cum syn.).

Questa varietà della *Th. flabella* è abbastanza comune nel giacimento giurese dell'Abbruzzo, e, come a Stramberg, non ho rinvenuta la forma tipo. Il Corallario raggiunge mediocri dimensioni, e mostra i polipieriti discretamente allungati, cilindrici od ellittici, piuttosto ravvicinati fra di loro e poco dicotomi. I setti sono mediocremente spessi, quelli dei primi due cicli si spingono sin quasi al centro della cavità calicinale, ove alle volte si uniscono fra di loro, specialmente i primari: del quarto ciclo generalmente si contano pochissimi setti, quelli del terzo sono ancora spessi, ma corti. Località: Calascio, alta Val Cesarano (Paganica).

Stylosmilia Michelini M. H.

1881. *Stylosmilia Michelini*. Koby F., *Monographie des Polypiers jurassiques de la Suisse*, Mém. Soc. Pal. Suisse, VIII, pag. 61. tav. XIII, fig. 3, 4, 5, 6, 6 *a*, 6 *b*, 6 *c*, 6 *d*. Genève (cum syn.).

Il Corallario è massiccio, gibboso con calici circolari a fossetta calicinale poco profonda. L'esemplare abbruzzese differisce da quelli conosciuti per avere dei calici abitualmente un po' più piccoli; invece di misurare da 2 a 3 mm. essi misurano mm. 1 $^1/_2$ — 2. Però tutti gli altri caratteri s'accordano perfettamente colle descrizioni dei vari autori, di modo che non ritengo opportuno creare una nuova forma basata unicamente sulla diversa grandezza dei calici. Tutto al più si potrebbe fare una varietà. Questa forma è abituale nei terreni giuresi. Località: Calascio.

Leptophyllia Montis From. Fig. 18.

1886. *Leptophyllia Montis.* Koby F., *Monographie des Polypiers jurassiques de la Suisse,* XIII, pag. 319, tav. XCII, fig. 1, 1 *a*, 2, 2 *a*, 3, 3 *a*. Genève (cum syn.).

Posseggo due esemplari di questa forma, ma tutti e due hanno subìta una notevole erosione, in guisa che sono incompleti, anzi uno si può considerare più come un frammento che un vero esemplare. Tuttavia i caratteri della forma si scorgono, se non tutti, in gran parte, assai nitidamente, specie nelle sezioni sottili. I due esemplari dovrebbero misurare, se fossero completi, mm. 45-50 di diametro. I setti sono in numero di 130 circa; essi sono sottili, simili fra di loro, regolari o subregolari quelli dei primi tre cicli, i quali raggiungono quasi il centro calicinale. Le coste e l'epiteca non si scorgono causa il logoramento, le traverse sono ben visibili; esse non sono molto numerose, sono subequidistanti e mediocremente spesse. Le faccie settali sono provviste di numerose granulazioni.

Questa forma è stata rinvenuta nel Giura di parecchie località. Località: Calascio.

Epistreptophyllum commune Milasch. Fig. 19.

1897. *Epistreptophyllum commune.* Ogilvie M., *Die Korallen der Stramberger Schichten*, pag. 255, tav. XI, fig. 13, 13 *a*, 13 *b*, 14. Stuttgart (cum syn.).

I Corallari isolati di questo giacimento sono quelli che più si presentano erosi e l'esemplare che io riferisco a questa forma non fa eccezione, così che parecchi dei caratteri della forma non sono molto ben visibili. Tuttavia con facilità si riconosce la specie, la quale nei caratteri che sono facilmente osservabili offre tutte le caratteristiche accennate dagli autori. È una forma questa che sinora è stata solo rinvenuta nel Giura; la Ogilvie la cita per Stramberg. Località: Calascio.

Diplarea Isseli n. f. Fig. 15, 16, 17.

Il Corallario, piuttosto elevato e fortemente ramificato, mostra i rami molto accostati fra di loro. I polipieriti sono liberi per tempo, quindi si mostrano assai lunghi; essi sono ci-

lindrici, oppure ellittici e alle volte variamente compressi e ricoperti di coste robuste, numerose, assai vicine fra di loro, granulate. I calici sono quasi superficiali e mostrano dei setti piuttosto fini, numerosi, retti o leggermente flessuosi, specialmente quelli dei primi tre cicli, i quali raggiungono la columella. Questa è spugnosa e poco sviluppata. Il diametro dei calici è di mm. 6-9; i setti sono in numero di 80-90. Le traverse sono mediocremente numerose, non molto spesse, subequidistanti. Località: Calascio.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. *Amphiastraea Saccoi* Prev.
„ 2. „ „ „
„ 3. *Amphiastraea cylindrica* Og.
„ 4. *Pseudochaetetes polyporus* Qust.
„ 5. *Phyllastraea aprutina* Prev.
„ 6. „ „ „
„ 7. *Dendrogyra sinuosa* Og.
„ 8. *Astrocoenia Bernensis* Kob.
„ 9. *Heliocoenia Humberti* Et.
„ 10. *Cryptocoenia Cassettii* Prev.
„ 11. „ „ „
„ 12. *Thecosmilia virgulina* Et.
„ 13. „ „ „
„ 14. „ *flabella* var. *compatta* Kob.
„ 15. *Diplarea Isseli* Prev.
„ 16. „ „ „
„ 17. „ „ „
„ 18. *Leptophyllia Montis* From.
„ 19. *Epistreptophyllum commune* Milasch.
„ 20. *Cyathophora globosa* Og.

Relazione sulla nota critica presentata dal Dott. Angelo Casu dal titolo: *Salsola Kali* L. e *Salsola Tragus* L.

Il lavoro che l'autore presenta all'esame della Commissione all'uopo incaricata dalla R. Accademia delle Scienze riguarda due specie di vegetali appartenenti al gruppo delle cosidette *Alofite*; di piante cioè viventi nei luoghi salsi, nelle arene marittime, ecc. e abbondantissime in tutta Europa nelle località suddette.

Lo studio di esse, quale vien presentato dal Dott. Casu, riveste un particolare interesse per la ragione che queste due specie furono da tempo immemorabile discusse dai botanici, e con vece assidua, riunite e separate, senza che siasi potuto mai giungere ad una plausibile conclusione. Di questa controversia l'Autore dà anzitutto un breve ed accurato riassunto.

Nella prima parte del suo lavoro poi l'Autore porta egli pure il suo contributo di osservazioni intese a risolvere la questione: contributo validissimo perchè reiterato e fatto su materiale vivente, in posto; e queste osservazioni gli permettono di schierarsi senz'altro fra coloro che, seguendo Linnè tengono separate le due specie.

Egli dimostra che i dubbi, le esitazioni, le contraddizioni, le quali tennero per così lungo tempo divisi in due campi i sistematici e sospesa la definizione esatta del valore specifico dei due vegetali, *erano il portato di un'osservazione insufficiente.* Gli studiosi, difatti, osservarono dal più al meno solo le piante pervenute a completo sviluppo, senza fermarsi a considerare con maggior attenzioue alcune fasi nel loro ciclo evolutivo, le quali avrebbero potuto fornir loro, e fornirono difatti al Casu, criterî diagnostici preziosi e costanti.

Studiando le due specie fin dai primordi loro, e seguendole fino a fruttificazione completa, l'Autore potè mettere in sodo che alcuni caratteri negati come *discriminanti decisi*, dagli Autori, *esistevano di fatto ad un dato momento* dello sviluppo, ma si facevano più tardi evanescenti, per ricomparire più tardi

ancora. E la ragione del fenomeno riconobbe il Casu essere dovuta all'azione meccanica della sabbia marina sospinta dal vento.

Un altro lato interessante assai di questa memoria vien fornito dall'Autore alloraquando egli prende ad esaminare la *facoltà* che una delle due specie alofite possiede *di poter vivere* cioè, *fuori dell'ambiente salso abituale* e *lungi dalla spiaggia.* Egli la trovò difatti (la *Salsola Tragus* L.) frequentemente sparsa sulla collina di Cagliari formata come è noto da calcare puro e sui detriti o discariche calcare smosse dalla mano dell'uomo.

Le osservazioni del Casu assumono qui un'importanza particolare perchè richiamano l'attenzione di chi legge su di un fatto ben determinato, cioè: sul *rapporto esistente* tra la *forma* di un vegetale che vive sempre in un *dato mezzo chimico*, e la *forma* che quel vegetale assume passando a vivere in un *mezzo chimico specificamente diverso.* Da questo rapporto l'Autore deduce ancora un criterio sistematico di natura biologica affatto nuovo e d'importanza indiscutibile.

La *Salsola Tragus* L. cioè si *adatta al cambiamento* di *substratum*, la *Salsola Kali* L. no! Però la *S. Tragus* vivendo sulla calce modifica anche relativamente poco la sua struttura esterna e per nulla l'interna. Solo il portamento è un po' differente, come vien dimostrato dalle fotografie fatte sul posto; ed anche questa differenza viene esaurientemente spiegata dall'Autore.

Coloro che si occupano di fisiologia vegetale sanno quanto interesse destino le osservazioni di questa natura, fatte su di esseri viventi in mezzi speciali come le *alofite*; poichè l'unilateralità stessa delle condizioni di sperimento, costituisce un mezzo bensì indiretto, ma valido assai per giudicare di quei fenomeni che i padri della fisiologia vegetale ascrivevano un tempo al *potere elettivo radicale* ed i moderni. con maggior precisione ascrivono alla *permeabiltà plasmatica.*

E così, come risultato del suo modesto ma paziente e sagace osservare il Casu conchiude:

1° La *Salsola Kali* L. e la *S. Tragus* L. sono entità specifiche ben definite;

2° La *S. Kali* è pianta crescente esclusivamente nei luoghi salsi e nel lido marittimo (alofita);

3° La *S. Tragus* L. alofita di elezione *può localizzarsi* anche in terreno calcare (calcicola facoltativa);

4° Le due specie presentano differenze *anatomo-morfologiche* costanti.

La Memoria è corredata di una tavola la quale mette in rilievo i punti salienti dimostrati nella memoria stessa.

Riassumendo, il lavoro del Casu, piccolo di mole, è però nel fondo, un contributo di valore per la conoscenza delle piante *alofite* in generale e per la storia delle due specie citate, in particolare. La Commissione crede quindi di doverlo proporre per la stampa nelle Memorie della Reale Accademia delle Scienze.

C. F. Parona,
Mattirolo Oreste, *relatore*.

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 20 Giugno 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Rossi, Carle, Renier, Pizzi, Ruffini, Stampini, Brondi, Sforza e De Sanctis, Segretario. — Scusano l'assenza i Soci Cipolla e D'Ercole.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, 30 maggio 1909.

È presentato d'ufficio il volume del Socio residente prof. Giuseppe Allievo, *Opuscoli pedagogici editi ed inediti* (Torino, tip. Artigianelli), 1909, offerto in omaggio all'Accademia:

Per la inserzione negli *Atti* vengono presentate:

dal Segretario una nota del Socio Cipolla, intitolata: *Ancora sull'itinerario di Corrado II nel 1026*;

dal Socio Renier una nota del Dr. Ferdinando Neri, *Di alcuni laudari settentrionali.*

LETTURE

Ancora sull'itinerario di Corrado II nel 1026.

Nota del Socio CARLO CIPOLLA.

Nelle sedute del 14 giugno 1891 e del 18 marzo 1894 ho intrattenuto questa Accademia intorno ad alcune questioni riguardanti l'itinerario di Corrado II nell'Italia superiore durante l'anno 1026.

Ho allora parlato dei diplomi St. 1910, 1911, 1912, de' quali il primo e l'ultimo sono datati da *Piscaria*, e l'altro pareva datato da *Episcoparico*, secondo che leggemmo il Lupi, ed io.

Di questi diplomi si occupò testè l'illustre prof. Harry Bresslau (1). Egli meco conviene nella comune identificazione di *Piscaria* con Peschiera. Mantengo anch'io l'identificazione col villaggio di Peschiera sul Lago di Garda. Si potrebbe pensare a Peschiera Maraglio, ma trattasi di un villaggio sull'isola di Siviano o Montisola sul Lago d'Iseo: e non pare che una deviazione verso l'interno di un lago possa ammettersi per un esercito in marcia: oltre a questo bisognerebbe dimostrare l'antichità di quel luogo. Meno difficile sarebbe l'identificazione con Peschiera Borromeo a 10 chilometri da Milano, ma la più ovvia identificazione è pur sempre quella coll'antica e celebre Peschiera sul Garda.

Rispetto al dipl. St. 1911, il Bresslau meco si accorda nel ritenere che la pergamena, conservata a Bergamo, sia proprio l'originale: alla quale conseguenza egli giunge con ragioni più valide di quelle che a me erano sembrate sufficienti.

Il nome del luogo donde il diploma è dato, viene interpretato ora dal Bresslau. Egli legge non più " Episcoparico ", ma " Episcoparia " identificando il villaggio con Vescovaro, frazione del comune di Broni (Voghera).

---

(1) *Excurs z. d. Diplomen Konrads II*, in " Neues Archiv ", 1908, vol. XXXIV, p. 71 sgg.

Ad un'altra questione dedica alcune acute osservazioni il Bresslau. Nel colmo dell'estate di quell'anno 1026, Corrado si ritirò nei luoghi freschi, secondo che narra Wipone (1). A me parve probabile che il cronista alluda alla Brianza, identificandosi coll'Adda (2) il fiume di nome *Atim*, *Aitim*, che si legge presso quello scrittore. Il compianto G. Pagani (3) credette invece che il passo di Wipone dovesse mutarsi, sicchè, introducendovi un'arditissima mutazione congetturale, fece fare a Corrado un lungo giro nell'Italia media. Io tentai (4) di mantenere la mia opinione.

Ora il Bresslau (5), ritenendo infondate le ipotesi del Pagani, ritorna a pensare all'Italia superiore; non si crede tuttavia autorizzato a giungere ad una identificazione piena e precisa. Così aggiunge essere ugualmente fondata l'opinione, che a lui arrise, secondo la quale *Atim* è l'Adige, e quella che invece identifica questo fiume coll'Adda. Secondo la prima di queste due opinioni dovremo credere che Corrado abbia passato l'estate sulle ultime propaggini delle Alpi trentine; secondo l'altra, dovremo invece credere ch'egli sfuggisse alla canicola nella Brianza. Egli mette innanzi le ragioni che, a suo credere, militano per l'una e per l'altra opinione, e non si decide.

Riferisco il passo di Wipone: " Rex vero Chuonradus nemini " cedens, nisi solo Deo et caloribus aestivis, ultra Atim (Aitim) " fluvium propter opaca loca et aëris temperiem in montana " secessit, ibique ab archiepiscopo Mediolanensi duos menses et " amplius regalem victum sumptuose habuit. Hinc decedens " tempore autunnali Italiam planam iterum peregrans... „.

A me pare che l'accenno all'arcivescovo di Milano ci sospinga a pensare non al Veronese, ma alla Brianza e al Comasco, immediatamente al settentrione di Monza (6).

---

(1) *Vita Chounradi imp.*, " Mon. Germ. Script. „, Script. XI, 265.

(2) *Sopra un passo controverso dello storico Wipone*, " Arch. st. lomb. „, 1891, XVIII, 2, 157 seg.

(3) *Che fiume sia l'Atis*, ecc., ivi, 1892, XIX, 1, 5 seg.

(4) *Nuove considerazioni sopra un passo controverso*, ecc., ivi, XX, 1, 377.

(5) Loc. cit., pp. 73-5.

(6) C. Bertacchi, *Diz. geogr.*, I, 309, scrive: " Brianza. Regione collinosa della Lombardia, bellissima, a N. di Milano e di Monza, compresa in gran parte nella prov. di Como, tra i fiumi Lambro e Adda „.

Oltre a questo motivo di carattere geografico, non mi pare del tutto trascurabile anche una ragione letteraria.

Già avvertii nel primo articolo sopra il passo di Wipone (1), che c'è una tradizione letteraria, la quale descrive come deliziosa e bellissima la regione del Lario. Questa tradizione, risalendo all'età classica (2), ebbe sviluppo nel medioevo. Ho citato allora un passo di Cassiodoro (3) ed uno di Ennodio (4). In ambedue questi passi si unisce il pensiero dell'Adda, con quello della descrizione topografica. Anzi Ennodio si accosta sempre più al concetto di Wipone, parlando dell'*estive nevi*, che rendono graditi quei luoghi.

La tradizione letteraria annovera poi il carme di Paolo diacono sul Lario (5), che è uno degli scritti poetici più tersi ed eleganti di quello scrittore. Per altro non si encomia la mitezza del clima nell'estate, ma nell'inverno, mentre le rive hanno eterna primavera, e gli olivi non perdono mai le loro foglie.

A questi passi che non avevo dimenticati del tutto l'altra volta, ne aggiungo un altro pure di Paolo diacono, la cui somiglianza colle parole di Wipone non è meno chiara. Parla Paolo (6) di Monza, e soggiunge: " Quo in loco Theudericus " quondam Gothorum rex palatium construxit, pro eo quod " aestivo tempore locus ipse utpote vicinius Alpibus, temperatus " et salubris existit ".

Non intendo di affermare che Wipone abbia avuto sott'occhio, mentre scriveva, l'uno o l'altro dei passi sovra citati. Ma parmi lecito esprimere la supposizione che egli si schieri fra coloro che, per questa o per quella via, appresero a lodare quei luoghi, che gli scrittori migliori e più stimati nella letteratura medioevale, continuando l'uso classico, usavano volentieri encomiare. L'affinità del passo di Paolo con quello di Wipone è al postutto grandissima, anche se non ci costringe ad ammettere una relazione immediata e diretta.

---

(1) " Arch. stor. lomb. ", 1891, XVIII, 1, 167.
(2) Cfr. De Vit, *Onomasticum*, s. v. Larius, IV, 48.
(3) *Var.*, XI, ep. 14 (ed. Mommsen, p. 342-3).
(4) *Ep. ad Faustum*, ed. Vogel, p. 15-6.
(5) *Poëtae aevi Carolini*, I, 142-3.
(6) *Hist. Lang.*, l. IV, c. 21 (*Script. Lang.*, p. 126).

Di alcuni laudari settentrionali.

Nota del Dr. FERDINANDO NERI.

Le *Laudi genovesi del secolo XIV*, ed. Crescini e Belletti, insieme con i *Frammenti di laudi sacre in dialetto ligure antico*, ed. Accame (1), e le prime *Laudi del Piemonte*, ed. Gabotto e Orsi (2), risalgono ad una fonte comune; ciò che avvertì, nel dar notizia d' " una silloge ignota di laudi sacre ", il Cian (3), sulla scorta dell'Indice del Tenneroni, ora pubblicato come un saggio di riordinamento della nostra antica poesia religiosa (4). Una serie di quelle laudi ricorre in più altri mss., mal noti o sconosciuti, e attesta di certo l'esistenza d'un laudario-tipo, di base umbra e toscana, divulgato nella regione subalpina.

Nella tavola che segue, ritraggo le rubriche delle feste ed i capoversi del laudario di Saluzzo, *S* (5), e designo con *B* le

(1) " Giornale ligustico ", X, (1883), p. 321 sgg. e " Atti della Società Ligure di storia patria ", XIX, (1887), p. 547 sgg.

(2) *Scelta di curiosità letterarie*, disp. CCXXXVIII, Bologna, 1891.

(3) *Dai tempi antichi ai tempi moderni. Da Dante al Leopardi* (nozze Scherillo-Negri), Milano, [1904], p. 267 sgg.

(4) *Inizii di antiche poesie italiane religiose e morali*, Firenze, 1909.

(5) Archivio della Confraternita del Gonfalone, numero d' inv. 31, mm. 264 × 200; fortemente rilegato con assi coperti di pelle; membran., di carte 84, diviso a quinterni, cominciando dalla c. 2 (il primo, c. 2-10, ecc, tranne c. 62-69, ch'è quaderno); due rozze miniature a c. 6 *a* e 13 *a*. Precedono gli *officia*, con interposte a c. 17-21 orazioni dialettali: *La posança del pare nos confort... Belg signor e freyli et conpagnon.* Hic incipiunt recomendaciones. *Noe se tornerema devotament al altissim de nostre segnor* ecc. Nella 2ª e nella 13ª è ricordato *meser lo marchix de saluce* e nella 14ª i (*segnor*) *consogler de la comunita de saluce.* Fra gli antichi inventari della *domus disciplinae*, quello del 1401 incomincia a registrare " librum unum pro laudis ", e tutti i caratteri del ms. fanno pensare si tratti di questo stesso: v. C. Moschetti, *Un Affresco del principio del sec. XV: una lauda sacra*, in " Picc. Archivio storico dell'ant. Marchesato di Saluzzo ", I, p. 131. — Dopo la nota di C. Muletti nelle *Memorie stor.-diplom.*, T. IV, Sal. 1830, pag. 293-96 (v. Biondelli, *Saggio sui dialetti gallo-italici*, Milano, 1853, pag. 601), il laudario fu citato più volte, e n'era anche annunziata la pub-

laudi di Bra (1), con *T* quelle di un ms. del Museo Civico di Torino (2); e questi, per la distribuzione degli uffizi latini e delle " recomendaciones „ e canti in volgare, più si riaccostano al laudario, pubblicato, di Carmagnola, *C* (3); *R* indica il ms. Varii 112 della Biblioteca Reale, in Torino (4), che, privo di

---

blicazione: Gabotto, *Lo Stato Sabaudo*, vol. III, Torino, 1895, p. 225. L. Frati, nel " Giornale storico „, LIII, p. 145, lo rammenta fra i codici omessi dal Tenneroni; questi inserì gli inizi dei sette frammenti dati dal Muletti: ma due soltanto sono inizi di laudi: p. es., " Or s'aprossima lo tempo: che lo rey del paradiso... „ è la seconda stanza della lauda 1, e " Per zo che ti paro: si oribile figura „ deve ricercarsi in *Quando t'allegri, omo d'altura*.

(1) Confraternita dei Disciplinati bianchi: sulla quale, v. A. Mathis, *Storia dei monum. sacri e delle famiglie di Bra*, Alba, 1888, p. 90 sgg. D'un ms. più antico, membran., legato in assicelle, riman solo un quinterno finale (con poche laudi e preci prosastiche in volgare), dove, già dalla 3ª c., si riconoscono le aggiunte di mani diverse; il ms. completo, mm. 290 × 207, cart., legato in pergamena, è, sino alla 45ª lauda (41 della numerazione che indicherò), copia per mano di notaio (" de abriono „), firmata e datata, luglio 1497; poche altre ne furono scritte in seguito. Ag. M. Mathis, *Gli scrittori braidesi*, Bra, 1903, p. 7, scorge il nome dell'autore in una scritta della copertina: ma i " versicoli „ che dice d'aver composti quel *petrus vietus* nell'anno 1559 si riducono a un distico per la pace conclusa il 20 d'aprile; e gli sia pur giunta con qualche giorno di ritardo la notizia di Cateau-Cambrésis, di troppi anni tarderemmo noi con attribuirgli le laudi! — Di queste, sei erano state comunicate per le cit. *Laudi del Piemonte*, ma con larghi mutamenti nel testo.

(2) Sezione d'arte antica, nº 3765 (acquisto del 1897), mm. 194 × 286; la legatura di pelle, stampata d'una croce. Son come due volumi riuniti: il primo di 89 carte, con in fine la *Tabula*, il secondo di 72 (+ 1); avvertirò quando la c. appartiene a questa seconda numerazione. L'intero ms. si fregia d'una serie di disegni a penna ed acquerello di sepia, su temi sacri, secondo gli uffici e le laudi: il Salmista, la Vergine nella mandorla raggiata, l'Annunciazione, la Vergine di misericordia che ripara col suo manto due gruppi di battuti; e questi, sotto la loro cappa, in ginocchio, accompagnano le scene della Passione e dell'anno sacro; nella seconda parte, prevale la decorazione marginale.

(3) L'ediz. Gabotto-Orsi fu condotta sul ms. N. V. 37 della Nazionale di Torino (Peyron, *Codices italici*, p. 168; ora distrutto).

(4) Sec. XV, cm. 20 × 14; legatura moderna della Biblioteca stessa; quantunque non se ne possa stabilire la provenienza, è probabile fosse acquistato a tempo di D. Promis; consta di 44 carte in 3 fascicoli, di 6, 8 e 8 fogli rispettivamente: il primo di mano diversa, e dallo stato delle due carte vicine (12 *b* e 13 *a*) appare che non lo dovettero essere sempre. È questo

tali caratteri esterni, vuol essere nondimeno studiato nello stesso gruppo. Faccio precedere, quando occorrano, le sigle dei frammenti di Pietra Ligure, *L*, e delle laudi di Genova, *G*, poichè gli uni e le altre si possono assegnare al sec. XIV; i mss. piemontesi, ed anche *P*, solo casualmente pisano (1), si mantengono fra i limiti del sec. XV: *S* forse precede di pochi anni; *T*, per i disegni che lo adornano, sconfina nel XVI. Delle raccolte a stampa segno il numero d'ordine, e dei mss. le carte, trànne *B*, che non le ha numerate, e, come per *S*, ne incomincio la serie con le " Laude tocius anni Et primo dominica de adventu „ (2).

c. 29 *b*. *Incipiunt laude que dicuntur secumdum ordinem infrascri*[*p*]*tum secumdum bene placitum* (3) *rectoris domus discipline saluciarum; Prima dominica et qualibet dominica de advenctu dicatur ista:*

[1] Ogno homo cum devocione: S-alegre in questo sancto avento.
G, I. *B*, I. *C*, I. *P*, II. *T*, c. 54 *a*. *R*, c. 18 *a*.

c. 30 *b*. *De nativitate domini usque ad epiphaniam dicatur ista lauda:*

[2] Or -e -nato l-agnelo: xpo nostro segnore.
G, II. *B*, II. *C*, II. *P*, III. *T*, c. 55 *b*. *R*, c. 13 *a*.

c. 31 *b*. *In epiphania domini et per octavam dicatur ista lauda:*

[3] Cerchemo lo salvatore: Cum li re(y) in compagnia.
G, III. *B*, III. *C*, III (4). *P*, IV. *T*, c. 63 *a*. *R*, c. 23 *b*.

---

il ms. cui accenna il Salvioni, *Nel 25° anniversario cattedratico di G. I. Ascoli*, Torino, 1886, p. 6 *n*. — Nella stessa collezione il ms. n. 13, dal quale il Cipolla trasse alcune *Laudes Jacoponi layci*, " Giorn. storico „, I, p. 424, e il n. 83 *bis*, di 6 carte, con le *Laude* d'un messer Dino da Torino, ed. da G. Minoglio, Torino, 1880, certo non piemontesi e non anteriori al secolo XVI.

(1) Cian, cit., p. 272.

(2) Si escludono così le prime quattro laudi: per la 3ª, v. n° 39; le altre ricorrono nuovamente nel ms.

(3) Ms. *dicitur* e *placitis*.

(4) *B*, *Noi cerchemo; C*, *Querchemo*: la stessa lauda — e così *Dio te salvi* e *De*[*o*] *te salvę, santa croxe*, *Piangemo* e *Pianzamo con dolore* — figura due volte, senza rinvio, nel Tenneroni; e riuscirebbe più sicuro l'ordinamento secondo le rime, come, sull'esempio del Raynaud, nella *Bibliografia* di G. B. Festa, " Roman Studien „, XXV, 1908, p. 564 sgg. L'*explicit* di P risponde esattamente, ciò che non sempre accade (nella lauda seg., ad es.); non ho tenuto conto, al n° 6, di *P* XXI, che discorda anche nel capoverso: *O stella gloriosa e matutina*.

c. 32*b*. *Dominica prima post Octavam epiphanie d. i. l.*
[4] Bon yhū y -me lamento: E pianzo cum dolore (1).
B, iv. *C*, v. *P*, xxxiv. *T*, c. 76*a*. *R*, c. 40*a*.

c. 33*a*. *Dominica secunda post Octavam epiphanie d. i. l.*
[5] Or unda porralo scampare: Lo dolento peccatore.
G, vi. *B*, v. *C*, vi. *T*, c. 77*b*. *R*, c. 38*a*.

c. 34*b*. *In purificacione beate marie et per totam octavam d. i. l.*
[6] Oy stella matutina: Pina de grande splendore.
G, vii. *B*, vi. *C*, vii. *T*, c. 21*a*. *R*, c. 20*b*.

c. 35*b*. *Dominica prima post octavam purificacione* (sic) *d. i. l.*
[7] E te prego alta croxe: Che tu debi inclinare
B, vii. *C*, xiii² (2). *T*, c. 40*a*.

c. 36*b*. *Dominica prima in quadragexima et tercia novembris dicatur lauda ista.*
[8] Pianzemo cum dolore: Tuti li nostri peccay
G, iv. *B*, ix (3). *C*, viii. *P*, xxix. *T*, c. 68*a*.

c. 37*b*. *Dominica secunda in quadragexima d. l. i.*
[9] Quando i -te viste ferire: A -lo core cum la lanza,
G, xvi. *B*, x. *C*, ix. *P*, xxviii. *T*, c. 42*b*. *R*, c. 31*a*: cfr. 35*a*: “ O figliol car o speranza mia | Cum ti me creve morire | Quant te viti ferir al core | Cum quella peinosa lanza || O qua[n]t te vist lo cor ferire... „.

c. 38*b*. *Dominica tercia in quadragexima d. i. l.*
[10] Venite a -la croxe: A -vedere lo me amore
G, xvii. *B*, xi. *C*, x. *P*, xxx. *T*, c. 38*b*. *R*, c. 30*a*.

c. 39*b*. *Dominica quarta in quadragexima d. i.* .
[11] Voy qui amay yhū d-amore: Veniti a pianzer la passione.
G, xxiv. *B*, xii. *C*, xi. *P*, xxxi. *R*, c. 32*b* (cfr. c. 6*b*).

Prosegue con la stanza: “ E songno maria qui -o -lo cor tristo „. Su di una lauda, diversa dopo la stessa ripresa, che s'intralcia con altri pianti di Maria, dovrò ritornare in fine; e così per il nº 15 *Or pianzemo* e 27 *Pianzemo, gente*.

---

(1) La ripresa e le prime tre stanze ancor leggibili nell'affresco di Saluzzo: v. Moschetti, cit., p. 133; il testo del Muletti, IV, 293, ritorna invariato in Roggero-Bargis, *Saluzzo*, Saluzzo, 1885, p. 57 e nella *Guida storica*, Torino, 1901, pp. 40-41.

(2) Ed. cit., p. 33; “ *Io ti prego* „; per isbaglio, lo stesso num. è dato a “ *Donne e signori* „.

(3) *B* reca anche questa nella *dominica secunda*, per la quale ha due laudi, e nella *dom. prima* “ Oy chi non debe servire : a cusi dolze segnore „, *S*, 24. — *P* e *T* (*H*)*or piangemo*.

c. 40*b*. *Dominica quinta in quadragexima d. i. l.*
[12] Maria pianze a la croxe: Lo so figlol chi moria
G, xv. *B*, xiii. *C*, xii. *P*, xxvi. *T* [c. 43] (1). *R*, c. 28*a*.

c. 41*a*. *Dominica sexta in quadragexima d. i. l.*
[13] Done e segnori: Cum gli cor pianzenti
B, xiv (2). *C*, xiii[1]. *P*, xxxvi.

c. 42*a*. *In annuntiatione beate marie virginis.*
[14] Or -e venuto lo tempo: De ihū salvatore
G, viii. *B*, xvii. *C*, xvi (3). *T*, c. 22*b*. *R*, c. 22*a*.

c. 43*a*. *In die veneris sancto* (sic).
[15] Or pianzemo dura zente: La morte de xp̄e omnipotente
B, xv *In dominica de palmis*, reca *Pianzemo, zente* (v. nº 27); e di nuovo, alla fine del ciclo annuale, xxxviii, *In die veneris sancti*, con la ripresa " Pianze maria cum dolore | che l -e morto lo creatore „; *R*, c. 34*a* (cfr. *G*, xxii: v. 3 " Et ella lo vi preixo e ligato „).

c. 44*a*. *In festis paschalibus et per octavam d. i. l.*
[16] Voy qui pianzi cum dolore: Lo bon yhū crucifixo
G, v. *B*, xvi. *C*, xx. *P*, vii. *T*, c. 69*b*.

c. 45*a*. *Dominica post octavam pasche d. i. l.*
[17] Quando tu te alegrij: Homo de granda altura.
Il contrasto jacoponico: *B*, xviii. *C*, xxi; i primi versi in *L*, x, con la rubrica *Disputatio inter mortuum et vivum*, come *Disputatio mortui et vivi* in *P*, xliv.

c. 46*a*. *In festo sancte crucis et per octavam.*
[18] De ve salve sancta croxe: Arbor d-amore piantao.
G, xix. *B*, xix. *C*, xvii. *P*, xxiv. *T*, c. 37 *b*.

c. 47*b*. *Dominica prima post octavam sancte crucis*
[19] Or chi-a si duro lo core: Che no pianza de dolore.
G, xviii. *B*, xx. *C*, xxii. *P*, xxvii. *T*, c. 41*a*. *R*, c. 36*b*.

---

(1) Sebbene la numerazione si continui, dopo la c. 43 *b*, una è strappata: la *Tabula* nota " Maria pianze „, a fol. xxxxiiij „; si riprende col v. " figliol mio a-qui me dei tornare „ della 2ª stanza.

(2) " Et dicitur in die veneris sancti et quattuor diebus precedentibus „; i pochi fogli del ms. membran. che ho ricordato, dopo gli ultimi cinque versi di *Maria pianze* secondo il testo di *G*, contengono questa lauda, seguìta da *Pianzemo gente*, *Ave soperna e gloriosa croce* (2 volte), *Quando tu te alegri*, *Madre de dio nostro segnore*.

(3) In questi due, dopo la Pasqua: *T* manca della ripresa: inc.

Or he venuto lo tempo
De la gratia divina
Che l-angelo gabrielo
Si vene a una fantina.

c. 48*a*. *Dominica secunda post festum sancte crucis,*
[20] Oy vergen glorioxa: sempre sia laudata
L, VII. *G*, XI. *B*, XXXII (1). *C*, XXIX⁴. *P*, LIII. *T*, 2ª num., c. 55*b*. *R*, c. 25*a*.

c. 49*a*. *Dominica tercia post festum sancte crucis.*
[21] Laudato si cripste: E la vergen maria
L, V. *G*, XIV. *B*, XXXV. *P*, VI. *T*, c. 75*a*. *R*, c. 14*b*.

c. 49*b*. *Dominica tercia aprillis et tercia dominica novembris.*
[22] Chi x̄piano se chiama: Viva cum grande temeranza
B, XXII. *C*, XXIX³ (2). *P*, XV.

c. 51*a* (3). *In festo penthecostes et per octavam dicatur ista lauda.*
[23] Spirito sancto in noy desenda: Oy nostro dolze consolatore
B, XXI. *C*, XXIV. *P*, VIII. *T*, c. 72*a*.

c. 51*b*. *Die dominica prima jullij d. i. l.*
[24] Qui no servira voluntera: Con devocion a-lo segnore
B, VIII. *C*, XXIX². *P*, XVI? *T*, 2ª num., c. 48*a*. *R*, c. 38*b*.
C, XV, con la stessa ripresa (in questi mss., " Hor chi non de' servire „), reca una lauda diversa.

c. 52*a*. *Die dominica secunda Jullij et per octavam d. i. l.*
[25] Mare de dio nostro segnore: Pregay lo vostro figlo cum dolze amore.
B, XXV (4). *C*, XXXVI. *T*, c. 28*b*. *R*, c. 39*b*.

c. 52*b*. *In festo marie magdalene d. i. l.*
[26] Cum noy pianze magdalena: Cum noy pianzeti compagnia
G, XXI. *P*, X. *T*, c. 83*a*. *R*, c. 27*b*.
B, XXIV " Iterum in festo magdalene „; chè prima, la XXIII, " Pietossa magdalena | de li peccatori sey madre „ risponde a *L*, VIII (5) e *C*, XXXI.

---

(1) *B* " In festo omnium sanctorum „; *C* (p. 79, errore di numeraz.) " In festo sanctorum et omnibus proprium „; alla qual festa *P* e *T* assegnano la lauda seguente; *B* " dicitur toto anno cuiusvis sancti vel sancte „. — Accolgo *P*, LIII, *O Vergine gloriosa madre*, perchè l'expl. " ... che ne perdone „ ritorna in alcune stanze della lauda, e variamente secondo i mss.

(2) *B* " De mense Junij „; *C* " Lauda ad beneplacidum R[ectoris] „. P *Hor che Christiano si fa chiamare* discorda nell'expl., ma è " Lauda del giuditio „ come appunto le altre.

(3) Qui v'è un salto nella numerazione delle carte, non giustificato dal contesto.

(4) V. *Laudi del Piemonte*, p. 117; invertito l'ordine delle stanze, con l'inc. " Chi vole servire a Jesu Christo „ v. laudi dei Battuti di Rendena.

(5) Dei quattro frammenti che non trovano riscontro in *G* (v. ACCAME, p. 554), uno è questo, acefalo; il II, *Zoanne da De' mandao*, si ritrova in *T*, 2ª num., c. 40 *a* e 68 *b* (completa): v. nel Tenneroni *Jo Jovanni Baptista*: la sigla dev'essere Vat. 4 *bis* (4872, dal quadro dei mss.). Per il X, v. nº 17, e IV, fra le laudi di *B* che mancano in *S*.

[[27] *In dominica prima Augusti*

Pianzemo gente cum tristeza: La morte de dio omnipotente

Col v. 8 " A-la croxe in questo dy " della lauda precedente, si termina la carta; la seguente è strappata, e la c. 55*a* (1) riprende con " Deffendete che tu -e acusao " ch'è il v. 38 di " Pianzemo gente ": cfr. nº 11 e 15. Seguo la rubrica di *C*, XXV.]

c. 55*b*. *Ista lauda dicatur in die sancti dominici et sancti petri et sancti thome et sancti vincencij et sancte Katerine de senijs.*

[28] Laudato sia cripsto e la vergen maria

Cfr. nº 21: con la stessa ripresa, seguono altre letanie: " Laudato sia lo gran seraphico..... " " Da poi vene sancta persona " " Da presso lo angelico doctore " ecc.

c. 56*b*. *In assumptione beate marie usque ad dominicam primam septembris*

[29] A li vostri grandi honori: Dolza vergem maria

B, XXVI. *C*, XXVII. *P*, XIX. *T*, c. 26*a*.

c. 57*a*. *Dominica prima septembris dicatur ista lauda.*

[30] Madona sancta maria: Mare de lo salvatore

L, VI (2). *G*, X. *B*, XXVII. *C*, XXXII. *P*, XXII.

c. 57*b*. *In nativitate beate marie virginis d. i. l.*

[31] Salve regina: Sore li angeli exaltata

L, III. *G*, IX. *C*, XXVIII. *T*, c. 27*b*. *R*, c. 17*a*.

[*B*, XXVIII. *In honore beate Marie virginis*, e prima, incompiuta, fra le quattro laudi che ho indicato come precedenti la serie. Qui poi, XXIX, *In nativitate beate marie virginis*, segue la lauda

Laudemo lo creatore: Anchoi nasce maria

L, IV. *T*, 2ª num. c. 53*b*.

E l'anno sacro vi si continua: *Dominica prima et secunda octobris*, XXX, " Voi chi amati iesu de amore " (v. nº 11), e *Dominica tercia et quarta octobris*.

Segnori per dio or pianzemo: e faciamo compagnia

C, XXXIII. *P*, XXXV.

---

(1) V. la nota per la c. 51 *a*; di qui, seguo la numerazione antica.

(2) " ... maire sei de li peccaor ", ma è la stessa lauda: così, dei quattro inizî del Tenneroni, due si riducono a questa; invece, " Madona santa Maria: mare d'ogni pecadore " del ms. udinese rientra nel gruppo cortonese e aretino: v. G Fabris, *Il più antico laudario veneto, con la bibliografia delle laude*, Vicenza, 1907, p. 89-90.

In festo omnium sanctorum
O virgine gloriossa: sempre sei laudata (v. nº 20)
In festo animarum.
Noi te preghemo iesu christo: Tra quele anime de pena
S, c. 29*a* (dopo l'uffizio dei morti). *C*, xxix. *T*, 2ª num., c. 34*a*. *R*, c. 41*a*.
Dominica post octavam omnium sanctorum
Quando io guardo el mio segnore: Chi pende in croxe impiagato
C, xxxiv. (1)]

(1) Le altre laudi di *B* che non si contengono in *S*:

Ave soperna e gloriosa croce: Ave del paradiso o sancto legno (nei due mss., e prima, avanti la serie, nella copia completa). P, XXIX, e *Laudi del Piemonte*, p. 113 *n.*; ma non si tratta di ottave: dopo la ripresa di 2 versi, è una serie di quartine.

XXXVI. *In festo sancti francisci.* O sancto francesco gloriosso: padre de li frati menori.
L, IX. *G*, XIII. *P*, XII. *T*, c. 79 *b*.

XXXVIII e XLVII. *Ista lauda debet dici in ebdomada sancta.*
Dona de lo paradiso: El tuo figlolo si e priso.
C, XXX; *R*, c. 1*a* (v. oltre).

XL. *In festo cuiusvis sancti vel sancte.*
De bono core la salutamo: la vergine maria.

XLIII. *Lauda ad honorem virginis Marie.*
Chi servira la vergine maria: De mala morte no pora morire.

XLIV. *Hec lauda dicitur in festo sancti stephani.*
O sancto stephano glorioso: martire pieno di amore.

XLV-VII. *Salutacio alla virgine maria per la pace.*
Dio ti salvi o madre di christo: vera speranza di tutti noi.

Il ms. *T* contiene poi le sgg., che sono anche in *P*: c. 66 *a* " Sancto vincentio sacrato: Padre vero predicatore „ (*P*, XLIX, e nelle stampe del Bonardo e 3ª del Galletti: v. *Inizii*); 2ª num., c. 39 *a* " O sancto Laurentio martir glorioso „ (*P*, XI), c. 44 *a* " E son un gran peccatore „ e di seguito " E sun xpo lo redemptore „ (*P*, LI e L: v. *Inizii*, Eo so..); c. 56 *b* " O sancto antonio glorioso „ (*P*, LV e *C*, XLII); c. 66 *b* " Amemo lo fantineto: Iesu chi n-hama tanto „ (*P*, XLVII). A c. 54 *b* " Salutemo la virgine: Con gran divotione „ (*G*, XII), da cantarsi *sulla voce* della lauda " Salve regina „, *S*, 31, ne è infatti un rifacimento; c. 57 *b* " Misericordia eterno dio: Pace pace signor pio „, v. *Inizii*. — Infine non ho trovato riscontri a: c. 19 *b* " Maria concepta fuisti: Sensa peccato originale „; c. 25 *a* " O Maria stella diana: Virginela gratiosa „ [diversa da: " O Maria diana stella: che riluci più che sole „ di molti laudari]; c. 47 *a* " Planzemo christiani: Cum granda

Si chiude così l'ordine annuale delle feste; *S* riprende, dopo lacuna di una carta (che risponde a quella notata al n° 27), col fine della lauda 20, cui seguono poche altre, alternate, a cominciare dalla c. 70, con nuovi uffizi latini, ed alcune di scrittura più tarda e trascurata: anzi, *El nome del bon Jesu* e *Sanctissima crose speciosa* (ultima), d'una minuta cancelleresca francese, che discorda dal gotico assai chiaro di tutto il libro:

c. 60 *a*. *In festo sancte Katherine dicatur ista lauda*
[32] Laudemo con amore: La maiesta divina
T, c. 81 *b*. *R*, c. 15 *b*.

c. 60 *b*. *Lauda de sancto sebastiano*
[33] Ty pregamo corpo sancto per tuti li peccadorj
(La 1ª st. com. " O sancto sebastiano cavalere glorioso ": cfr. *P*, v. *T*, 2ª num., c. 37 *b* (varia)).

c. 61 *b*. *Lamentatio peccatoris*
[34] Que faran ly peccadori se -ly voi abandonare
(in questo solo ms.; si pubblica più oltre).

c. 64 *b* [35] Sanctissima croce preciosa: Unde Jesu xpo fu iodato
Di nuovo a c. 84 *a*; la prima stanza a c. 12 *a*. — *C*, XIV. *T*, c. 35 *b*.

c. 66 *a*. *In festo sancti Joseph.*
[36] Or te preghemo degno confessore: per tutti li peccatori

c. 67 *b* [37] Padre nostro del ciel signore: Che in te regna ogni bontade.

c. 69 *b* [38] El nome del bon Jesu: Sempre sie laudato
T, c. 61 *a*: cfr. gl'*Inizii* del Tenneroni.

---

compassione "; c. 58 *b*, un *noël* bilingue, tutto cancellato, ma tranne due versi della 3ª stanza, ancor leggibile:

inc.		expl.
Noe noe noe noe	v. 21	Nos prierum grans e petit
Conditor alme syderum		Viventes in hoc seculo
Jamai non nascit um tal ioet (?)		Qui posum dir in paradis
Inter natos mulierum		Benedicamus domino.
		(segue una st. tutta latina).

c. 59 *b* " Laudemo lo salvatore " (per più santi) e c. 64 *a* " Laudemo tuti quanti: Lo nostro creatore " (per S. Sebastiano, diversa da *S*, 33); c. 80 *b* " O sancto bernardino nostro adorato " (*C*, XXIII e *P*, XIII, con simili inizi, son laudi diverse); 2ª num., c. 41 *a* " O San Johanne benedecto " (per il Vangelista); c. 43 *a* " Dio ti salve sancto padre " (per la festa d'un apostolo); c. 46 *b* " A chi se vole retornare: E la soa vita illuminare ". *Expliciunt laude pulcherrime dicende in domo disciplinatorum...* (c. 68 *a*). — Rimangono proprie dell'ediz. *C*, le laudi XXVI, XXXVII e XL.

c. 74 *a* [39] Socorri o vergen maria: la anima di questo nostro fradello
B, la 3ª avanti la serie; *P*, XLII (1); *T*, 2ª num., c. 70 *b*.

c. 79 *b* [40] Verbum caro factum est: De Virgine Maria.
Or intendi signore ciascuno: Quan lo mundo fu perduto
B, XLI, *T*, c. 57 *b*.
B, XLII (la prima agg. alla copia notarile) " Verbum caro ecc. Uno bello fantino anchoy nascuto: Che se apella Jesu cristo „. — *C*, XLI, con l'inizio latino dell'inno, e *T* [ult.ª carta, d'altra mano] " Verbum caro factum est: De maria per nostro amore „, proseguono: " Verbum caro dolce manna: In altare dico osanna „.

c. 82 *b* [41] *In festo corporis xpi*
O sancto sacramento: Nel alto ciel constructo.

E — chi prescinda da queste laude speciali, di cui i libri dei disciplinati si venivano accrescendo, forse ancora su di una stessa scorta — i canti sacri ci risultano ordinati su di uno schema, ch'è più seguìto e concorde nei mss. di *S* e *B*, ma riconoscibile in tutti, liguri e piemontesi, massime nel periodo dall'Avvento alla Pasqua: *T* premette le lodi della Vergine e le lamentazioni, cui succede il gruppo della Natività.

Il pianto di Maria si rinnova in più laudi, d'un testo assai tormentato. Il Feist (2) notava già come differissero due laudi con la stessa ripresa: " Voy qui amay iesu d'amore: Veniti a pianzer la passione „; l'una (*S*, 11) prosegue:

v. 3. E songno maria qui o lo cor tristo
La qual avea per figlolo christo
La mia speranza e lo me aquisto
Fuy crucifixo per li peccatori

E l'intero inizio si trova in una lauda toscana (3) assai diffusa; ma qui diverge:

v. 7. Figliuolo mio persona bella
Manda consiglio alla poverella

(1) E *P* XLIII: " Secorre noi Vergine Maria: ne l'hora de la morte „.

(2) *Zeitschr.* del Gröber, XIII; sotto i numeri 1371-72 (cfr. 1067, *Piangemo, gente*).

(3) " Voi ch-amate lo criatore „; seguo la lezione del Bartoli, *I mss. ital. della Biblioteca Nazionale di Firenze*, I, p. 145: cfr. Fabris, cit., p. 92, n. XXV.

Gironne laxa tapinella
K-agio perduto Cristo d'amore.
Capo bello et dilicato..... (1)

mentre nel nostro gruppo, vediamo inserto in *G* il lamento di Maria su di uno strazio così lontano dalle promesse dell'Annunciazione (2):

v. 7. Et me fo dito: ave Maria.
da l'angero santo, chi a mi vegniva,

---

(1) E poi la bocca, le mani, ecc.: v. Bartoli, p. 178; così in *S*, 10: " Venite a-la croxe ". Wechssler, *Die roman. Marienklagen*, Halle a. s., 1893, p. 41 e 45 (Itl. XXIX).

(2) Il dato è in altre lamentazioni: Mazzatinti, *Laudi dei disciplinati di Gubbio*, in " Propugnatore ", II, P. I, p. 156 " Venete a pianger con Maria: Voie figlioli disciplinati ":

v. 7 Ave, disse el Gabriello
Piena de consolamento
. . . .
. . . .
v. 13 Oimè, quanto m'è fallita
La impromessa che me fece.

(Il Tenneroni aggiunge un ms. dell'Oliveriana di Pesaro; ma prima si ricordi quello di Assisi, Monaci, *Riv. di filol. romanza*, I, p. 241, ora della V. E. di Roma: Em.[3] nel quadro dei mss.). Rondoni, *Laudi drammatiche dei disciplinati di Siena*, in " Giorn. storico ", II, p. 283, Bartoli, cit., p. 143, " Piange Maria cum dolore " [inizio apposto a laudi diverse, v. *S*, 15]:

Fue con gaudio salutata
or sono trista et sconsolata
. . . .
Ricevetti la novella
di te figlio kiara stella.

Cfr. ibid. p. 145 " Or piangiamo che piange Maria "; Mazzatinti, *Invent. mss. bibl. d'Italia*, VI, p. 163 e 167:

Dal Gabriel io fui salutada
Da la parte de Dio giocondo;
Disse che io seria la più honorata
Più che donna de questo mondo;
Ora so' remasta al fondo
E non so più quello che me dire
Da poy che te vegio morire,
O figliolo mio, in croxe a tal dolore.

Fabris, cit., nº XXVIII; e fra le nostre " Done e segnori ", *S*, 13, ult.ª st.:

Vardati sorele mie
Or che de far maria,
Vardati lo me cor
Che la lanza m-a ferita
L-angelo me disse
Che i-deveva esser regina
Aura son più tapina
Que persona vivente.

ed al v. 25 riprende la stanza:

O fijor me, persona bella,

cui seguono altre due su Giovanni che le rimarrà per figlio, senza che il cambio l'appaghi (1). Di più, nei laudari piemontesi furono alternate alcune stanze che ricordano il saluto dell'Angelo, e dovevano essere cantate dal coro degli oranti:

v. 7. Ave maria dolze regina
De -nazaret tuta fiorita
Portasti christo la vita mia
Chelo qui e nostro dolze amore.
11. Lo me fu dito ave maria
Da l-angelo qui a-mi veniva.
Or li respondo lasa tapina
Che amara songno in gran dolore.
15. Gracia plena dolza regina
De sapiencia e de dotrina.
Li patriarcha asay dexiraven
Che faza fructo la vostra fiore.
19. L-angelo me dise de gracia piena,
Or li respondo d-un-altra maenera... (2).

In *C*, xxxv:

Voi chi amé Jesu de amore,
Veniti a piangere la passione.
Ogni homo pianza devotamente
La morte de Christo omnipotente
Chi fu venduto per niente
Da Iuda falzo traditore,

lo stesso invito al lamento inizia la lauda narrativa della Passione, che, in vari tratti, ricorre di frequente nei nostri mss.: in *S*, 15, dopo sette quartine s'interrompe — e riappare quella stanza " Figliolo mio, persona bella „ —; in queste due redazioni di *C* (v. nº 27 della tavola) continua diffusamente: è la stessa lauda " Piangete gente con tristansa: la morte del nostro singnore „ del ms. parig. Ars. 8521 (3); come " Or chi a si

(1) Svolte nella lauda seguente in *S* (12) *Maria pianze*, queste battute si ripeteranno negli altri " pianti „.

(2) Non v'è dubbio che nei mss. l'ordine delle stanze fu alterato: chi legga nell'ediz. *C*, p. 27-28, deve disporre dopo la 3ª la 7ª, e poi 5ª, 6ª, 12ª, 8ª. In *R*, 32 *b*, si cercò la rispondenza con le parole dell'Angelo, ma vi manca una stanza (v. 19-22) e rimane spostata nel fine " Voy si benita... „.

(3) Mazzatinti, *Mss. ital. bibl. di Francia,* III, p. 239.

duro il core „ (nº 19) trova riscontro in “ Or pianzì la dura morte „ *G*, XXV (1) e ancora in “ Voy qui amay iesu d'amore „ (2): centoni e propaggini, che presto s'affoltano, sugli stessi motivi dei primi lamenti jacoponici.

Il ms. *R* s'apre con una rubrica notevole: *Incipiunt laudes de passione xpi que debent dicere apostoli in nocte qua xpus fuit a iudeis captus et flagellatus, et primo:*

Karissimi devoti
Pianziti la passione
Qual fu de tuti vivi
E morti salvatione (3).
O dona del paradiso
Lo to fiolo e preyso
Iesu cristo beato,

cioè la lauda notissima, secondo le redazioni più estese e più tarde di molti mss. (4); e quasi una seconda lauda — interposto

---

(1) Wechssler, cit., p. 42, Itl. XIX.

(2) Nella redaz. *G*, XVIII, v. 68-75 (mancanti in *S*) “ Gabriel da ce mandao „; cfr. l'ultima st. di “ Dio te salve „ (v. *S*, 18) con la prima di questa “ Or chi a „ e di *G*, XX “ Or pianza ogni homo graindi e piceni „ (Fabris, cit., XXXV).

(3) Lo stesso principio nella *Raccolta di sacre poesie popolari fatta da Giov. Pellegrini nel 1446*, ed. Ferraro, Bologna, 1877, p. 33: ms. ferrarese 307. N. D. 1; ma qui prosegue: “ Pianzì la passione: che portò el mio fiolo: per tuti noi salvare „, e così — mi valgo d'una cortese comunicazione dell'Agnelli — nel ms. 409. N. D. 3, con diverso expl., e fra le laudi, che citerò, dei battuti di Lodi, nº xiij.

(4) Jacopone da Todi, *Lo “ Stabat Mater „ e “ Donna del Paradiso „. Studio su nuovi codici* di A. Tenneroni, Todi, 1887, p. 71 *n.* (*R* “ Accurre dona no deui orare „, certo per errore da un “ demorare „: ms. Spithöver “ non morare „); Wechssler, p. 51; Miola, *Le scritture in volgare* ecc. in “ Propugnatore „, XIII, P. II, p. 393-4, XX, I, p. 87; Percopo, *Le laudi di fra Jacopone da Todi nei mss. della Bibl. Nazionale di Napoli*, in “ Propugnatore „, XIX, P. I, p. 378; Moschetti, *I Codici Marciani contenenti laudi di J. da T.*, Venezia, 1888, p. 106. Non possono contare fra questi ampliamenti le scene della *Passione* ed. dal Promis (v. Tenneroni, p. 86: “ Giorn. storico „, XI, p. 255 *n.*), che svolgono soltanto lo stesso tema; vera lauda in quel dramma è “ Spirito sancto amore: Consolatore eterno „ (v. gl'*Inizii*, e Feist, 1247), ver. 525, al termine della redaz. abbreviata, e 1034 della Giornata prima; il Paris, “ Journal des Savants „, 1888, p. 519, notò il lamento alla Croce, in ternari, Giorn. 3ª, v. 1453 sgg. (di quel tipo, il nº 7 della tavola).

(dopo il v. “ Per questo populo demoniato „) un sermone in volgare (1) — a c. 3 *b*.

> Maria incomenzo lo so lamento
> O fiolo mio delectamento
> E pianzeva in granda voxe
> Lo so fiolo che moriva su la croxe.
> O fiolo mio delicato
> O fiolo tuto mio conforto
> Fiolo mio per che sey morto
> Senza nesuno peccato.
> O fiolo mio vera luxe (2)
> . . . .

Il testo non ha grande importanza; ma questa prima parte di *R* (3) ci ritrae un uffizio drammatico della Passione, alternati un sermone e una lauda: seguono così “ O voy che amati yesu cristo de amore „, del secondo tipo, ampliato d'assai, e “ Ogni homo vegna audire: De la passion che voglio dire „.

Nello stesso ms., c. 44 (ultima), è un “ pianto „ che, non soltanto per il suo colorito più dialettale, si riaccosta alla *Lamentazione metrica* ed. dal Salvioni “ Bin devema tuit piorer cum gran dolor „, come entrambe debbono confrontarsi con

---

(1) C. 2 *b* “ O dolce meser yesu cristo habiando voy cenado con li vostri dilecti disciputi Voy ve inclinaste in terra *a* li pedi soy dagando a loro exempio di humilitate Che zascaduno de noy debiamo sequitare la vita vostra. *E ve prego* dolce meser yesu xpristo che per quella vostra granda humilitade ve piasa de lavare l-anima nostra he *de li compagni* he devoti de çascaduno amor che tenemo deshonesto he dare gratia... „; il secondo, c. 5 *b* “ O dolce meser yesu cristo habiando voy fata la oratione quasi in la hora de la meza nocte. et vene Juda con molta gente armati... „; il terzo, c. 9 *b* “ O dolce meser yesu cristo in la hora de prima voi fuse menato denanze a pilato... „; ed in ciascuno, dopo l'episodio della Passione la preghiera dell'ufficiante.

(2) St. 28 e 29 del ms. Spithöver; in tutto, *R* comprende 53 strofe, e *B*, 31, con l'expl. di Sp., che si ravvisa nella stanza 46 (penultima) di *C*.

> Perchè no pianziti zente dura
> Chel pianze ogni creatura
> Lo sole he la luna se obscura
> Tuto el mondo e tenebroso,

st. 48 in *R*, ricorre in “ Planzemo cun li ochi e cun lo core „ (Fabris, XXX).

(3) V. per la composizione del ms. la n. in principio.

la lauda " Cescadun si pianza cum dolor „ dei mss. 1708 della Biblioteca Comunale di Trento (1) e Laur.-Ashburnham. 1177 e 1178 (2):

Oy las baron chi pases *per* la-via
Sis tam dolor cu*m* e la mia
Del mon fi car mout solace n-avia
Oy fi car *cum*-trist e lo giorn doloros e amar.
5 Che vezo morir a-morte descusia.
Mort car mi premd col chi tam baronia
Oy fi car *cum*-trist e lo giorn doloros e amar.
De doze l-un in-chi yesu se fia
Iuda lo felon in baxand lo traiva
10 Tranta dener lo p*re*cios sangue vandiva
Oy fi car *cum*-trist e lo giorn doleros e amar.
Um bom matim m-apelum maria
Or e cambia lo me nom i*n* dole*n*ta e smaria
Oy fi car *cum*-trist e lo g[i]or doloros e amar.
15 Tullu m-am me figl a tort e tritoria
Lo cor me part tam volunter moria
Oy fi car *cum*-trist e lo g[i]or doloros e amar.
Ma i-sum trey de una mala *com*pagnia
Che l-un lo bat e l-autro lo lia
20 L-autro gle dis e tu fi de maria
Oy fi car *cum*-trist e lo g[i]or doloros e amar.
Dolor n-ay al-cor no e longa mania
Chi m-an tolu mon figlol ihū pia
Oy fi car *cum*-trist e lo g[i]or doloros e amar.
(c. 44 *b*) 25 Oi de que fara la soa dolemta mare
Chi vezo morir col ch-e figl e pare
De tut lo mond e appella sarvare
De dolor moray e non tardero vare
Ch-el mon figl e pandu si *com* s-el fus im l-are
30 Oy fi car *cum* trist e lo g[i]or doloros e amar.
Quant lo fe oyt hi dolor de soa mare
Dis a-zuan a ti l-acomando *per* mare
Che tu zoan hi sies bon figlol e pare
Oy fi car *cum*-trist e lo g[i]or doloros e amar.

(1) A. Panizza, *Di alcune laude dei Battuti di Rendena nel sec. XIV*, in " Archivio trentino „, II, p. 94, ed E. Broll, *Laude e sacre rappr. nel Trentino*, in " Annuario degli stud. trentini „, VI, p. 143.

(2) Il primo fu edito da Giov. Agnelli, *Il libro dei battuti di San Defendente di Lodi*, in " Arch. stor. per la città e comuni del circond. di Lodi „, XXI, (1902), p. 14; nel secondo, dei disciplini di Bergamo, c. 13 *a*.

35 Per gram pieta lo figlol se voz *in*-veyr sa mare
Obrit soy og tan dozam*ent* la varda
Poi inclina so cap del corpo se sagle l'arma
Oy fy car *cum* trist e lo g[i]or doloros e amar.
Oy e compi lo sogn che simeon me-disiva
40 Che de dolor lo me cor partireva
Or n-ay dolor al cor mazor chi no n-avia
Oi fi car *cum*-trist e lo g[i]or doloros e amar (1).

Ristampo ora l'inno alla Vergine, con alcuni saggi delle *recomendaciones* in volgare, secondo *S* (v. nº 6); la lezione d'altri mss. ci servirà di passaggio per ricercare a quale istituto di disciplinati risalgano questi laudari:

Oy stella matutina
Doza vergen maria,
Sanctissima reyna
Metine in -iusta via.
5 Oy stella matutina
Pina de grande splendore,
Oy rosa senza spina
Chi das si doz odore,
Purissima reyna
Preay lo creatore
Che lo nos perdone
E meta in sancta via.
13 Preay lo figlor vostro
Reyna se a-voy piaxe
Che lo nos perdone
E mande inter noy paxe.
De lo so dozo amore
Li nostri cor-sy-abraxe
Ch-e lo signor veraxe
Qui n-a tuti in-baylia.
21 Preay doza vergen maria
Reyna de misericordia
Per le citae e per li casteli

---

v. 21-28: *Recom.* (III), c. 18 *a Ancor se tornerema cum humilita e cum devocion a la misericordia de nostre segnor yhū crist anuncior de verasa pax che el gli piaxa de mander de la soa pax de cel en terra de ça de mar e de*

---

(1) Sull'inizio della lamentazione " O vos omnes, qui transitis per viam „ Ger., I, 12, e l'inno latino " Qui per viam pergitis „, v. Wechssler, p. 17 e Dreves, *Analecta hymnica medii aevi*, X, p. 79. Lauda *Cescadun si pianza*, v. 55 " O voy che ande per me la via: Vegni e vede questa doia mia „. Sul v. 13, v. Salvioni, cit., p. 25 n. — Il testo non è chiaro nei vv. 5-6, forse per lacuna, e 23 (*pia*?).

Unda e-verra et discordia,
Che dee gli mande paxe
Tosto et bona concordia,
Unda e pax et bona volunta
Conferme tuta via.

29 Preay per la terra sancta
Unda xpiste portà paxion
Che la gente xpistiana
Gli possa servir lo segnore,
Preay per la gente pagana
Che li creen en so segnore
Cheli qui sum in arrore
Menli in dritta via.

37 Preay per li naveganti
Che per voy y seen salvay,
Day conseglo a-li mercanti,
Li poveri aytoriay,
Pelegrini et viandanti
Per voy sean salvay,
A l-infermi et tribulay
Da la vostra aya.

45 Preay per li peccatore
Chi a-voy volen tornare,
Que de' per lo vostro amore
Gli debia perdonare,
Per voy doza reyna
Ogni homo se-po salvare,
Ben devemo sperare
In voy doza vergen maria.

53 In voy doza vergen maria
Ogni homo a-gran-speranza,

---

la de mar. E per tute le terre e-ville e citae ond a-verra e tribulacion e specialment en quest pays e en questa cita per gli merit de la soa sanctissima passion.

v. 29-30. Nella *Recom.* (II), c. 17 *a ... que sea los e gloria de dee e salvament e acressament del povol cristian e recrodament de quella sancta terra de otra mar la-ond yhū crist fu mort e passiona per gli nostri peccay.*

v. 37-44: *Recom.* (VIII), c. 19 *a Anchor preerema lo nostre segnor yhū crist per tute quelle persone che son im-peregrinage e per tuit gli marchand de mar e de terra che el lor dea fer tal romeage e ensi dignament e iustament convier lor marchandie ch-el sea los e gloria de dee e salvacion de lor anime e bon esempio de tute persone.*

Recom. (IX) ibid. *Anchor preerema la pietà del nostre segnor yhū crist per tute persone che sum en malarhia en carcere e en alcuna autra desconsolacion* (agg.: *che el lor dea paccencia pax e consolacion*) *per gli merit de soa sanctissima passion.*

v. 53-60: *Recom.* (IV), c. 18 *a Anchor se tornarema a yhū crist verasa lux conservaor e ayturior de tute le persone que son en staat de gracia. E si*

A-li iusti day ay[a]
A-li peccaoy day perdonanza,
Or preay tuta via
Lo rey de gran possanza
Che el dea perseveranza
A questa doza conpagnia.

Procede ugualmente in *G*, *C*, *R*; i v. 15-16 mancano in *B*, ove si compie la stanza con " O dolza virgine maria: Chi sei nostra advocata „ e la terza riprende col v. 27: " Unda he

---

lo precherema per tute le persone que son en estaat de penetencia e de gracia en relligion e en li say[n]t orden e-n matrimonii e-n rechius e-n hermitages-e-n autra sancta vita e specialment per tute le person que fan questa disciplina ci e per l-univers mund per reverencia de la soa sancta passion ch-el lor dea gracia e a-noy cum lor chi possen far vita e penetencia che sea so los E soa gloria e salvacion de lor anime e bon esempie de tute le aytre persone.

E per l'intera lauda, *Recom.* (XVIII), c. 21 *a Noy se tornerema humelment e devotament a-la gloriosa vergena maria fontana de gracia confort e sperança di peccaor che el gli piaça de preer el nostre segnor yhū crist per salvacion de tuta la humana generacion e che la gli debia apresenter queste preere che sum encoy anne fayte en-chesta casa E per tut l-univers mund per la soa sanctissima pieta e misericordia.*

Simile a questa, la lauda di *S.* 24:

Que faran ly peccadori: se ly voi abandonare
Te pregemo o segnore: che ty li debia consolare.
Defensore de-la città grande: de ierusalem e ogni terra
Ty prega questa [canc.: *brigada*?]: que deffendi a-questa terra
De tutta crudella guerra: segnor de lo celo e de la terra
Odine per tuo amore: tu sey lo nostro redemptore.
E de tutta aura freyda: (tu vey le nostre necessitae)
De tempesta tanta orribla: gardane per tua bontae
No agardar a le nostre pecae: tu ne ae tanto amae
Que sey deissezo per noi salvare: no ne vogli abandonare.
De pestelencia e de famina: ty te debiay regordare)
Ty sey nostra medicina: ty piaza de far cessare.)
Sanitae ty debiay dare: pan e vin pertutto mandare
Ihū xp̄e nostro segnore: de lo mondo consolatore.
La sancta giesa fay unire: e la tua payze mandare
Qui ogni dy puissam servire: lo to nome e laudare.
Ly crestiani debiay gardare: e far ogni dy multiplicare
Contra lo turco traditore: de li crestiani persecutore.
Que faran ly peccadorj: —

v. *Recom.* (X), c. 19 *a*, per i campi: *Anchor preerema lo nostre segnor yhū crist per lo fruyt de la terra che per la soa misericordia e pieta lo vard de tempesta e de mal ivern e de vast de ree gent e-lo trameta a bona recoglison aço che el sen possa far alimosine e caritae e aytri ben...*

paxe e bon volere: Or la mantene tuta via „; la stessa lacuna di quei due v. in *T* (cui manca pure la st. 45-52); ma solo in *G*, *T*, *R* troviamo la stanza:

> 21 Pregati lo figlol vostro
> Madre de pietade
> Chi in croxe fu morto
> Per li nostri peccati
> Che a noi mandi pace
> E per tutta la xpianitade
> E specialment in questa terra
> E in pemont e in lombardia (*T.*).

G " in la nostra citae: in Toscana e Lombardia „; e " Toscana „ era certo nell'archetipo di *R*, che non fu inteso dal copista.

Una tavola delle indulgenze, nel ms. *P*, registra l'approvazione della Compagnia per parte di Clemente IV e di " frate Thoma del contade de cena vescovo „ (1); fra i documenti piemontesi un'attestazione consimile si trova, insieme con i capitoli in volgare della *crosata* di Dronero [" Ici comenza la vita di recomanday de la virgine gloriosa de la fe de xpt iesu „], nelle Grazie, privilegi e concessioni di " messer clement de la sedia apostolica papa quarto „, di " fra thoma de sancta memoria vesco de sena „, del " segnor de albana fra bonaventura de l-orden di fray menor „ e molti altri sino a " messer guido vesco d-ast „. Il Manuel di S. Giovanni, cui dobbiamo queste notizie (2), notava come i capitoli fossero traduzione d'altri in latino più antichi, serbati presso la Confraternita di S. Croce in Cuneo; ed è questo, passato ora all'Archivio dell'Ospedale Civile di quella città (3), il gruppo più completo di documenti sui disciplinati, nella regione subalpina: i capitoli della frater-

---

(1) Cian, op. cit., p. 271.

(2) *Memorie storiche di Dronero e della valle di Maira*, Torino, 1868, Parte I, p. 133-35.

(3) Un indizio nel Kehr, *Papsturkunden in Piemont* (" Nachrichten „, di Gottinga, Philol-histor. Klasse, 1901), p. 127. — Lib. I, n° 1-146, con le scritture più antiche sulla fondazione dell'ospedale per lasciti alla *cruciata*; di questa, il carattere religioso è evidente: " confratrie „ è termine di significazione, anche giuridica, più ampia. L. Bertano, *Storia di Cuneo, Medio Evo* (1198-1382), II, p. 74.

nita, " Incipit vita Recomendatorum virginis gloriose fidei ihu " xpi ", concludono: " Felices qui huic tam floride. tam hono- " rabili. tam iocunde. tam pie. tam sancte societati iunguntur... " Dominus clemens sedis apostolice pontifex. iiij. vidit laudavit " et approbavit statuta, et largitus est indulgenciam centum " dierum... prout apparet in litteris bullatis ipsius summi pon- " tificis. Religiosus etiam vir frater thomas sancte memorie " quondam senensis episcopus domini pape tunc in urbe vicarius " celestis thesauri super recomendatos gratiam ampliavit..... " Tercio bone memorie dominus albanus, frater bonaventura " ordinis fratrum minorum generalis minister examinavit, ap- " probavit et predicavit et recepit recomendatos virginis ad " omnia beneficia fratrum suorum qui sunt et erunt per totum " orbem terrarum... " (nell'originale, confermato da Guido vescovo d'Asti, 4 nov. 1325, ed in copia per ordine di Dragomando " Abbas sancti dalmacij de burgo " (1), 31 ott. 1335). Il titolo di " Raccomandati della Vergine Maria " è quello dell'antica confraternita romana, fondata nel sec. XIII e nominata più tardi dal Gonfalone (2), e ad essa si riferiscono la conferma del vescovo di Siena (3) e il breve di Clemente IV (4); ed al proposito nostro questo basterebbe, ove non soccorresse il titolo che porta ancor oggi la confraternita di Saluzzo ed una serie

---

(1) Sui diritti signorili dell'abate di S. Dalmazzo su Cuneo, v. Gabotto, in *VII centen. della fondaz. di Cuneo*, Torino, 1898, p. 164-66.

(2) Ruggeri, *L'archiconfraternita del Gonfalone*, Roma, 1866, p. 10 e n., 46 sgg.; il titolo del Gonfalone, approvato da Innocenzo VIII nel 1486, risale probabilmente alla seconda metà del sec. XIV, e appare già in doc. del 1409. Sulle rappresentazioni al Colosseo, v. ora il Vattasso, *Per la storia del dramma sacro in Italia*, " Studi e testi ", 10, p. 69 sgg.

(3) Fra il 1253 e il 1273 l'Eubel, *Hier. cath. m. aevi*, registra come vescovo di Siena " Thomas Fulconis O. Praed. ", ritornando così all'Ughelli, *Italia sacra*, III, col. 557, mentre il Gams, *Series episcop.*, dopo un periodo brevissimo del Fusconi, dice vescovo di Siena dal 1254 " Thomas Balzetti " dello stesso ordine. La questione si trova discussa, non senza contraddizioni, dagli storici locali: v. Pecci, *Storia del vescovado della città di Siena*, Lucca, 1748, p. 214 sgg. e Lusini, *Storia della basilica di S. Francesco in Siena*, Siena, 1894, p. 32, n. 3, che distinguono, ad ogni modo, i due vescovi domenicani.

(4) Dell'anno 3° (1267), Potthast, *Regesta*, n° 20204; Muratori, *Dissertaz.*, t. III, p. 491-96.

di documenti dei frati minori (1); altri, della stessa silloge, su di una *cruciata* genovese (2) spiegano tanto più, col diffondersi della compagnia su per la via litoranea, le affinità che abbiamo osservato nei libri delle laudi (3).

---

(1) Dall'a. 1336 (del ministro provinciale: partecipazione dei suffragi); fin dai primordi la compagnia romana era stata protetta da S. Bonaventura (v. Ruggeri, p. 43), ed a lui i *fratres sodalitii albati* di Saluzzo attribuivano la fondazione della loro disciplina: le cui scritture e lettere più antiche " propter bella, incendia et eiusdem civitatis depopulationes ac denique temporum iniuria „ erano già in gran parte disperse nel 1586, sì ch'esse venivano rinnovate in complesso dai custodi dell'Archiconfraternita. — Nell'arch. cuneese, le bolle originali di Benedetto XII, Martino V, Eugenio IV, Sisto V, Clemente VIII, Paolo V; in copia, quella di Calisto III.

(2) Vol. cit., nº 4; successive approvazioni e conferme (la più antica del 1308): " priori.... et ceteris de societate se disciplinantium, ob reverentiam dominice passionis, in quadam domo seu Oratorio constructo extra muros civitatis Janue in contracta aquaçole sup*er* solo domini conradi aurie... „.

(3) Il ms. Varii 169 della Bibl. Reale, membran., del sec. XVI, contiene i Capitoli di una " fraternitade de li disciplinanti „; il primo statuto ne comprende 19, e le aggiunte posteriori son datate 1546 e 1584: certo piemontesi, per le tracce dialettali del testo e per la moneta " quarti doi de savoia „ ricordata nel cap. XVIII. Nel X si prescrive l'onestà della vita d'ogni " fratello „, con divieto d'alcune fogge del vestire e un cenno, rarissimo nei doc. del tempo, alla drammatica popolare profana: " ... et di non zugare ad alchuno iocho di azaro o sia di fortuna come sono dadi carte et altri simili iochi ne in publico ne in secreto... Ne portare arme se non per causa legitima et non portare vestimente o sia calciamenti da devisa, ne piume sopra boneti et maxime in la fraternitade et non conversare in ostarie inordinatamente et non stravestirsi nel carnevale ne ad altri tempi ne far farse, ne altri simili iochi, salvo in cose le quale non redondeno in scandalo ne vergogna. Et de tale cose averni expressa licentia dal rectore et parimente non essere auctori de abbatie de balli ne impedirsi di soni per far ballare, salvo in cose licite et debite ac solite a la discretione dil rectore, et se in alcuno de li predicti vitij se trovera alcuno fratello, sia rigidamente punito ad arbitrio et voluntade dil rectore „. Su queste *abbazie di balli* " Giorn. storico „, XL, p. 28.

Il ms. Ital. 2104 della Biblioteca Nazionale di Parigi (1) ci richiama al “ più antico laudario veneto „ pubblicato dal Fabris. — *Qui començа la cantinella de la scola dey batudi de santa maria per tuto lo circulo del anno. Inprima la cantinella del vendre santo* (c. 2 *a*), e per questa voce, diffusa nel campo romanzo allato a *cantilena* (2), s'intenda il canto corale dei battuti (3). La sede della “ scola „ — con lo stesso titolo della Udinese — viene indicata nell'ultima stanza della lauda “ Signori e done o[r]ve pensà „ (4), rivolta a Maria: “ De pordenon voy se colona: E clave e ferma seredura... „ ; il corpo del ms. può assegnarsi al sec. XV: si avverta che l'aggiunta, più tarda, di alcune laudi musicate reca il nome, già noto (5), di *Petrus haedus*, e le date 1493 e 1494. — Inc. “ Aidame piançer pecatori „, e seguono le laudi come nel ms. Udin. sino alla XXXV (fin. c. 47 *b*), escluse le XXII-XXIX (6).

---

(1) Acquisto del 1898. Sec. XV, membran., mm. 208 × 154, legato in pelle: 57 carte numerate modernamente, a quaderni, cominciando c. 2-9 (lacuna del foglio interno nel fasc. 18-23; 40-49 quint.). — Il ms. 2103 contiene una “ festa „ francescana del sec. XVI, polimetra, in 5 atti; ma due son di “ compendio „ sebben cantati da giovinette sulla lira, e la sola azione si restringe nel 4°, dov'è svolto il fioretto della visita di S. Chiara a Santa Maria degli Angeli, quando un fuoco apparve sulla mensa dell'umile compagnia, e gli Assisiati vi accorsero “ credendo fermamente che ogni cosa ardesse „ : lo stesso racconto nella lauda “ De venite a contemplare „ — “ cantasi chome *hora ma sono in eta* „ [del Savonarola].

(2) Spagnuolo e provenzale: il Mistral, *Trésor*, ad v. *Cantinello*, ricorda quella “ della santa Maria Magdalena „, del sec. XI, continuatasi tradizionalmente nella cattedrale di Marsiglia. La *cantilena*, per canto religioso (v. *Parad.*, XXXII, 97), è tra le voci che passarono dall'ital. al franc., secondo Hatzfeld e Darmesteter [manca nella tesi del Kohlmann, cit. dal Brunot, *Hist. de la langue franç.*, II, p. 209 n. 3]; nel latino medievale, pei ritmi del volgo, in opposizione a *carmina*: Rajna, *Orig. dell'epop. franc.*, p. 470.

(3) Prima col valore di canto breve, come ancora nello spagnuolo: e v. Du Cange, con rinvio al Gloss. lat.-ital., dove risponde al fr. *chansonette*, ital. *canzonetta*. Cfr. l'ant. mil. *cantégora* (continuazione popolare del lat. *cantĭculum, cantĭcula*), genov. *cantëgoa*, per canto religioso di più voci: Salvioni “ Rendiconti dell'Istit. Lombardo „, S. II, vol. XXXIII, p. 1159-62, e Parodi “ Arch. glottol. „, XVI, p. 111.

(4) c. 42-43; ms. udin., XXXI.

(5) Fabris, p. 18-19.

(6) Il testo corrisponde; nella l. XXXI manca una stanza (v. 39-44); si

c. 48 *b* Ostia preciosa: Corpo de xpo veras.
E voy fosti consecrata de l-alto dio saludor
In la-cena biata de xpo salvador
E voy fosti morta e lançata per tuti li peccadori
E-chi no-lo crederay andera al fogo penas.
. . . .

(4ª st., fin.) Aquesta e l-armatura che ne-a dispegnati
De la preson scura del inferno dampnati
La-qual era si dura per lo antigo peccat
Che a-tolto la forza del falso sathanas.

c. 49 *b* (d'altra mano) O padre nostro o creator: o suma sapiencia
c. 50 *a*-51 *a* (la prima carta abrasa e riscritta in corsivo del sec. XVI):

Ay me fiollo mio delicato
O come sej (s)transfigurato
Se tuto el ciel e gia turbato
Vedendo el mio fiol a-torto
Et servilmente in croce morto
O lasa me com deggio fare.
Non so far piu se non cridare,
. . . .

un lungo pianto di Maria che ritrae dalle fioriture, già ricordate, di *Donna del paradiso*, sebbene il metro si ordini qui: *aa*, *abbc*, *cdde*, *e*...; i due primi versi, musicati, figurano nel ms. Udin.; anche in questo, seguono alcune pagine musicate con gl' inizi:

---

può integrare qualche passo di Ud.: IX, (che riprende col v. 11 a c. 21 *a* per la lacuna indicata) v. 25 " Chi ve serve çença falança "; XIV, 11 " Suso la crose çença demorança | fossi desteso per certança | Vu fossi afito e ferido d'una lança "; XIV " Ave dona gloriosa: Sopra ogn-altra preciosa ", offre le sgg. stanze che mancano a Ud.:

dopo il v. 10. En voy vene lo salvatore
Lo vostro corpo plen de rore
Voy portasti cum dolçore
Tanto fossi dignitosa.

dopo il v. 18. Voy se nave voy se porto
Voy se guida e bon conforto
Chi no ve ama ben e morto
Tanto fossi dignitosa

dopo il v. 26. Condenado fossi a morte
Per le grave pene forte
Çudegado fosse per sorte
De la çente furiosa.

c. 51 *b* Ave maria, verzene coronata in ciel eletta
c. 52 *b* O verzene gentile: piu che caesare et claudio
c. 53 *b* O clementissimo signore: resguarda dal to sancto loco.
c. 54 *b* Segnor non me reprender cum furore: et non voler correggermi [con ira
c. 55 *a* O croce santa, o nobel confalone: ne la cui grande et singular virtute
c. 55 *b* (testo solo, con l'intera lauda, di carattere letterario)

O dolce insegna de la passione
de Iesu christo liberal signore
che sol per vostro amore
volse morir con tanto vituperio

. . . .

(14ª st., fin.) si che schivando ogni mortal saetta
cosi del nostro occulto et gran nemicho
chome del mondo inicho
pervengha al somo bene che s-aspetta.

c. 57 *a* (invertita; scrittura della 1ª parte del ms., cui doveva tener dietro)

Dolçe rayna madre de xpo
Do receve questa nostra seror.
E do la recevevo dolçe madona,
Se per algun tempo ela ve avesse falado
Misericordia per ley domandemo.
Dolçe.
Sancta maria voy se tanto bella
Questa nostra serore trayela ancoy de pena
Al vostro fiolo si la fayvo dono.
Dolçe.
Ancora ve pregamo dolçe madona
Che denançi dal vostro fiolo sia inçenochiata
Chel receva questa nostra seror.
Dolçe.
Sancta maria de pietança
Lo nostro conforto e la nostra sperança
Questa nostra serore trayela de dubitança
Che lucifero non sia so segnor
Dolçe
Facemo le ovre e per dio non tardemo
Passemo li poveri e la carne se batemo
c. 57 *b* Si bona çornata noy averen trovata
Per quella beata o verçene maria
Dolçe
Si como de voy stella diana
Receve dio çarne humana
E la via y-e fata piana
Che in paradixo possella andare
Dolçe

E do la recevevo im-paradixo
La si sera el çogo e-l rixo
A veder quel dolçe vixo
Como de voy dolçe xpo padre.
Dolçe rayna.

Questa lauda risponde a parecchie strofe di Ud. XXXIV " Con dolce voxe e con planti „ (in una lezione più vicina a " Madona santa maria: receve stu nostro frade „), che dovette appartenere al laudario cui attingeva il Peregrini per la sua raccolta del 1446, nei due noti mss. ferraresi (1); non più che l'inizio nei mss. subalpini che abbiamo esaminato: *S*, 39

Socorri o vergen maria: la anima di questo nostro fradello.
O dolza maria si lo aya: devant lo vostro figlolo.

L'accordo del Peregrini con i laudari friulani è molte volte palese: con il gruppo subalpino ha comuni alcuni inizi, che subito deviano: *A* " Pianzea Maria con dolore „, *C* " O vui che amati Cristo lo mio amore „ (secondo il tipo toscano), *M* " Pianzì con i ochi e com-el core „. Ho detto d'un riscontro col libro dei battuti di Lodi (2); ed ove si aggiunga che quest'ultimo si collega con altre laudi di *S* (3), potremo arguire come per più rami, dalla Toscana (anche se di origine umbra) tali poesie si sieno diffuse nell'alta Italia, e qui ridotte ad un " volgare illustre „ regionale (4), con iscarsi elementi positivi dei singoli dialetti.

---

(1) Ed. cit. del Ferraro, p. 50; L. Zanutto, *I frati laudesi in Friuli*, Udine, 1906, p. 89-90 e Fabris, p. 93-94.

(2) " Karissimi e devoti „; cfr. Lod. iij e Per. *O*.

(3) Cfr. n° vj " Nuy ve pregaremo Yesu Christe „ (come " prosa rimata „, e di nuovo come " lauda „, p. 47) con la serie agg. di *B* (*S*, c. 29), e viij, viiij, xij, le prime stanze, con *S*, 11, 5, 26.

(4) Salvioni, " Giorn. storico „, XLIV, p. 422-23.

L'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

INDICE
DEL VOLUME XLIV

Torino — Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e dei RR. Principi.

1

2

3

4

5

6

Off. Fototecnica Ing. Molfese - Torino

Lit. Salussolia. Torino

BRUNI A.C.- Contributo alla conoscenza dell'istogenesi delle fibre collagene.

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 4

Fig. 7

Fig. 5

Fig. 3

d

c

Fig. 8

b

a

Lit. Saluzzolia, Torino

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

d

c

Fig. 4

Fig. 7

Fig. 6

Fig. 8

b

a

Fig. 5

Lit. Salussolia, Torino

Tip. Vincenzo Bona – Torino (60089).

Fig. 25.

Fig. 27.

L

m a m p m a m p

5. b

D D

D' 5. a D' D' 5. c

6

4. b

4. a

E S

7. a D 7. b

n
D' L
m a
m p
S.

1 2

3. c

3. a E S 3. b

E. Forma Fot. Off. Fototecnica Ing. Molfese. Torino

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

Fig. 5

Fig. 6

Lit. Salussolia, Torino

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

Fig. 5

Fig. 6

Fig. 7

Fig. 8

Fig. 9

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

Off. Fototecnica Ing. Molfese - Torino

1

2

9

8

3

11

10

15

18

Forma fot.

4

5

7

6

13

17

12

14

16

19

20

Off. Fototecnica Ing. G. Molfese Torino

1 2 4 5 7

9 6

8 3 17 12 13

11 10 14

15 18 16 19 20

Forma fot. Off. Fototecnica Ing. G. Molfese Torino